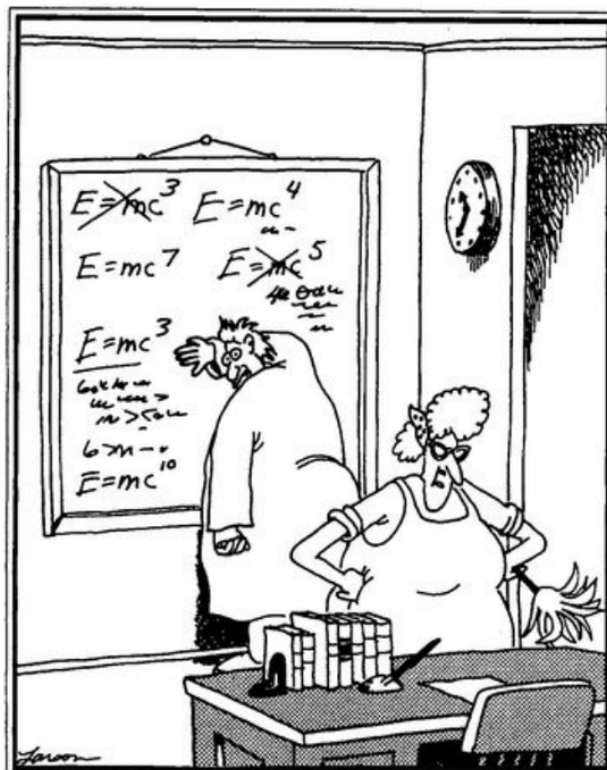
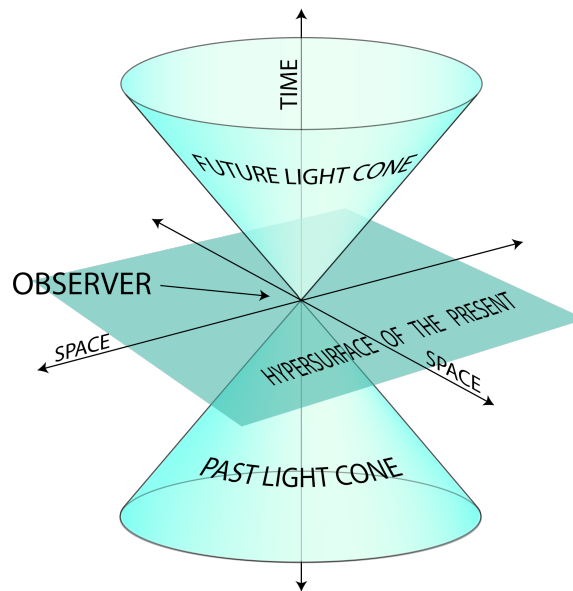


TRAVAUX DIRIGÉS DE RELATIVITÉ RESTREINTE



"Now that desk looks better. Everything's squared away, yessir, squaaaaared away."

TD de relativité restreinte n° 1

Principe de relativité et premières conséquences

1 Désintégration

Le Λ^0 est un baryon qui se désintègre en une paire proton-pion : $\Lambda^0 \rightarrow p \pi^-$. Sa durée de vie propre étant de 2.9×10^{-10} s, quelle est la distance moyenne parcourue dans le laboratoire par un Λ^0 dont la vitesse est $v = 0.994 c$?

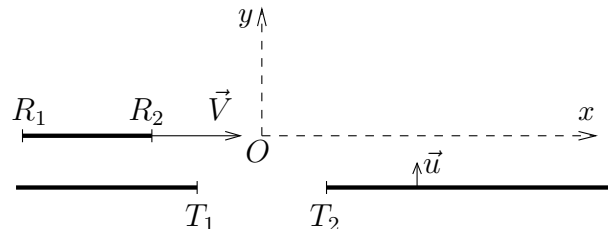
2 Contraction des longueurs

On considère deux référentiels inertiels en translation rectiligne uniforme l'un par rapport à l'autre. On considère une règle immobile dans l'un des référentiels et alignée selon l'axe de la translation. Retrouver le phénomène de contraction des longueurs de deux ou trois manières différentes.

3 Paradoxe de la règle et du trou

On étudie la situation schématisée sur la figure 1. On se place dans un référentiel inertiel \mathcal{R} doté des axes x et y et d'une horloge donnant t . Une règle de longueur propre L_0 se déplace à une vitesse constante $\vec{V} = V \vec{e}_x$ proche de c . Un plan percé d'un trou de largeur propre L_0 se déplace lui selon l'axe Oy à une vitesse constante $\vec{u} = u \vec{e}_y$; $u \ll c$ de telle sorte qu'on peut traiter le mouvement du trou dans l'approximation non relativiste. Les mouvements de la règle et du trou sont tels que le milieu de la règle rejoint le milieu du trou à $t = 0$ et coïncide alors avec l'origine O du référentiel.

Figure 1: Représentation du dispositif. La règle a pour extrémités les points R_1 et R_2 . T_1 et T_2 sont les bords du trou.



En raison de la contraction de la longueur de la règle dans \mathcal{R} , on s'attend à ce qu'elle passe largement dans le trou. Il apparaît un paradoxe lorsqu'on se place dans le référentiel \mathcal{R}' attaché à la règle et qu'on voit la largeur du trou rétrécir: la règle ne pourrait alors plus passer.

