Chern - Simons

invariance de jauge de l'action = pour le terme $\int A_\mu J^\mu \frac{d^3X}{c}$ cela a été vu en cours
Pour l'autre terme : lors de la transf. $A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu G$ il devient

$$\frac{\kappa}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho}(A_\mu+\partial_\mu G)(\partial_\nu A_\rho + \partial_\nu\partial_\rho G) = \frac{\kappa}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho}A_\mu\partial_\nu A_\rho + \frac{\kappa}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho}\partial_\mu G\,\partial_\nu A_\rho$$

(car $\epsilon^{\mu\nu\rho}\partial_\nu\partial_\rho G = 0$ = contraction sym - antisym)

(on a utilisé $\epsilon^{\mu\nu\rho}\partial_\mu\partial_\nu A_\rho = 0$)

$$= \frac{\kappa}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho}A_\mu\partial_\nu A_\rho + \underbrace{\frac{\kappa}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho}\partial_\mu(G\partial_\nu A_\rho)}_{\text{tri-divergence = ne contribue pas.}}$$

Donc, bien que cela ne soit pas évident d'après la forme de $\mathcal{L}_{CS}$, l'action de Chern-Simons est en pratique invariante de jauge.

2/ $$\frac{\partial\mathcal{L}_{CS}}{\partial(\partial_\alpha A_\beta)} = \frac{\kappa}{2}\epsilon^{\mu\alpha\beta}A_\mu \quad \text{et} \quad \frac{\partial(\mathcal{L}_{CS}+\mathcal{L}_{int})}{\partial A_\beta} = \frac{\kappa}{2}\epsilon^{\beta\nu\rho}\partial_\nu A_\rho - J^\beta$$

l'éq. d'Euler-Lagrange $\partial_\alpha\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha A_\beta)}\right] = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_\beta}$ s'écrit donc

$$\frac{\kappa}{2}\epsilon^{\mu\alpha\beta}\partial_\alpha A_\mu = \frac{\kappa}{2}\epsilon^{\beta\nu\rho}\partial_\nu A_\rho - J^\beta$$

soit, en renommant les indices et en utilisant $\epsilon^{\mu\alpha\beta} = \epsilon^{\beta\mu\alpha}$

$$J^\beta = \frac{\kappa}{2}\epsilon^{\beta\nu\rho}\partial_\nu A_\rho - \frac{\kappa}{2}\epsilon^{\beta\nu\rho}\partial_\rho A_\nu \quad : \quad \boxed{J^\beta = \frac{\kappa}{2}\epsilon^{\beta\nu\rho}F_{\nu\rho}}$$

$$F_{01} = \partial_0 A_1 - \partial_1 A_0 = -\frac{1}{c}\partial_t A_x - \partial_x\Phi/c = E_x/c$$
$$F_{02} = \partial_0 A_2 - \partial_2 A_0 = -\frac{1}{c}\partial_t A_y - \partial_x\Phi/c = E_y/c$$
$$F_{12} = \partial_1 A_2 - \partial_2 A_1 = -\partial_x A_y + \partial_y A_x = -B$$

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x/c & E_y/c \\ -E_x/c & 0 & -B \\ -E_y/c & B & 0 \end{pmatrix}$$

$${}^*F^\mu = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho}F_{\nu\rho} \qquad \begin{cases} {}^*F^0 = \frac{1}{2}\left(\epsilon^{012}F_{12} + \epsilon^{021}F_{21}\right) = \epsilon^{012}F_{12} = -B \\ {}^*F^1 = \epsilon^{120}F_{20} = -E_y/c \\ {}^*F^2 = \epsilon^{201}F_{01} = E_x/c \end{cases}$$

l'éq. du mouvement se met sous la forme $J^\beta = \kappa\, {}^*F^\beta$ soit : $\begin{cases} c\rho = -\kappa B \\ J_x = -\kappa E_y/c \\ J_y = \kappa E_x/c \end{cases}$

on remarque que toute particule de charge q est associée à $\rho(\vec{r},t) = q\,\delta^{(2)}(\vec{r}-\vec{\xi}(t))$ et donc à un tube de flux : $B(\vec{r},t) = -\frac{cq}{\kappa}\delta^{(2)}(\vec{r}-\vec{\xi}(t))$

on a $\vec{J}\cdot\vec{E} = 0$: $\vec{E}$ est $\perp$ au courant = c'est le champ de Hall! (transverse)

on a $\partial_\beta {}^*F^\beta = \frac{1}{2}\left[\epsilon^{\beta\nu\rho}\partial_\beta\partial_\nu A_\rho - \epsilon^{\beta\nu\rho}\partial_\beta\partial_\rho A_\nu\right] = 0$

l'égalité $\partial_\beta {}^*F^\beta = 0$ s'écrit $\partial_0 {}^*F^0 + \partial_1 {}^*F_1 + \partial_2 {}^*F_2 = 0$

soit $-\frac{1}{c}\partial_t B + \partial_x(-E_y/c) + \partial_y(E_x/c) = 0$

càd $-\partial_t B = \partial_x E_y - \partial_y E_x = \left.\vec{\nabla}\wedge\vec{E}\right)_z$

c'est l'éq. de Maxwell-Faraday. Comme dans l'électrodyn. usuelle ce n'est pas une conséquence des éqs. du mvt, mais seulement de l'antisym. de $F_{\nu\rho}$ et, en fait, de l'existence d'un (tri)-potentiel A_μ

comme $\partial_\beta {}^*F^\beta = 0$, l'éq. du mvt $J^\beta = \kappa\,{}^*F^\beta$ implique immédiatement la conservation du courant.

