S3 PMCP 2016/2017 12 décembre 2016

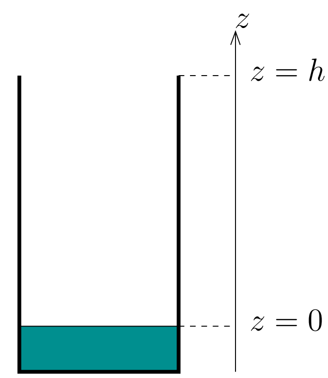
EXAMEN DE THERMODYNAMIQUE

Durée : 2 heures

Les documents et les téléphones portables ne sont pas autorisés. Les calculatrices sont autorisées.
Barème approximatif : 1er exercice = 11 pts ; 2ème exercice = 9 pts.
Si vous êtes bloqués, n'hésitez pas à admettre les résultats intermédiaires et à continuer.

A Évaporation dans un tube

Le fond d'un tube cylindrique vertical (section S) contient de l'eau pure liquide. Le tube est ouvert à son extrémité supérieure et communique avec l'air ambiant. L'origine $z = 0$ des coordonnées est prise à la surface de l'eau, où intervient la vaporisation de l'eau dans les conditions d'équilibre [a]. Le haut du cylindre est à $z = h$, cf. figure ci-contre.



L'eau (vapeur et liquide) et l'air sont maintenus à la température T_0 et à la pression totale P_0. La pression de vapeur saturante de l'eau à la température T_0 est notée $P_s(T_0)$. On note $P(z)$ la pression partielle de la vapeur d'eau à l'altitude z dans le tube. La valeur $P(h)$ au sommet du tube est égale à la pression partielle de la vapeur d'eau dans l'air ambiant qui vaut $\delta \times P_s(T_0)$, où δ (< 1) est le degré hygrométrique de l'air ambiant. La vapeur d'eau, ainsi que l'air, sont considérés comme des gaz parfaits.

a. Bien que l'eau s'évapore graduellement, on va négliger les variations de la masse d'eau liquide et de la hauteur de la surface liquide pendant la durée de l'expérience.

1/ Relier, grâce à l'équation d'état des gaz parfaits, la pression partielle de vapeur d'eau $P(z)$ à la densité volumique molaire de vapeur d'eau $\eta(z)$ [1].

(a) Donner la valeur de la pression partielle $P(0)$ à la surface de l'eau liquide.

(b) Application numérique : calculer $\eta(h)$ et $\eta(0)$. Les données numériques sont fournies en fin d'énoncé.

2/ Il n'y a pas d'accumulation de vapeur à l'intérieur du tube et le régime est donc stationnaire. Quelle est alors la principale propriété du flux de vapeur d'eau à travers une section droite du cylindre ?

(a) On note D le coefficient de diffusion de la vapeur d'eau dans l'air. Écrire la loi de Fick reliant la densité de courant de diffusion molaire [2] de vapeur d'eau $\vec{J} = J(z)\,\vec{e}_z$, à la densité molaire $\eta(z)$.

(b) Montrer qu'à l'intérieur du tube $\eta(z)$ varie linéairement avec z. Tracer son allure.

(c) Exprimer le flux molaire de vapeur d'eau Φ (nombre de moles par unité de temps) en fonction de S, h, δ, D et $\eta(0)$. Faire l'application numérique et exprimer le résultat en mol/jour.

1. $\eta(z)$ est le nombre de moles de vapeur d'eau par unité de volume à l'altitude z.
2. Le flux de $\vec{J}$ à travers une surface est un nombre de moles par unité de temps.

3/ La chaleur latente de vaporisation de l'eau à la température T_0 est notée L_0.

(a) Exprimer la chaleur perdue par l'eau liquide par unité de temps en fonction de la masse molaire $\mathcal{M}$ de l'eau, de Φ et de L_0.

(b) Application numérique : Quelle est la quantité de chaleur évacuée en une heure ?

Données numériques : $T_0 = 315$ K, $P_s(T_0) = 8.4$ kPa, $\delta = 0.25$, $S = 50$ cm^2, $h = 1$ m, $D = 3 \times 10^{-5}$ m^2.s^{-1}, $L_0 = 2.4 \times 10^6$ J.kg^{-1}, $\mathcal{M} = 18$ g.mol^{-1}.

B Volume d'une sphère chargée

On considère une sphère métallique à la température T, la pression P, portée au potentiel φ et portant une charge q. La charge et le potentiel sont reliés par la relation $q = C\,\varphi$ où $C = 4\pi\epsilon_0 R$ est la capacité électrique de la sphère (R est son rayon, et ε_0 est la permittivité du vide).

On rappelle la définition du coefficient de compressibilité isotherme *et, ici, isopotentiel,* de la sphère : $\chi_T = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_{T,\varphi}$. Ce coefficient est supposé constant (indépendant de T, P et φ).

1/ Le travail électrique reçu, de manière réversible, par la sphère lors d'une variation dq de sa charge est $\delta W^{(\mathrm{rev})}_{\text{élec}} = \varphi\,\mathrm{d}q$.

(a) Rappeler l'expression du travail $\delta W^{(\mathrm{rev})}_{\mathrm{press}}$ reçu par la sphère de la part des forces de pression lorsque le volume de la sphère varie de dV de manière réversible.

(b) Exprimer la chaleur reçue de manière réversible $\delta Q^{(\mathrm{rev})}$ lors d'une transformation élémentaire en fonction des variables thermodynamiques appropriées.

(c) En déduire pour ce système une version de l'identité thermodynamique qui permet d'exprimer la variation d'énergie interne dU de la sphère en fonction des variations dV, dq et dS.

2/ On définit la fonction thermodynamique "enthalpie libre généralisée" $G = U + PV - TS - \varphi q$.

(a) Écrire la forme correspondante de l'identité thermodynamique.

(b) Démontrer une relation de Maxwell entre $(\partial V/\partial\varphi)_{T,P}$ et $(\partial q/\partial P)_{T,\varphi}$.

(c) En déduire l'expression

$$\left(\frac{\partial V}{\partial \varphi}\right)_{T,P} = \frac{4\pi}{3}\,\varepsilon_0\,R\,\varphi\,\chi_T\ . \tag{1}$$

3/ La sphère, initialement reliée à la Terre, est portée (à température T et pression P fixées) à un potentiel $\varphi_{\mathrm{m}} = 10^6$ V. Calculer la variation relative de volume $\Delta V/V$ correspondante. Donner sa valeur numérique en prenant $R = 1$ cm, $\chi_T = 10^{-11}$ Pa et $\varepsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}$ USI. On pourra faire une hypothèse simplificatrice (qu'on justifiera *a posteriori*) qui permet de faciliter l'intégration conduisant au résultat.