$$\boxed{\pi_0 \to \gamma + \gamma}$$

(A)

on note $\underset{\sim}{P}$ la quadri-impulsion du π_0 - $\underset{\sim}{P} = \underset{\sim}{Q_1} + \underset{\sim}{Q_2}$

en élevant au carré =
$$m_0^2 c^2 = 2\, \underset{\sim}{Q_1} \cdot \underset{\sim}{Q_2} = 2\left(\frac{E_{\gamma_1} E_{\gamma_2}}{c^2} - \vec{q}_1 \cdot \vec{q}_2\right)$$
$$= 2\, q_1 q_2 \underbrace{(1 - \cos \Theta)}_{2\sin^2 \frac{\Theta}{2}}$$

$$\boxed{m_0^2 c^2 = 4 q_1 q_2 \sin^2 \frac{\Theta}{2}}$$ donc Θ n'est jamais nul et bien-sûr $\Theta < \pi$.

2/ la conservation de l'impulsion impose $\theta_2^* = \pi + \theta_1^*$ et également $q_1^* = q_2^*$. La conservation de l'énergie s'écrit $m_0 c^2 = \mathcal{E}_{\gamma_1}^* + \mathcal{E}_{\gamma_2}^* = 2 c q_1^*$
donc $q_1^* = q_2^* = m_0 c/2$ (c'est $\Leftrightarrow$ à la relation ci-dessus encadrée où $\Theta = \pi$)

Dans le CdM l'état initial n'est caractérisé que par l'énergie $m_0 c^2$, il n'y a pas de grandeur vectorielle (impulsion ou spin) par rapport à laquelle repérer une direction dont dépendrait la distribution angulaire = $\dfrac{dN}{d\Omega_1^*} = C^{ste}$

3/
$$\begin{pmatrix} \text{quadri} \\ \text{vct} \\ \text{dans} \\ \mathcal{R} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & +\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ +\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{quadri} \\ \text{vct} \\ \text{dans} \\ \mathcal{R}^* \end{pmatrix}$$
où $\gamma = \mathcal{E}/m_0 c^2$ et $\beta = \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}}$

on a donc $\underbrace{\mathcal{E}_{\gamma_1}/c}_{q_1} = \gamma\left(\dfrac{\mathcal{E}_{\gamma_1}^*}{c} + \beta q_{1z}^*\right)$ où $\begin{cases} \mathcal{E}_{\gamma_1}^* = c\, q_1^* = \frac{1}{2} m_0 c^2 \\ q_{1z}^* = q_1^* \cos \theta_1^* = \frac{1}{2} m_0 c \cos \theta_1^* \end{cases}$

cela donne $q_1 = \dfrac{m_0 c}{2} \gamma (1 + \beta \cos \theta_1^*)$
et bien-sûr $q_2 = \dfrac{m_0 c}{2} \gamma (1 - \beta \cos \theta_1^*)$
en comparant avec la formule encadrée ci-dessus cela donne =
$$1 = \gamma^2 (1 - \beta^2 \cos^2 \theta_1^*) \sin^2 \frac{\Theta}{2}$$

soit
$$\boxed{\cos \theta_1^* = \frac{1}{\beta} \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2 \sin^2 \frac{\Theta}{2}}}}$$

(B)

en différentiant cela donne :

$$d(\cos\theta_1^*) = \frac{1}{2\beta}\left[1 - \frac{1}{\gamma^2 \sin^2\frac{\Theta}{2}}\right]^{-1/2} \frac{-1}{\gamma^2}(-2)\sin^{-3}\frac{\Theta}{2}\,\frac{\cos\Theta/2}{2}\,d\Theta$$

$$= +\frac{1}{2\beta\gamma^2}\,\frac{\cos\Theta/2}{\sin^2\Theta/2}\,\frac{1}{\sqrt{\sin^2\frac{\Theta}{2} - \frac{1}{\gamma^2}}}\,d\Theta$$

(ici on a bien-sûr la valeur absolue du Jacobien)

on a bien-sûr $\varphi = \varphi_1^*$ et donc

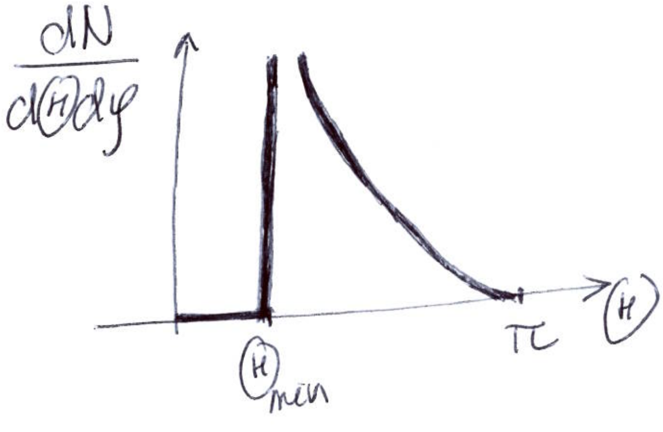
$$\frac{dN}{d\Theta\, d\varphi} = \underbrace{\frac{dN}{d(-\cos\theta_1^*)\,d\varphi_1^*}}_{C} \left|\frac{d(-\cos\theta_1^*)}{d\Theta}\right| = \frac{C}{2\beta\gamma}\,\frac{\cos\Theta/2}{\sin^2\frac{\Theta}{2}\sqrt{\gamma^2\sin^2\frac{\Theta}{2} - 1}}$$

il faut donc que $\sin\frac{\Theta}{2} > \frac{1}{\gamma} = \frac{m_0c^2}{\mathcal{E}}$

donc $\Theta_{min} = 2\arcsin\gamma^{-1}$ - $\begin{cases}\Theta_{min} \simeq \pi \text{ à basse énergie } (\mathcal{E} \simeq m_0c^2) \\ \Theta_{min} \simeq 0 \text{ à haute énergie}\end{cases}$

et $\boxed{\mathcal{E} = \frac{m_0c^2}{\sin\frac{\Theta_{min}}{2}}}$

la distribution a l'allure :



pour $\Theta_{min} = 25^\circ$
on obtient

$$\mathcal{E} = \frac{m_0c^2}{\sin(12^\circ5)} = 624 \text{ MeV}$$