L3 et Magistère 1$^{\text{ère}}$ année 12 mai 2017

EXAMEN de RELATIVITÉ

Durée : 2 heures et 30 mns

Les calculatrices sont autorisées. Barème approximatif : A = 10 pts ; B = 10 pts.

Formulaire – Rappel de cours

On considère deux référentiels inertiels $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$. $\mathcal{R}'$ est animé par rapport à $\mathcal{R}$ d'un mouvement de translation rectiligne uniforme à la vitesse $\vec{V} = V\,\vec{e}_z$. Si un quadri-vecteur a pour expressions respectives $\underset{\sim}{A}$ et $\underset{\sim}{A}'$ dans $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$, on a $A'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}\,A^{\nu}$ avec

$$\Lambda^{\mu}{}_{\nu} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \quad , \quad \text{où} \quad \beta = V/c \quad \text{et} \quad \gamma = (1-\beta^2)^{-1/2}\ . \tag{F1}$$

• Pour inverser la relation entre $\underset{\sim}{A}$ et $\underset{\sim}{A}'$ il suffit de changer le signe de β dans l'expression ci-dessus.

A Désintégration d'une particule neutre en deux photons

Dans le référentiel $\mathcal{R}$ du laboratoire une particule neutre, de spin nul, de masse m_0 (un pion π_0, de masse $m_0 = 135$ MeV/c^2) et d'impulsion qu'on prendra colinéaire à $0z$, se désintègre en donnant naissance à deux photons d'impulsions $\vec{q}_1$ et $\vec{q}_2$.

1/ On travaille dans $\mathcal{R}$. Établir, à l'aide la la conservation de la quadri-impulsion (et en particulier de sa pseudo-norme) lors de la désintégration, une relation entre la masse m_0 du pion, les modules q_1 et q_2 des impulsions des deux photons et l'angle d'ouverture Θ entre leurs directions (cf. schéma ci-dessous, à gauche). En déduire que cet angle n'est jamais nul. Pouvez-vous, d'après le schéma, déterminer sans calcul quelle est sa valeur maximale ?

2/ Dans cette question on travaille dans le référentiel propre $\mathcal{R}^*$ du pion.

(a) Le photon 1 est émis dans une direction formant l'angle θ_1^* avec la direction du pion dans $\mathcal{R}$ (cf. schéma ci-dessus, à droite). Quelle est la direction θ_2^* d'émission du photon 2 ?

(b) Exprimer les normes q_1^* et q_2^* des impulsions des photons en fonction de m_0.

(c) Au cours de N désintégrations on détecte $\mathrm{d}N$ photons émis dans l'angle solide $\mathrm{d}\Omega_1^*$. Justifier que la distribution angulaire des photons émis ne peut être qu'isotrope, autrement dit que $\mathrm{d}N/\mathrm{d}\Omega_1^*$ est une constante C indépendante de la directions repérée par θ_1^* et φ_1^*.

3/ Retour au référentiel $\mathcal{R}$ du laboratoire.

(a) On note $\mathcal{E}$ l'énergie du pion dans $\mathcal{R}$. Donner, en fonction de $\mathcal{E}$, l'expression des facteurs γ et β qui permettent de passer de $\mathcal{R}$ à $\mathcal{R}^*$.

(b) Donner, en passant des quadri-impulsions des photons dans $\mathcal{R}^*$ vers celles dans $\mathcal{R}$, l'expression des normes q_1 et q_2 en fonction de θ_1^*, β, γ et m_0. En comparant ces expressions avec la relation obtenue à la question 1/, montrer que

$$\cos\theta_1^* = \frac{1}{\beta}\sqrt{1-\frac{1}{\gamma^2\sin^2\frac{\Theta}{2}}}\ .$$

(c) Sachant que $\mathrm{d}N = C\,\mathrm{d}(-\cos\theta_1^*)\mathrm{d}\,\varphi_1^*$, déterminer l'expression de la distribution[1] $\mathrm{d}N/\mathrm{d}\Theta\,\mathrm{d}\varphi$.

(d) Montrer que la distribution $\mathrm{d}N/\mathrm{d}\Theta\,\mathrm{d}\varphi$ est caractérisée par un angle d'ouverture minimal $\Theta_{\min}$ et tracer son allure en fonction de l'angle d'ouverture Θ. En déduire que cette distribution permet de calculer l'énergie initiale $\mathcal{E}$ du pion. Donner la valeur de $\mathcal{E}$ lorsque $\Theta_{\min} = 25°$.

B Paquets d'électrons

Dans un anneau synchrotron, on obtient un rayonnement fortement focalisé et cohérent grâce à l'accélération de paquets d'électrons groupés. On s'intéresse ici à l'évolution d'un paquet d'électrons dans le référentiel $\mathcal{R}$ du centre de masse du paquet puis dans le référentiel $\mathcal{R}'$ du laboratoire. La vitesse de $\mathcal{R}'$ par rapport à $\mathcal{R}$ est $\vec{V} = V\,\vec{e_z}$.
La masse d'un électron du paquet est notée m, sa charge q et sa vitesse dans $\mathcal{R}$ est $\vec{u}$. On notera $\gamma_u = (1-\vec{u}^{\,2}/c^2)^{-1/2}$ le facteur de Lorentz associé. Dans $\mathcal{R}$ l'énergie totale de l'électron sera notée $\mathcal{E}$ et son impulsion $\vec{p}$.