Résoudre ce paradoxe en étudiant les coordonnées des extrémités $R_{1,2}$ et $T_{1,2}$ de la règle et du trou dans chacun des référentiels (\mathcal{R} puis \mathcal{R}'). *Indication: lorsqu'on travaille dans \mathcal{R}' il faut étudier la trajectoire des extrémités du trou.*

4 Composition des vitesses

1/ On considère une transformation de Lorentz entre deux référentiels. L'un (\mathcal{R}) est immobile, l'autre (\mathcal{R}') se déplace à vitesse constante $V \vec{e}_x$ par rapport à \mathcal{R} . On considère un point matériel en mouvement. Donner les coordonnées de sa vitesse \vec{v} dans \mathcal{R} en fonction des coordonnées de sa

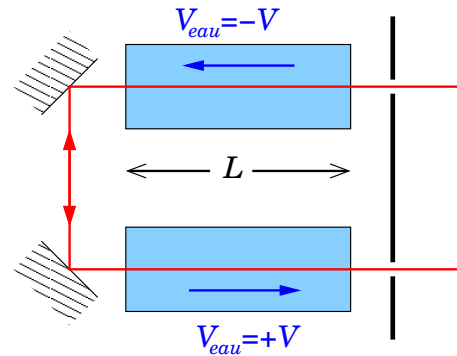
vitesse \vec{v}' dans \mathcal{R}' et de V . On dérivera le résultat de deux manières différentes (soit de manière directe, soit en passant par les lois de transformation de la quadri-vitesse).

2/ On considère deux particules (1 et 2) animées de vitesses constantes \vec{v} et \vec{V} dans le laboratoire. On définit la vitesse relative \vec{v}_{rel} de 1 par rapport à 2 comme la vitesse de 1 dans le référentiel où 2 est au repos¹. Montrer que

$$v_{\text{rel}}^2 = \frac{1}{\left(1 - \vec{v} \cdot \vec{V}/c^2\right)^2} \left\{ \left(\vec{v} - \vec{V}\right)^2 - \frac{\left(\vec{v} \wedge \vec{V}\right)^2}{c^2} \right\}. \quad (1)$$

5 Expérience de Fizeau

On considère le dispositif expérimental illustré par le schéma ci-contre: une source lumineuse (située loin à droite sur la figure) émet un rayonnement que l'on scinde en deux parties qui suivent les chemins illustrés sur la figure: l'un des faisceaux entre dans le dispositif par l'ouverture en haut à droite et a une vitesse dont la direction est toujours identique à celle des écoulements qu'il traverse, l'autre faisceau entre dans le dispositif par l'ouverture en bas à droite et a une vitesse opposée à celle des écoulements qu'il traverse. Les faisceaux sortent du dispositif en se propageant tous deux vers la droite et se réunissent ensuite sur un écran où on les fait interférer.



On note v' la vitesse de la lumière par rapport à l'eau mesurée dans un référentiel où l'eau est immobile, et v_{\pm} cette même vitesse mesurée dans le laboratoire. Il y a un indice \pm pour distinguer les deux vitesses possibles de l'écoulement: $\pm V$.

- On note n l'indice de l'eau, de sorte que $v' = c/n$. Montrer qu'en négligeant les termes d'ordre $(V/c)^2$ on obtient $v_{\pm} = (c/n) \pm V(1 - 1/n^2)$.
- En déduire l'expression de la différence de phase $\Delta\phi$ entre les photons suivant les deux chemins possibles (on notera λ la longueur d'onde de la lumière). Donner la valeur prédite par la mécanique classique.
- Dans son expérience de 1851, Fizeau utilisa un montage pour lequel $L = 1.487$ m, $V = 7.059$ m/s, $\lambda = 0.526$ μm et $n = 1.333$. Il obtint $(\Delta\phi/2\pi) = 0.23$, cela permet-il de trancher entre l'approche relativiste et l'approche classique ?

6 Expérience d'Hafele et Keating

En 1971 Hafele et Keating [J. C. Hafele et R. E. Keating, Science **177**, 166 (1972)] ont réalisé une expérience se rapprochant de celle du paradoxe des jumeaux en synchronisant plusieurs horloges atomiques puis en embarquant certaines d'entre elles pour des tours du monde soit vers l'est, soit vers l'ouest. Lorsque les horloges sont de nouveau réunies, on compare les temps mesurés, c'est à dire leurs temps propres.

¹Attention ce n'est $\vec{v} - \vec{V}$ que dans la limite non relativiste !

On donne: vitesse typique d'un avion de ligne par rapport au sol $V = 900$ km/h, rayon terrestre: $R = 6380$ km, durée typique du vol lors de l'expérience: $T_{\text{vol}} = 2\pi R/V = 45$ h.

1/ Par une simple estimation basée sur la dilatation des durées, estimer le décalage temporel entre une horloge au sol et une horloge embarquée dans un avion de ligne, initialement synchronisées. De combien un pilote de ligne rajeunit-il en effectuant 1000 h de vol par an sur une carrière de 30 ans ? Même question pour un étudiant qui fait l'aller-retour Paris-Orsay en RER 200 fois par an pendant 5 ans.

2/ Lors de l'expérience, les horloges voyageant vers l'est sont, comme attendu, en retard par rapport à la sédentaire, mais celles voyageant vers l'ouest sont au contraire en avance, alors que γ ne dépend pas de la direction de la vitesse, mais uniquement de son module. Comment expliquer ce phénomène dans le cadre de la relativité restreinte ?

7 Bon anniversaire

L'astronaute Alice (A) quitte son ami Bob (B) pour un aller-retour vers un système solaire situé à 4 a.l. de la Terre. On suppose que l'aller et le retour s'effectuent à la même vitesse $v = 0.8c$ et on néglige le temps que met A pour faire demi-tour².

1/ Quel est la durée de l'aller du point de vue de A ? de B resté sur Terre ?

2/ A célèbre l'anniversaire de son départ en envoyant chaque année (selon son horloge) un signal vers B . Pour B , quel intervalle de temps sépare la réception de deux signaux successifs envoyés par A durant le voyage aller ? Durant le voyage retour ? Combien de messages B reçoit-il en tout ?

3/ Si B envoie, lui aussi, un signal à destination de A chaque année, combien de messages A va-t-elle recevoir durant la phase aller de son voyage ? Durant la phase retour ? Combien de messages reçoit-elle au total ?