$$\epsilon^{\alpha\beta\gamma}\,{}^*F_\gamma = \frac{1}{2}\epsilon^{\alpha\beta\gamma}\epsilon_{\gamma\mu\nu}F^{\mu\nu} \qquad \epsilon^{\gamma\alpha\beta}\epsilon_{\gamma\mu\nu} = \delta^\alpha_\mu\delta^\beta_\nu - \delta^\alpha_\nu\delta^\beta_\mu$$

donc $\epsilon^{\alpha\beta\gamma}\,{}^*F_\gamma = \frac{1}{2}\left(F^{\alpha\beta} - F^{\beta\alpha}\right) = F^{\alpha\beta}$

alors $\epsilon_{\beta\mu\nu}\partial_\alpha F^{\alpha\beta} = \epsilon_{\beta\mu\nu}\epsilon^{\alpha\beta\gamma}\partial_\alpha {}^*F_\gamma$

$$\epsilon_{\beta\mu\nu}\epsilon^{\beta\gamma\alpha} = \delta^\gamma_\mu\delta^\alpha_\nu - \delta^\alpha_\mu\delta^\gamma_\nu$$

$$= \partial_\nu {}^*F_\mu - \partial_\mu {}^*F_\nu$$

ces 2 propriétés ne dépendent pas de la forme du lagrangien, et resteront valables si on modifie $\mathcal{L}_{CS}$.

Maxwell - Chern - Simons :

$$\mathcal{L}_{MCS} = \mathcal{L}_{CS} - \frac{1}{4\mu_0} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad \text{et} \quad \frac{\partial (F_{\mu\nu}F^{\mu\nu})}{\partial(\partial_\alpha A_\beta)} = 2 F^{\mu\nu} \frac{\partial(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)}{\partial(\partial_\alpha A_\beta)} = 4 F^{\alpha\beta}$$

donc les nouvelles éqs. d'Euler-Lagrange sont :

$$\frac{\kappa}{2} \epsilon^{\mu\alpha\beta} \partial_\alpha A_\mu - \frac{1}{\mu_0} \partial_\alpha F^{\alpha\beta} = \frac{\kappa}{2} \epsilon^{\beta\nu\rho} \partial_\nu A_\rho - J^\beta \quad \text{soit} \quad \boxed{\mu_0 J^\beta = \kappa\mu_0 \, {}^*F^\beta + \partial_\alpha F^{\alpha\beta}}$$

en appliquant $\epsilon_{\beta\mu\nu}$ sur cette relation et en utilisant les formules obtenues précédemment (bas de page 2) on obtient :

$$\mu_0 \epsilon_{\beta\mu\nu} J^\beta = \kappa\mu_0 F_{\mu\nu} + \partial_\nu {}^*F_\mu - \partial_\mu {}^*F_\nu$$

si, en l'absence de charge, on applique ∂^μ sur cette relation, en utilisant Euler-Lagrange et $\partial^\mu {}^*F_\mu = 0$ on obtient :

$$\boxed{\left[\partial_\mu \partial^\mu + (\kappa\mu_0)^2\right] {}^*F_\nu = 0}$$

c'est de la forme de l'éq. de Klein-Gordon : $\left(\Box + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right) {}^*F_\nu = 0$

si, par exemple, on cherche des solutions en ondes planes : ${}^*F_\nu = \mathcal{A}_\nu \exp\left[i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})\right]$ (où $\mathcal{A}_\nu$ est une constante)

on trouvera la relation de dispersion :

$$(\hbar\omega)^2 = (\hbar c k)^2 + m^2 c^4 \qquad \text{où ici} \quad m = \frac{\hbar \kappa \mu_0}{c}$$

le photon a acquis une masse.

- Maxwell - Gauss : $\beta = 0$ dans Euler-Lagrange

$$\mu_0 c \rho = \kappa\mu_0(-B) + \partial_1 F^{10} + \partial_2 F^{20} \longrightarrow -\partial_1 F_{10} - \partial_2 F^{20} = \frac{1}{c}(\partial_x E_x + \partial_y E_y)$$

on a donc $\vec{\nabla}\cdot\vec{E} - \kappa c \mu_0 B = \rho/\varepsilon_0$

en intégrant $\int d^2r$ et avec Gauss-Ostrogradsky : $\left(\begin{array}{l} Q = \int d^2r \, \rho \\ \Phi = \int d^2r \, B \end{array}\right)$

$$\oint dl \, \vec{E}\cdot\vec{n} - \kappa c \mu_0 \Phi = \frac{1}{\varepsilon_0} Q$$

comme les photons sont massifs, le champ $\vec{E}$ décroît vite à l'infini et son flux sortant est donc nul. Il reste $\Phi = -\frac{c}{\kappa}Q$.
On n'a plus la relation locale entre charge et flux qui existait dans la théorie de Chern-Simons "pure", mais cette relation existe tjs au niveau global (cad $\int d^2r \ldots$).

