EXAMEN PARTIEL de RELATIVITÉ

Durée : 2 heures

Les calculatrices sont autorisées. Barème approximatif : A = 13 pts ; B = 7 pts.

Formulaire – Rappel de cours

On considère deux référentiels inertiels $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$. $\mathcal{R}'$ est animé par rapport à $\mathcal{R}$ d'un mouvement de translation rectiligne uniforme à la vitesse $\vec{V} = V\,\vec{e}_z$. Si un quadri-vecteur a pour coordonnées respectives $\underset{\sim}{A}$ et $\underset{\sim}{A}'$ dans $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$, on a $A'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}\, A^{\nu}$ avec

$$\Lambda^{\mu}{}_{\nu} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \quad , \quad \text{où} \quad \beta = V/c \quad \text{et} \quad \gamma = (1-\beta^2)^{-1/2} \; .$$

- Pour inverser la relation entre $\underset{\sim}{A}$ et $\underset{\sim}{A}'$ il suffit de changer le signe de β dans l'expression ci-dessus.
- Une règle de longueur L au repos et colinéaire à $\vec{e}_z$ dans $\mathcal{R}$ aura, dans $\mathcal{R}'$, une longeur $L' = L/\gamma$.

A Anisotropie Doppler du fond cosmique

L'espace intersidéral (lié à un référentiel $\mathcal{R}$) baigne dans un rayonnement cosmologique caractérisé par une distribution de photons qui suit la loi de Planck : le nombre d^3N de photons contenus dans un volume $\mathcal{V}$ et dont l'impulsion vaut $\vec{p}$ à d^3p près est $\mathrm{d}^3N = F(\vec{p})\mathrm{d}^3p$ avec

$$F(\vec{p}) = \frac{1}{4\pi^3}\,\frac{\mathcal{V}}{\hbar^3}\,\frac{1}{\exp(c\,p/k_B T) - 1} \; , \quad \text{où} \quad p = |\vec{p}\,| \; . \tag{A1}$$

Les relevés les plus récents donnent $T = 2{,}728$ K.

On veut obtenir l'expression correspondante pour un observateur terrestre. On considère donc deux référentiels inertiels : $\mathcal{R}$ (lié au cosmos) et $\mathcal{R}'$ (lié à la Terre). $\mathcal{R}'$ est animé par rapport à $\mathcal{R}$ d'un mouvement de translation rectiligne uniforme à la vitesse $\vec{V} = V\,\vec{e}_z$.

1/ Exprimer les composantes de la quadri-impulsion $\underset{\sim}{P}$ d'un photon dans $\mathcal{R}$ en fonction de ses composantes dans $\mathcal{R}'$.

2/ On note θ et ϕ les angles polaires[1] de l'impulsion $\vec{p}$ dans $\mathcal{R}$ (et des notations similaires dans $\mathcal{R}'$). Déduire de la question précédente que

$$\phi = \phi' \quad \text{et que} \quad \cos\theta = \frac{\cos\theta' + \beta}{1 + \beta\cos\theta'} \; . \tag{A2}$$

Exprimer également $p = |\vec{p}\,|$ en fonction de $p' = |\vec{p}\,'|$ et de $\cos\theta'$.

3/ En écrivant l'élément d'intégration dans l'espace des impulsions sous la forme $\mathrm{d}^3p = p^2\mathrm{d}p\,\mathrm{d}(-\cos\theta)\mathrm{d}\phi$ montrer alors que $\mathrm{d}^3p/\mathrm{d}^3p' = \gamma(1+\beta\cos\theta')$.

[1] Les notations suivent les conventions usuelles : θ est l'angle entre $\vec{p}$ et $\vec{e}_z$ ($\theta \in [0,\pi]$), ϕ est l'angle polaire de la projection de $\vec{p}$ dans le plan xOy ($\phi \in [0, 2\,\pi]$).