8 Autres exercices et problèmes

Voici quelques exercices qui portent sur le même thème que cette feuille de travaux dirigés et que vous pouvez télécharger en vous reportant sur la page web de l'enseignement:

- * Premier partiel 2014/2015 : problème B (observation radio, corrigé).
- * Partiel 2015/2016 : problème A (contraction des longueurs, non corrigé).
- * Partiel 2018/2019 : problème B (Effet Sagnac, corrigé).
- * Partiel 2019/2020 : problème C (paradoxe du train et du tunnel, corrigé).
- * Examen 2019/2020 : problème A (encore un train et un tunnel, corrigé).
- * Partiel 2020/2021 : problème A (muons cosmiques, non corrigé) et problème C (Photographier n'est pas mesurer, corrigé).
- * Partiel 2021/2022 : problème A (le centre de gravité est-il un concept pertinent en relativité, corrigé) et problème B (train, tunnel et porte, corrigé).

²C. G. Darwin [Nature **180**, 976 (1957)] a utilisé cet exemple pour répondre à un opposant de la théorie de la relativité restreinte.

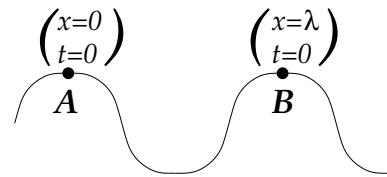
TD de relativité restreinte n° 2

Optique et Collisions

1 Quadri-vecteur d'onde

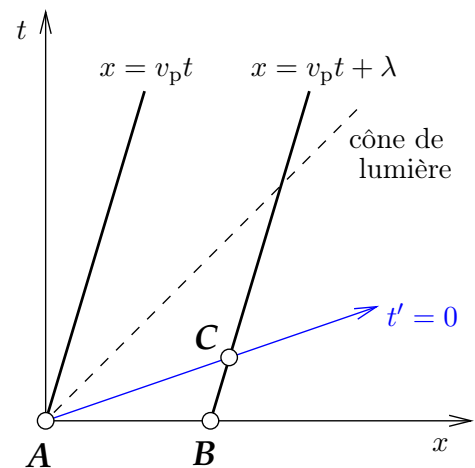
Dans cet exercice nous allons démontrer que pour une onde de pulsation ω , de vecteur d'onde \vec{k} et de vitesse de phase v_p , la quantité $(\omega/c, \vec{k})$ est un "bon" quadri-vecteur. Pour simplifier, nous allons travailler avec une seule dimension d'espace.

Dans le référentiel \mathcal{R} du laboratoire, on définit la longueur d'onde λ comme la distance (usuelle) entre deux évènements simultanés: deux maxima successifs de l'onde (cf. figure ci-contre). Dans \mathcal{R} , les maxima de l'onde se déplacent à la vitesse v_p , vitesse de phase telle que $v_p = \omega/k$.



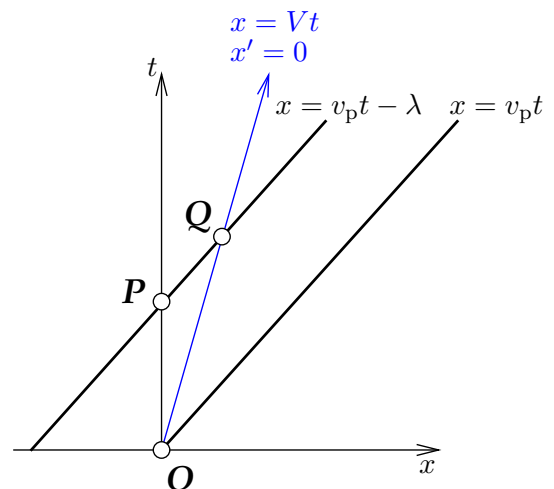
On considère un référentiel \mathcal{R}' se déplaçant à la vitesse V par rapport à \mathcal{R} selon l'axe Ox . On appelle C le maximum plus proche voisin de A qui est simultané avec A dans \mathcal{R}' . Le diagramme d'espace-temps correspondant est tracé sur la figure ci-contre.

Déterminer la coordonnée spatiale de C dans \mathcal{R}' , en déduire la longueur d'onde λ' . En définissant $k' = 2\pi/\lambda'$ et $k = 2\pi/\lambda$, montrer que k' s'exprime à partir de k et ω comme s'y attend pour la composante spatiale d'un quadri-vecteur $(\frac{\omega}{c}, k)$.



Vérifier que la partie temporelle a également la bonne loi de transformation. Pour cela il faudra définir la période comme l'intervalle temporel entre deux évènements (lesquels ?) puis utiliser une démarche similaire à celle qui a été suivie ci-dessus. Pour vous aider, voici un diagramme de Minkowski qui représente dans \mathcal{R} les lignes d'univers de deux maxima successifs de l'onde (le dessin est tracé pour le cas où $V < v_p$)

Indication: Il est clair que la période temporelle dans \mathcal{R} est $T = t_p$. Que vaut la période T' dans \mathcal{R}' ?



2 Mesure de vitesse

Une voiture, assimilée à un miroir, s'éloigne d'un gendarme en ligne droite, à vitesse constante V . Le gendarme émet un rayonnement lumineux de pulsation ω_i qui, après réflexion sur la voiture/miroir, revient vers le gendarme avec une pulsation ω_r . Exprimer ω_r en fonction de ω_i .

Indications : (1) Utiliser le quadri-vecteur d'onde. (2) On notera ω'_i et ω'_r les pulsations dans le référentiel \mathcal{R}' lié au miroir et on justifiera par des arguments physiques que $\omega'_i = \omega'_r$.



U.S. Army soldier using a radar gun to catch speeding violators.