1/ On commence par établir l'expression de la quadriforce $\underset{\sim}{F}$ d'un électron du paquet dans $\mathcal{R}$. On note $\vec{f} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}$ la force qui s'exerce sur l'électron dans $\mathcal{R}$.

(a) Rappeler l'expression de la quadri-impulsion $\underset{\sim}{P}$ de l'électron en fonction (i) de m, γ_u et $\vec{u}$, puis (ii) de $\mathcal{E}$ et $\vec{p}$. Déduire de (ii) une expression de $\mathrm{d}\underset{\sim}{P}/\mathrm{d}t$. Justifier que $\underset{\sim}{P}\cdot\mathrm{d}\underset{\sim}{P}/\mathrm{d}t = 0$, puis que $\mathrm{d}\mathcal{E}/\mathrm{d}t = \vec{f}.\vec{u}$.

(b) Déduire du résultat précédent que la quadriforce $\underset{\sim}{F} = \mathrm{d}\underset{\sim}{P}/\mathrm{d}\tau$ (où τ est le temps propre de l'électron) s'exprime comme

$$\underset{\sim}{F} = \gamma_u\left(\frac{1}{c}\vec{f}.\vec{u}\,,\vec{f}\right)\ . \tag{B1}$$

[1]Lorsqu'on passe de la première distribution à la seconde, c'est bien-sûr la valeur absolue du jacobien qui intervient.

2/ On supposera désormais que

$$u/c \ll 1 \quad \text{et} \quad u \ll V\ . \tag{B2}$$

On va tirer de (B2) des conséquences qui devront être utilisées dans tout le reste du problème.

(a) Donner une approximation simple de γ_u. Justifier alors que la quadri-force dans $\mathcal{R}$ a pour expression $\underset{\sim}{F} \simeq (0, \vec{f}\,)$.

(b) Justifier rapidement que la vitesse $\vec{u}\,'$ d'un électron dans $\mathcal{R}'$ peut s'écrire $\vec{u}\,' \simeq -\vec{V}$. En déduire une relation simple entre les facteurs de Lorentz $\gamma_{u'}$ (pour l'électron dans $\mathcal{R}'$) et γ (qui caractérise le changement de référentiel, cf. sa définition (F1) dans le formulaire). Donner alors la forme approchée de l'expression (B1) de la quadri-force $\underset{\sim}{F}'$ dans $\mathcal{R}'$ en fonction de $\vec{f}'$, γ et $\vec{V}$.

3/ Dans $\mathcal{R}$, on considère un paquet d'électrons sphérique de centre O (origine de $\mathcal{R}$). On suppose que le champ électrique associé est à symétrie sphérique et indépendant du temps, et qu'il n'y a pas de champ magnétique.

(a) Quelle est la direction et le sens de la force $\vec{f}$ s'exerçant sur un électron du paquet ? (faire un schéma).

Dans la suite, on utilisera $\vec{f}_\perp$ et $\vec{f}_\parallel$, les contributions à $\vec{f}$ perpendiculaires et parallèles à $\vec{e}_z$, telles que $\vec{f} = \vec{f}_\parallel + \vec{f}_\perp$.

(b) Écrire la transformation de Lorentz donnant $\underset{\sim}{F}'$, la quadriforce de l'électron dans $\mathcal{R}'$, en fonction de $\underset{\sim}{F}$. Exprimer alors $\vec{f}'_\parallel$ en fonction de $\vec{f}_\parallel$ et $\vec{f}'_\perp$ en fonction de $\vec{f}_\perp$.

(c) On se place dans le cas ultra-relativiste où la vitesse V est proche de celle de la lumière. Comment va alors évoluer le paquet d'électrons dans $\mathcal{R}'$?

4/ On note $\vec{E}'$ et $\vec{B}'$ les champs électrique et magnétique générés par le paquet d'électrons dans $\mathcal{R}'$.

(a) Exprimer $\vec{f}'$ la force s'exerçant sur un électron dans $\mathcal{R}'$ en fonction de $\vec{E}'$ et $\vec{B}'$.

(b) Sachant que $\vec{B}' = -\dfrac{\vec{V} \wedge \vec{E}'}{c^2}$ et que $\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}\,) = (\vec{a} \cdot \vec{c}\,)\,\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}\,)\,\vec{c}$, exprimer $\vec{f}'$ en fonction de $\vec{E}'_\parallel$ et $\vec{E}'_\perp$ (contributions parallèle et perpendiculaire à $\vec{e}_z$ avec $\vec{E}' = \vec{E}'_\parallel + \vec{E}'_\perp$).

(c) En comparant avec les lois de transformation établies en **3/**(b), donner la loi de transformation qui permet de passer de $\vec{E}$ dans $\mathcal{R}$ à $\vec{E}'$ dans $\mathcal{R}'$.