S3 PMCP 2015/2016 14 décembre 2015

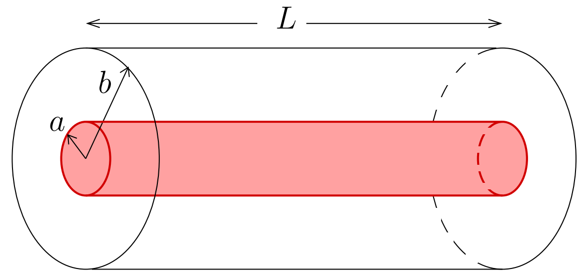
EXAMEN DE THERMODYNAMIQUE

Durée : 2 heures 30

Les documents et les téléphones portables ne sont pas autorisés. Les calculatrices sont autorisées.
Barème approximatif : 1er problème : 10 points ; 2ème problème : 10 points.

A Échauffement laser

On désire étudier la distribution de température créée par un faisceau laser qui traverse un matériau semi-transparent contenu dans un cylindre de rayon b et de longueur L. Le matériau est caractérisé par une conductivité thermique λ. On supposera que la température en son sein varie selon une loi $T(r)$ où r est la distance à l'axe du faisceau laser (la température ne dépend ni du temps, ni de la position le long de l'axe du faisceau, mais seulement de la coordonnée radiale). On notera $\vec{J}_{\rm th} = J(r)\,\vec{e}_r$ la densité de courant thermique.



Le faisceau laser occupe la région grisée sur la figure. Le matériau (incolore sur la figure) remplit **tout** *le cylindre de rayon b et de longueur L.*

1/ Le laser dépose dans le milieu semi-transparent une quantité de chaleur $p(r)$ par unité de temps et de volume. On ne précise pas, dans cette question, l'expression exacte de $p(r)$ qui dépend du profil transverse du faisceau. Dans la suite de l'exercice on étudiera un cas simple [cf. équation (2)] qui correspond à la configuration représentée sur la figure ci-dessus.

En faisant le bilan thermique pour un volume de longueur L, compris entre deux cylindres de rayons r et $r + {\rm d}r$ ($r \in [0, b]$, quelconque), montrer qu'en régime stationnaire $J(r)$ satisfait à l'équation

$$\frac{1}{r}\,\frac{\rm d}{{\rm d}r}\big(rJ\big) = p(r)\ . \tag{1}$$

2/ On considère dans le reste de l'exercice le cas simple

$$p(r) = \begin{cases} p_0 & \text{si} \quad r \leqslant a\ , \\ 0 & \text{si} \quad r > a\ , \end{cases} \qquad \text{où } p_0 \text{ est une constante positive et } 0 < a < b. \tag{2}$$

(a) Calculer la quantité $\mathscr{P}(r) = \iint_{r'<r} p(r')\,{\rm d}^2S'$, quantité de chaleur déposée par le laser par unité de temps et de longueur à l'intérieur d'un cylindre de rayon r. On distinguera les cas $r \leqslant a$ et $a \leqslant r \leqslant b$.

(b) En utilisant (1), exprimer $\mathscr{P}(r)$ en fonction de $J(r)$. En déduire l'expression de $J(r)$ pour tout r dans $[0, b]$.

3/ Rappeler l'expression générale de la loi de Fourier qui relie $\vec{J}_{\rm th}$ et le champ de température.

(a) Le matériau semi-transparent est situé dans un tube de rayon b dont la paroi est maintenue à température constante T_b, de sorte qu'on impose $T(b) = T_b$. Déterminer $T(r)$ pour $a \leqslant r \leqslant b$.

(b) Déterminer $T(r)$ pour $0 \leqslant r \leqslant a$. Tracer l'allure de $T(r)$ pour $0 \leqslant r \leqslant b$.

(c) On donne $p_0 = 4 \times 10^{-4}$ W.mm^{-3}, $a = 1$ mm, $b = 2$ mm et $\lambda = 0.17$ W.m^{-1}.K^{-1}. Quel est l'échauffement $T(0) - T(b)$ au centre du faisceau ?