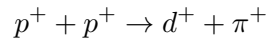
3 Distribution spatiale des photons émis par une source en mouvement

Une source lumineuse émet des photons de manière isotrope dans son référentiel propre \mathcal{R}^* , le nombre dN de photons émis dans un angle solide $d\Omega^*$ s'exprime en fonction du nombre total N_0 de photons émis dans tout l'espace à l'aide de la relation $dN/N_0 = d\Omega^*/(4\pi)$. Cette source est animée d'une vitesse \vec{u} constante par rapport à un référentiel galiléen \mathcal{R} . On appelle dN le nombre de photons émis dans un angle solide $d\Omega$ compris entre les cônes de demi-angle au sommet θ et $\theta + d\theta$, avec θ l'angle que forme la direction du photon émis par rapport à \vec{u} dans le référentiel \mathcal{R} .

Montrer que $dN/N_0 = f(\theta) d\Omega/(4\pi)$, avec $f(\theta)$ une fonction représentant la distribution spatiale de l'émission des photons dans \mathcal{R} que l'on exprimera en fonction de β et θ . Représenter $f(\theta)$ en coordonnées polaires pour $\beta = 1/2$. Montrer alors que la moitié des photons sont émis dans un cône de demi-angle au sommet valant 60° par rapport à \mathcal{R} .

4 Collision inélastique de deux protons

On considère une collision entre deux protons p^+ ($m_p c^2 = 938.25$ MeV) donnant un deutéron d^+ ($m_d c^2 = 1875.56$ MeV) et un méson π^+ ($m_\pi c^2 = 139.6$ MeV):



Quelle est, dans le référentiel du centre de masse \mathcal{R}^* , l'énergie seuil de la réaction ? Calculer, au seuil de réaction, l'énergie du proton projectile dans le référentiel du laboratoire \mathcal{R} où le proton cible est au repos. On donnera l'expression littérale et la valeur numérique.

5 Collision frontale

On étudie la collision élastique frontale d'une particule incidente de masse M et de vitesse $\beta = v/c$ avec une particule immobile de masse m .

1/ Écrire les quadri-vecteurs énergie-impulsion initiaux de chaque particule dans le référentiel du laboratoire.

2/ Construire la transformation de Lorentz qui fait passer du référentiel du laboratoire au référentiel \mathcal{R}^* dans lequel la particule de masse M est au repos. En déduire la quadri-impulsion de chaque particule dans \mathcal{R}^* .

3/ On se place désormais dans le cas limite où $M \gg m$.

- (a) En étudiant la cinématique d'une collision frontale dans \mathcal{R}^* , déterminer sans aucun calcul l'impulsion finale *maximale* de la particule légère.
- (b) En revenant dans le référentiel du labo, montrer alors que l'énergie cinétique finale maximale transférée à la particule légère lors de la collision est

$$K = 2 m c^2 \beta^2 \gamma^2 . \quad (1)$$

6 Collisions élastiques

Une particule de masse m et d'énergie cinétique K entre en collision avec une autre particule, immobile, de masse identique. On notera \vec{e}_x la direction de la particule incidente. À l'issue de la collision, les deux particules ont des énergies inégales, et leur vecteurs vitesses \vec{v}'_1 et \vec{v}'_2 sont *a priori* inégalement inclinés sur la direction de la particule incidente: $\vec{v}'_1 \cdot \vec{e}_x \neq \vec{v}'_2 \cdot \vec{e}_x$. On notera α l'angle entre \vec{v}'_1 et \vec{v}'_2 .

1/ Montrer qu'en mécanique newtonienne $\alpha = \pi/2$.

2/ Montrer qu'en relativité restreinte α est un angle aigu (indication: exprimer $\cos \alpha$ en fonction de γ'_1 et γ'_2). Discuter les limites newtonienne et ultra-relativiste. Montrer que dans le cas d'une collision symétrique ($\vec{v}'_1 \cdot \vec{e}_x = \vec{v}'_2 \cdot \vec{e}_x$) on a :

$$\cos \alpha = \frac{K}{K + 4 m c^2} .$$

7 Cinématique des désintégrations en deux corps

1/ Une particule de masse M et de quadrivecteur énergie-impulsion $\mathcal{P} = (\mathcal{E}/c, \vec{p})$ se désintègre en deux particules de masses m_1, m_2 et de quadrivecteurs $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ (on supposera \vec{p} aligné suivant Oz).

- (a) Donner l'expression des énergies \mathcal{E}_1^* et \mathcal{E}_2^* des particules 1 et 2 et de leur impulsion commune p^* dans le centre de masse de la désintégration.
- (b) Montrer que β_{CM} relatif à la transformation de Lorentz du référentiel du laboratoire à celui du centre de masse est égal à $p_z c / \mathcal{E}$.
- (c) Exprimer \mathcal{E}_1 – énergie de la particule 1 dans le laboratoire – en fonction de $\beta_{\text{CM}}, \mathcal{E}_1^*, p^*$ et de l'angle θ^* que fait dans le centre de masse l'impulsion de la particule 1 avec l'axe des z .
- (d) On suppose la désintégration isotrope dans le centre de masse : $dN/d(\cos \theta^*) = A$ (A constante). Déduire de (c) la distribution $dN/d\mathcal{E}_1$ dans le laboratoire.

2/ Un π^+ se désintègre en vol suivant le mode : $\pi^+ \rightarrow \nu_\mu \mu^+$ ($m_\pi = 140 \text{ MeV}/c^2, m_\mu = 106 \text{ MeV}/c^2$ et $m_\nu = 0 \text{ eV}/c^2$).

- (a) Si l'énergie cinétique K du π^+ est de 140 MeV dans le laboratoire, combien vaut le β_{CM} relatif à la transformation du référentiel du laboratoire à celui du centre de masse ?
- (b) On choisit l'axe des z suivant la ligne de vol du π dans le laboratoire. Soit θ (resp. θ^*) l'angle sous lequel est émis le μ par rapport à cet axe dans le laboratoire (resp. dans le centre de masse). Montrer que

$$\tan \theta = \frac{1}{\gamma_{\text{CM}}} \frac{\sin \theta^*}{\cos \theta^* + \beta_{\text{CM}} \frac{m_\pi^2 + m_\mu^2}{m_\pi^2 - m_\mu^2}} .$$

En déduire que le μ^+ est émis dans le laboratoire dans un cône d'ouverture $\theta_{\text{max}} \simeq 9^\circ$.