4/ Distribution des impulsions dans $\mathcal{R}'$:

(a) En tenant compte de la contraction des longueurs, donner la relation entre le volume $\mathcal{V}$ et le volume correspondant $\mathcal{V}'$ dans $\mathcal{R}'$.

(b) Donner l'expression de la distribution $F'(\vec{p}')$ observée dans $\mathcal{R}'$ en fonction de $\mathcal{V}'$, p' et de $\cos\theta'$.

(c) Montrer que $F'(\vec{p}')$ se met sous la forme d'un terme angulaire (terme d'aberration, indépendant de p') multiplié par une distribution de Planck ayant une température non isotrope $T'(\theta')$ dont on donnera l'expression en fonction de T, θ' et des paramètres du problème.

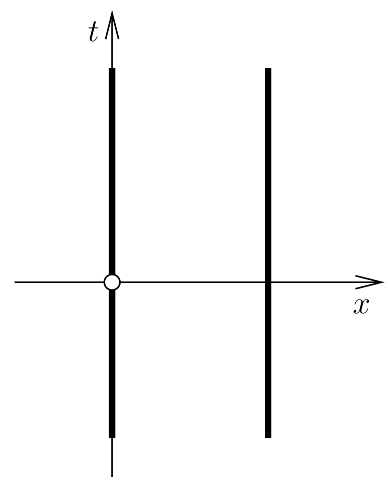
5/ On observe une légère anisotropie du rayonnement reçu sur Terre, d'amplitude maximale $\pm 3{,}358$ mK. Quel signe correspond selon vous à quelle direction d'observation ? En faisant la différence entre ces deux directions extrémales, obtenir une expression[2] de la vitesse V. Donner le résultat en km/s.

B À la porte du garage ♪ ♫ ..

Han Solo est dans son vaisseau et se dirige à vitesse constante V vers son hangar d'entretien à l'entrée duquel se tient Chewbacca. On note $\mathcal{R}$ le référentiel de Chewbacca et $\mathcal{R}'$ le référentiel de Han. Les deux référentiels sont supposés inertiels. Le hangar a une longueur L_{h}=30 m, et la longueur au repos du vaisseau[3] est L'_{v}=34,75 m, mais Chewbacca a calculé que la contraction des longueurs permettra au vaisseau de rentrer exactement dans le hangar.

1/ Quelle est la vitesse du vaisseau ?

2/ On considère le diagrame d'espace-temps ci-contre où sont déjà reportées en gras les lignes d'univers du fond et de la porte du hangar (le diagramme est tracé dans le référentiel $\mathcal{R}$ de Chewbacca). La porte du hangar est en $x = 0$ et le fond du hangar correspond à $x = L_{\mathrm{h}}$.
Chewbacca ferme la porte lorsque le vaisseau est complètement entré dans le hangar. Cet évènement sera pris comme évènement origine dans les deux référentiels.
Reproduisez le diagramme sur votre copie et ajoutez-y les lignes d'univers de l'avant et de l'arrière du vaisseau.



3/ On cherche à déterminer la position de l'avant du vaisseau vue par Han et par Chewbacca au moment où la porte se ferme.

(a) Sur le schéma précédent, placer l'évènement donnant la position de l'avant du vaisseau à l'instant origine selon Chewbacca (on le notera $\underset{\sim}{B}$) et selon Han (on le notera $\underset{\sim}{C}$)[4].

(b) Exprimer la position du fond du hangar dans $\mathcal{R}'$ à $t' = 0$. Faire l'application numérique et calculer alors de combien, selon Han, le vaisseau s'est enfoncé dans le mur du fond du hangar au moment où la porte se ferme.

[2]On pourra faire (en les justifiant) des approximations non-relativistes.
[3]Source : `https://fr.wikipedia.org/wiki/Faucon_Millenium`
[4]On pourra placer $\underset{\sim}{C}$ de manière approximative, mais un bonus est associé à l'explication d'une construction graphique simple (qu'il n'est pas nécessaire de réaliser précisément sur la figure).