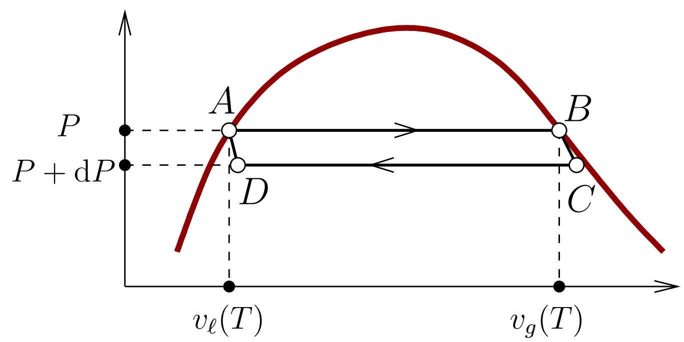
B Clausius-Clapeyron revisité

0/ On considère un **moteur réversible ditherme** fonctionnant entre une source chaude à la température T_2 et une source froide à la température T_1. Au cours d'un cycle (dit cycle de Carnot) le système reçoit une quantité de travail W de l'extérieur et une quantité de chaleur Q_1 (respectivement Q_2) de la part de la source froide (respect. source chaude).

Définir l'efficacité η du moteur et donner son expression en fonction de T_1 et T_2.

1/ Dans le diagramme de Clapeyron $P-v$ (où v est le volume massique) placer la courbe de saturation traduisant l'équilibre entre les phases liquide et gazeuse d'un corps pur. Représenter quelques isothermes d'Andrews et placer la pression de vapeur saturante $P_s(T)$. Localiser la région supercritique, les régions où le système est liquide, gazeux, et la région de coexistence.

2/ On considère le cycle $ABCDA$ représenté sur le schéma ci-contre. Le système est une masse M de la substance correspondant au diagramme de Clapeyron tracé à la question précédente. Les transformations BC et DA sont des isentropiques le long desquelles le système ne reçoit pas de chaleur. On note $T_A = T$, $T_D = T + \mathrm{d}T$, $P_A = P$ et $P_D = P + \mathrm{d}P$ ($\mathrm{d}T$ et $\mathrm{d}P$ sont négatifs).



On note $v_g(T)$ (resp. $v_\ell(T)$) le volume massique du gaz (resp. du liquide) à la coexistence à la température T et $L_\mathrm{v}(T)$ la chaleur latente de vaporisation de la substance.

(a) Montrer, par un raisonnement graphique, que le cycle est moteur. Justifier que c'est un cycle de Carnot.

(b) Calculer la quantité Q_2, chaleur reçue au cours du cycle par le système de la part de la source chaude.

(c) Calculer le travail W reçu au cours d'un cycle par la masse M de substance. Pour ce faire, on assimilera la trajectoire $ABCD$ à un rectangle de largeur $v_g(T) - v_\ell(T)$ et de hauteur $-\mathrm{d}P$. On vérifiera que le signe obtenu pour W est correct.

(d) En utilisant les résultats des questions précédentes, donner l'expression de la relation de Clausius-Clapeyron qui relie $L_\mathrm{v}(T)$, $\mathrm{d}P_s/\mathrm{d}T$, $v_g(T) - v_\ell(T)$ et T.[1]

(e) Déterminer la variation ΔT de la température d'ébullition de l'eau par rapport à sa valeur nominale (à 1.013 bar), lorsqu'on se place à une altitude de 2000 m où la pression atmosphérique est de 0.795 bar. Pour ce faire on supposera que ΔT est faible, on déterminera v_g (la masse molaire de l'eau est $\mathcal{M} = 18$ g), on justifiera qu'on peut négliger v_ℓ dans la relation de Clapeyron et on prendra $L_\mathrm{v} = 2265 \times 10^3$ J.kg^{-1}.

[1] Si vous ne savez pas répondre vous pouvez obtenir le résultat par analyse dimensionnelle et passer à la suite.