8 Autres exercices et problèmes

Voici quelques exercices qui portent sur les même thématiques que celle traitées dans cette feuille de TD et que vous pouvez télécharger en vous reportant sur la page web de l'enseignement:

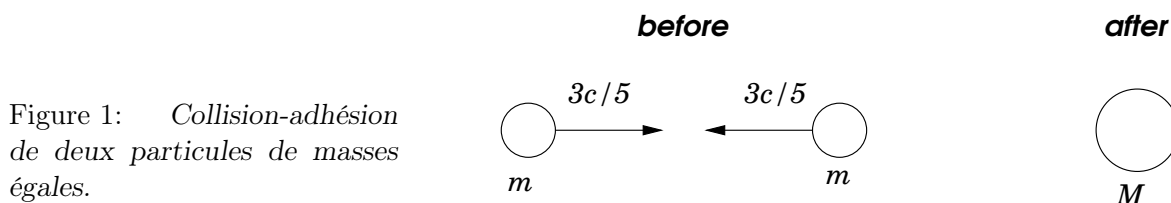
- ★ Partiel 2015/2016 : problème B (collisions, corrigé).
- ★ Partiel 2016/2017 : problème A (optique relativiste, corrigé).
- ★ Examen 2016/2017 : problème A (collisions, corrigé).
- ★ Partiel 2017/2018 : problème A (optique relativiste, corrigé) et problème B (collisions, corrigé).
- ★ Examen 2016/2017 : problème II (Compton inverse, corrigé).
- ★ Partiel 2018/2019 : Exercice A (collision de deux protons, non corrigé).
- ★ Examen 2018/2019 : Exercice A (collision photon – proton, corrigé).
- ★ Partiel 2019/2020 : problème A (optique: élargissement d'une raie, non corrigé) et exercice B (désintégration d'un méson, non corrigé).
- ★ Partiel 2020/2021 : problème B (désintégration d'un Kaon, corrigé).
- ★ Examen 2020/2021 : détail de la cinématique de l'effet Compton (corrigé).
- ★ Partiel 2021/2022 : problème C (perte de masse, corrigé).

TD de relativité restreinte n° 3

Dynamique relativiste

1 Masse = énergie au repos

1/ Deux morceaux d'argile, chacun de masse m ont une collision frontale à la vitesse $3c/5$. Elles se combinent pour former une particule composite (cf. figure ci-dessous). Quelle est la masse M de cette particule ?



2/ An example of bound state is the hydrogen atom. It consists of a positively charged proton and a negatively charged electron, the two being bound together by the electric force. The rest masses of the two particles are respectively: $m_p = 938.3 \text{ MeV}/c^2$; $m_e = 0.5 \text{ MeV}/c^2$. The corresponding binding energy is $\Delta\mathcal{E} = -13.5 \text{ eV}$. Evaluate the rest energy Mc^2 of the hydrogen atom and the relative mass gain $(m_e + m_p - M)/(m_e + m_p)$.

3/ Défaut de masse : une particule α est le noyau d'un atome ${}^4\text{He}$, constitué de deux neutrons et de deux protons. Les différentes masses sont¹ : masse du noyau d'Hélium : 4.0026 u, masse du proton : 1.0073 u, masse du neutron : 1.0087 u. Calculer l'énergie de liaison de la particule α .

Même question pour le noyau ${}^{238}_{92}\text{U}$ dont la masse vaut 238.0022 u. Quelle est l'énergie de liaison électronique totale de cet élément sachant que la masse de l'atome ${}^{238}_{92}\text{U}$ vaut 238.0508 u (on prendra $m_e = 5.49 \times 10^{-4} \text{ u}$) ?

2 Mouvement à accélération propre constante

0/ Préliminaire: On considère un point matériel animé d'une vitesse $v(t)$ dans un référentiel inertiel \mathcal{R} avec une seule dimension d'espace. On définit la quadri-accélération $\underline{A} = d\underline{U}/dt_0$, où \underline{U} est la quadri-vitesse et t_0 le temps propre.

(a) Montrer que dans \mathcal{R} on a :

$$\underline{A} = \gamma \left(\frac{d(\gamma c)}{dt}, \frac{d(\gamma v)}{dt} \right) = \gamma^4 \frac{dv}{dt} \left(\frac{v}{c}, 1 \right) \quad \text{où} \quad \gamma(t) = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}.$$

(b) Définir le référentiel propre² \mathcal{R}_0 du point matériel. Montrer que dans \mathcal{R}_0 la quadri-accélération s'écrit $\underline{A}_0 = (0, a_0)$ où l'accélération propre a_0 s'exprime en fonction des coordonnées dans \mathcal{R} selon $a_0 = \gamma^3 dv/dt$.

¹L'unité u de masse atomique vaut 1/12 de la masse de l'atome de ${}^{12}\text{C}$. $1 \text{ u} = (1/N_A) \text{ g} = 1.6605 \times 10^{-27} \text{ kg} = 931.49 \text{ MeV}/c^2$.

²Meilleure terminologie: le référentiel inertiel comobile à l'instant t .

1/ Un vaisseau spatial quitte la Terre avec une accélération propre a_0 constante à chaque instant. On supposera qu'à l'instant $t = 0$ du référentiel terrestre \mathcal{R} , supposé inertiel, le vaisseau se trouve à l'origine des coordonnées ($x = 0$) avec une vitesse nulle ($v = 0$).

- Donner l'expression de la vitesse $v(t)$ puis de la position $x(t)$ de la fusée dans \mathcal{R} .
- Exprimer le temps t du référentiel terrestre \mathcal{R} en fonction du temps propre t_0 de la fusée, les origines des temps étant communes au moment du départ³.
- Exprimer le temps propre t_0 en fonction de la distance x parcourue par le vaisseau spatial mesurée dans le référentiel \mathcal{R} terrestre.
- On prendra pour unité de temps l'année (a) et pour unité de distance l'année lumière ($a.l.$). Calculer le temps propre t_0 et le temps t correspondant pour un observateur terrestre, pour que la fusée atteigne, en maintenant son accélération propre constante $a_0 = 9,52 \text{ m.s}^{-2}$ (proche de l'accélération de la pesanteur), l'étoile la plus proche du Soleil, Proxima du Centaure, située à $4,25 \text{ a.l.}$. Même question pour atteindre le centre de notre galaxie situé à 30000 a.l. , la galaxie d'Andromède située à $2,2 \times 10^6 \text{ a.l.}$ et enfin pour atteindre les limites observables de notre univers estimées à $15 \times 10^9 \text{ a.l.}$

3 Force de Minkowski

Une généralisation relativiste de la relation fondamentale de la dynamique est l'équation de Minkowski:

$$\frac{dP^\mu}{d\tau} = \mathcal{F}^\mu, \quad (1)$$

où \mathcal{F}^μ est appelée quadri-force. Nous allons dans ce qui suit étudier quelles sont les propriétés de cette quadri-force.

1/ En étudiant la composante spatiale de (1) justifier que l'on puisse noter $\vec{\mathcal{F}} = \gamma \vec{F}$ où \vec{F} est l'analogie de la force newtonienne et $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$.

2/ Montrer que le produit scalaire de $\vec{\mathcal{L}}$ et $\vec{\mathcal{F}}$ est nul. En déduire la relation (quel nom lui donner?)

$$\frac{d}{dt}(m\gamma c^2) = \vec{F} \cdot \vec{v}. \quad (2)$$

3/ On suppose que la force dérive d'un potentiel $V(\vec{r})$. Écrire la conservation de l'énergie totale. Montrer alors que la dynamique du système correspond au lagrangien

$$L(\vec{r}, \vec{v}) = -mc^2 \sqrt{1 - \vec{v}^2/c^2} - V(\vec{r}). \quad (3)$$

Expliquer alors pourquoi le concept de force et de potentiel semble délicat à définir correctement en mécanique relativiste.

4/ D'après la relation d'orthogonalité $\mathcal{F}^\mu U_\mu = 0$ démontrée à la question 2/, la quadri-force ne peut pas être indépendante de la quadri-vitesse. Pour faire au plus simple, on cherche une relation linéaire entre les deux quantités, de la forme $\mathcal{F}^\mu = F^{\mu\nu} U_\nu$ où $F^{\mu\nu}(\vec{r}, t)$ est un "champ tensoriel".

- Montrer alors que la relation d'orthogonalité est vérifiée si $F^{\mu\nu}$ est anti-symétrique sous l'échange de ses indices, ce qu'on supposera désormais.

³On a

$$\int_0^X \frac{dx}{\sqrt{1 + (\alpha x)^2}} = \frac{1}{\alpha} \operatorname{argsh}(\alpha X),$$

où argsh est la fonction réciproque de $\sinh(x) = \frac{1}{2}[\exp(x) - \exp(-x)]$.

(b) On décide alors de paramétrer $F^{\mu\nu}$ sous la forme⁴ :

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c \\ E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Écrire les équations de Minkowski correspondantes. N'avez-vous pas envie de rajouter un paramètre multiplicatif à $F^{\mu\nu}$?

(c) Justifier sans calcul que pour que \mathcal{F}^μ soit un bon quadri-vecteur, $F^{\mu\nu}$ doit avoir des propriétés de transformation spécifiques sous l'effet d'une transformation de Lorentz. Vérifier que tout se passe correctement si lors d'un changement de référentiel $F^{\mu\nu}$ se transforme comme:

$$F'^{\mu\nu} = \Lambda^\mu_\alpha \Lambda^\nu_\beta F^{\alpha\beta}. \quad (5)$$

4 Mouvement d'une particule chargée dans un champ électrique uniforme

Soit un référentiel galiléen \mathcal{R} où règne un champ électrique uniforme et indépendant du temps \vec{E}_S dirigé suivant l'axe Ox . A $t = 0$ une particule chargée est envoyée de l'origine O du repère avec une vitesse initiale \vec{v}_0 parallèle à l'axe Oy .

Etudier le mouvement de cette particule chargée par rapport au référentiel \mathcal{R} et donner l'équation de sa trajectoire. Retrouver l'expression de la trajectoire classique dans l'approximation non relativiste.

5 Synchrotron à protons

Un synchrotron est un accélérateur de particules qui permet de maintenir les particules sur une trajectoire circulaire fixe. Pour cela, une série d'électroaimants créent un champ magnétique \vec{B} uniforme, perpendiculaire au plan de la trajectoire et variant lentement avec le temps de façon à maintenir le rayon R constant pendant toute la montée en énergie des protons dans le cas considéré ici. Ces protons sont accélérés dans une cavité accélératrice où le champ électrique qui leur est appliqué varie avec une fréquence f multiple de la fréquence de rotation ν des protons. On notera $k = K/mc^2$ l'énergie cinétique réduite des protons, avec $mc^2 = 0,938$ GeV pour un proton.

- Pour une valeur de k donnée, exprimer la valeur du champ magnétique B et de la fréquence ν maintenant les protons sur la trajectoire circulaire de rayon R donné.
- On suppose qu'à chaque tour, l'énergie des protons augment d'une quantité ΔE_0 constante. En assimilant la variation d'énergie à une variation continue, établir la loi de variation du champ magnétique B avec le temps. En déduire celle de k et de ν en fonction du temps.
- A.N. : Au Super Proton Synchrotron (SPS) du CERN à Genève, les protons sont injectés avec une impulsion initiale $p_i = 26$ GeV/c, le rayon du synchrotron vaut $R = 1100$ m, $\Delta E_0 = 50$ keV et le champ magnétique final $B_f = 1,21$ T. Calculer l'énergie finale des protons, leur impulsion finale P_f , la durée de la montée en énergie, le nombre de tours effectués, la distance parcourue par les protons pendant cette phase d'accélération et les fréquences extrêmes.

⁴On prend la convention: le premier indice est l'indice de ligne et le second est l'indice de colonne. Attention, les indices varient de 0 à 3 : la colonne d'indice 1 est donc la seconde colonne.

6 Autres exercices et problèmes

Voici quelques exercices qui portent sur les même thématiques que celle traitées dans cette feuille de TD et que vous pouvez télécharger en vous reportant sur la page web de l'enseignement:

- ★ Deuxième examen 2014/2015: problème B (particule dans champ électromag, corrigé).
- ★ Examen 2015/2016: problème A (fusée relativiste, corrigé).
- ★ Examen 2016/2017: problème B (paquets d'électrons, non corrigé).
- ★ Examen 2019/2020: problème C (faisceau laser, corrigé).
- ★ Examen 2021/2022: problème B (voilier cosmique, corrigé).

TD de relativité restreinte n° 4

Electrodynamique relativiste

1 Jauge de Coulomb

On considère une configuration des champs électromagnétiques correspondant aux potentiels $\phi(\vec{r}, t)$ et $\vec{A}(\vec{r}, t)$. Déterminer le champ scalaire $G(\vec{r}, t)$ permettant à la transformation $\phi \rightarrow \phi^* = \phi - \partial_t G$, $\vec{A} \rightarrow \vec{A}^* = \vec{A} + \vec{\nabla} G$ de satisfaire la condition de jauge de Coulomb: $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}^* = 0$.

2 Charge ponctuelle en mouvement rectiligne uniforme

Soit une particule P de charge q qui se déplace selon Ox à la vitesse uniforme $\vec{v} = v \vec{e}_x$ par rapport à un référentiel \mathcal{R} et qui passe à l'origine à l'instant initial. On désigne par \mathcal{R}_0 le référentiel propre associé à cette particule. Soit M un point de coordonnées (x, y, z) dans \mathcal{R} .

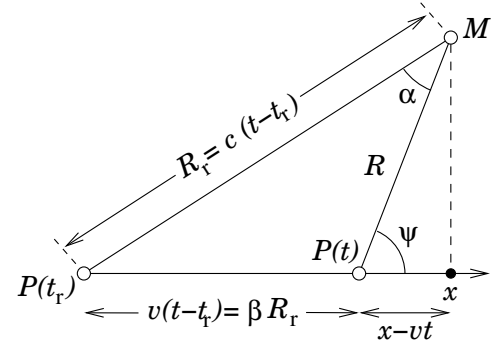
1/ Evaluer dans \mathcal{R}_0 le quadripotential du champ créé en M . En déduire les expressions de \vec{E}_0 et \vec{B}_0 . Exprimer dans \mathcal{R} le quadripotential en fonction de (x, y, z, t) .

2/ On ne considérera plus désormais que le référentiel \mathcal{R} . Démontrer que le potentiel scalaire peut se mettre sous la forme (les notations sont définies sur la figure):

$$\phi(\vec{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R(1 - \beta^2 \sin^2 \psi)^{1/2}}. \quad (1)$$

3/ On désigne par t_r le "temps retardé" qui est défini comme suit: un photon émis par P à l'instant t_r arrive en M à l'instant t . On note $\vec{R}_r = \overrightarrow{P(t_r)M}$. Démontrer que $\sin \alpha = \beta \sin \psi$. En déduire

$$\phi(\vec{r}, t) = \frac{q/4\pi\epsilon_0}{R_r(1 - \hat{R}_r \cdot \vec{\beta})}, \quad \text{où} \quad \begin{cases} \hat{R}_r = \vec{R}_r/R_r, \\ \vec{\beta} = \frac{v}{c} \vec{e}_x. \end{cases}$$

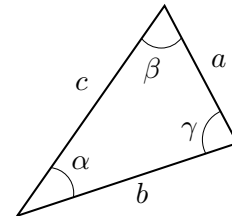


4/ Exprimer \vec{E} en fonction de x, y, z, t . Etudier les variations de E_x et de $E_{y(z)}$ en fonction de $\xi = x - vt$, en particulier pour $\beta \simeq 0$ et pour $\beta \rightarrow 1$. Commenter. Tracer les lignes de champ. Exprimer \vec{B} . Montrer que $\vec{B} = \vec{\beta} \wedge \vec{E}/c = \hat{R}_r \wedge \vec{E}/c$.

Note: Pour répondre à la question 3/ on pourra utiliser la relation géométrique

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma},$$

valable dans le triangle de la figure ci-contre.



3 Un paradoxe électromagnétique

On considère une particule chargée immobile dans un référentiel \mathcal{R} où règne un champ magnétique uniforme et constant $\vec{B} = B_x \vec{e}_x + B_z \vec{e}_z$ (il n'est pas utile de considérer un champ avec également une coordonnée selon \vec{e}_y , le problème est déjà suffisamment général comme ceci).

1/ Quelle force la particule subit-elle ?

2/ Si l'on décide maintenant de travailler dans un référentiel \mathcal{R}' qui se déplace à la vitesse $\vec{V} = V \vec{e}_x$ par rapport à \mathcal{R} la particule n'est plus immobile. Elle devrait donc subir une force... Résoudre ce paradoxe.

4 Force entre deux électrons qui se déplacent côte à côte

Dans le référentiel \mathcal{R} , deux électrons M_1 et M_2 se déplacent côte à côte à vitesse constante v sur deux droites parallèles distantes de d . Soit \mathcal{R}' le référentiel dans lequel ils sont immobiles.

1/ Calculer dans \mathcal{R}' les champs \vec{E}' et \vec{B}' créés par M_1 au point M_2 . En déduire la force qui s'exerce sur M_2 .

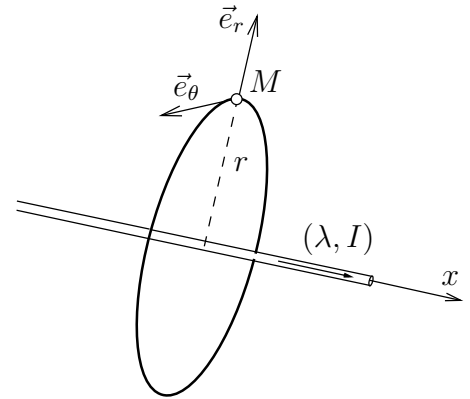
2/ Répondre aux mêmes questions dans \mathcal{R} . On calculera les champs \vec{E} et \vec{B} créés par M_1 au point M_2 de deux manière différentes. On vérifiera la nature covariante de la force de Lorentz.

5 Courant dans un fil

• Démontrer (ou admettre si le temps manque) qu'un fil conducteur infiniment long et fin, assimilé à l'axe Ox , parcouru par un courant I et portant une charge linéique λ , crée, en un point M situé à une distance r du fil, des champs électrique et magnétique ayant pour expression:

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{r} \vec{e}_r, \quad \text{et} \quad \vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{r} \vec{e}_\theta. \quad (2)$$

Dans ces expressions λ et I sont des quantités algébriques, \vec{e}_r et \vec{e}_θ sont définis sur la figure ci-contre et ne dépendent pas du signe de λ ou I .



On considère un fil rectiligne d'axe Ox . Le fil contient des charges positives (des ions) immobiles correspondant à une charge électrique volumique ρ_i et une densité de courant $\vec{J}_i = \vec{0}$. Il y a aussi des électrons (charge ρ_e) se déplaçant à la vitesse $\vec{u} = u \vec{e}_x$ créant une densité de courant $\vec{J}_e = \rho_e \vec{u}$. Le fil étant globalement neutre, la densité totale de charge vaut $\rho = \rho_i + \rho_e = 0$.

1/ le quadri-courant **total** sera noté \underline{J} . Écrire ses composantes dans le référentiel \mathcal{R} dans lequel le fil est immobile.

2/ On considère un référentiel \mathcal{R}' se déplaçant à vitesse constante $V \vec{e}_x$ par rapport à \mathcal{R} . Déterminer les densités de charge et de courant totales dans \mathcal{R}' .

3/ Dans \mathcal{R} une charge test q est immobile à une distance r du fil. Quelle force ressent-elle ?

4/ On va tenter de retrouver ce résultat en travaillant dans le référentiel \mathcal{R}' .

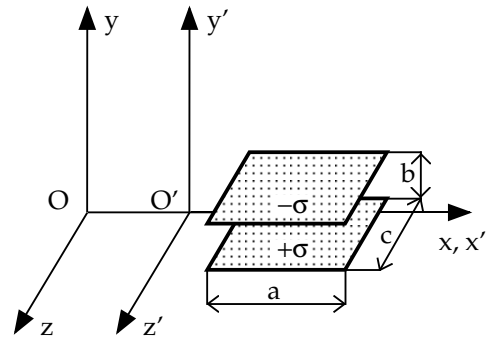
- (a) En utilisant les résultats de la question 1/, déterminer dans \mathcal{R}' les champs \vec{E}' et \vec{B}' créés par le fil. *Indication: on notera S la section du fil. Il est approprié d'introduire la charge linéique du fil dans \mathcal{R}' ($\lambda' = \rho' S$) et le courant $I' = J'_x S$ afin d'utiliser (2).*
- (b) Déterminer, toujours dans \mathcal{R}' , la force induite sur la particule (qui se déplace à vitesse constante dans \mathcal{R}').
- (c) Retrouver le même résultat en utilisant le concept de quadri-force (cf. exercice 3 du TD3) dont on rappelle qu'elle s'exprime comme $\mathcal{F}^\mu = \gamma (\vec{F}_{\text{Lorentz}} \cdot \vec{v} / c, \vec{F}_{\text{Lorentz}})$ où $\vec{F}_{\text{Lorentz}} = q (\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$.

6 Condensateur mobile

Soient deux référentiels d'inertie \mathcal{R} et \mathcal{R}' . Un même événement a pour coordonnées $X^\mu = (ct, x, y, z)$ dans \mathcal{R} et $X'^\mu = (ct', x', y', z')$ dans \mathcal{R}' . L'origine $(0, 0, 0, 0)$ correspond à un même événement dans les deux référentiels. \mathcal{R}' se déplace par rapport à \mathcal{R} avec la vitesse constante \vec{v} parallèle à l'axe Ox (transformation spéciale de Lorentz).

Un condensateur plan ($b \ll a, c$) est immobile dans le référentiel \mathcal{R} . Déterminer le champ \vec{E}' , \vec{B}' dans le référentiel \mathcal{R}' de deux façons différentes :

1. par transformation du champ après avoir déterminé le champ dans le référentiel \mathcal{R} .
2. par un calcul direct en utilisant les théorèmes de Gauss et d'Ampère dans le référentiel \mathcal{R}' . Il faudra déterminer avec un peu de soin les densités de charge et de courant dans ce référentiel.



7 Autres exercices et problèmes

Voici quelques exercices qui portent sur les même thématiques que celle traitées dans cette feuille de TD et que vous pouvez télécharger en vous reportant sur la page web de l'enseignement:

- ★ Examen 2015/2016 : exercice B (Force entre deux faisceaux, non corrigé).
- ★ Examen 2017/2018 : problème III (courant dans un fil, corrigé).
- ★ Examen 2018/2019 : exercice C (transformation d'une onde plane, corrigé).
- ★ Examen 2019/2020 : exercice D (sélecteur de vitesse, corrigé).
- ★ Examen 2020/2021 : Plan chargé en mouvement (corrigé).
- ★ Examen 2021/2022: problème A (Invariants du champ électromagnétique, corrigé).