Proca-Chern-Simons :

$$\mathcal{L}_{PCS} = \frac{\kappa}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho}A_\mu\partial_\nu A_\rho + \frac{\kappa}{2\Lambda}A_\mu A^\mu$$

les eqs d'Euler-Lagrange s'écrivent $\frac{\kappa}{2}\epsilon^{\mu\alpha\beta}\partial_\alpha A_\mu = \frac{\kappa}{2}\epsilon^{\beta\nu\rho}\partial_\nu A_\rho + \frac{\kappa}{\Lambda}A^\beta$

soit $\boxed{{}^*F^\beta = -\frac{1}{\Lambda}A^\beta}$

Dans le régime indépendant du temps cela s'écrit :

$$\begin{cases} {}^*F^0 = -\partial_x A_y + \partial_y A_x = -\frac{1}{\Lambda}A^0 \\ {}^*F^1 = \frac{1}{c}\partial_y\phi = \partial_y A^0 = -\frac{1}{\Lambda}A_x \\ {}^*F^2 = -\frac{1}{c}\partial_x\phi = \partial_x A^0 = -\frac{1}{\Lambda}A_y \end{cases}$$

on utilise l'ansatz : $A_0(\vec{r}) = f(r)$ $\quad \begin{cases} A_x(\vec{r}) = -\frac{g(r)}{r^2}y \\ A_y(\vec{r}) = +\frac{g(r)}{r^2}x \end{cases}$

alors les 3 eqs du mvt s'écrivent respectivement :

$$\begin{cases} -\partial_x\left(\frac{g}{r^2}x\right) - \partial_y\left(\frac{g}{r^2}y\right) = -\frac{1}{\Lambda}f \quad \text{soit} \quad \frac{2g}{r^2} + \frac{d}{dr}\left(\frac{g}{r^2}\right)\frac{x^2+y^2}{r} = f/\Lambda \\ \frac{y}{r}f' = \frac{1}{\Lambda}\frac{g}{r^2}y \quad \text{et} \quad -\frac{x}{r}f' = -\frac{1}{\Lambda}\frac{g}{r^2}x \end{cases}$$

d'où deux équations : $\boxed{g' = rf/\Lambda \quad \text{et} \quad f' = g/\Lambda r}$

en reportant l'une dans l'autre on voit que f est solution de :

$$r^2f'' + rf' - \frac{r^2}{\Lambda^2}f = 0$$

car $f(r) = \alpha\, I_0(r/\Lambda) + \beta\, K_0(r/\Lambda)$

bien-sûr $\alpha = 0$
(on ne veut pas d'une solution qui diverge à l'∞)

$f(r) = \beta K_0(r/\Lambda)$ puis $g(r) = \Lambda r f'(r) = -\beta r K_1(r/\Lambda)$

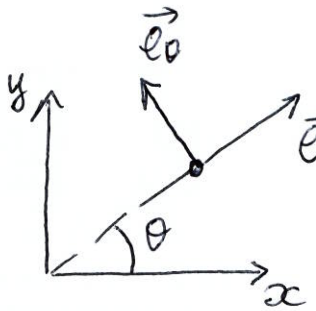
$$\Phi = \int B\, d^2r \underset{\uparrow}{=} \frac{1}{\Lambda}\int_0^\infty \beta K_0\left(\frac{r}{\Lambda}\right) 2\pi r\, dr \underset{\uparrow}{=} 2\pi \Lambda \beta \underbrace{\int_0^\infty x K_0(x)\, dx}_{1}$$

$\left(B = -{}^*F^0 = A_0/\Lambda\right)$ $\qquad x = r/\Lambda$

remarque on peut vouloir utiliser le thm de Stokes et écrire

$$\Phi = \oint_{\substack{\text{grand}\\ \text{cercle}}} \vec{A}\cdot d\vec{l} \qquad \text{on a } \vec{A} = \frac{g}{r^2}\underbrace{(-y\vec{e}_x + x\vec{e}_y)}$$

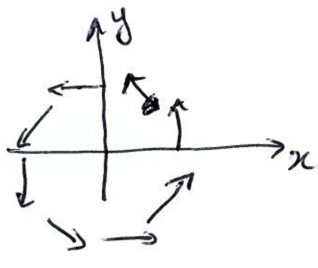
$$\begin{aligned} &-r\sin\theta\,(\cos\theta\,\vec{e}_r - \sin\theta\,\vec{e}_\theta) \\ &+ r\cos\theta\,(\cos\theta\,\vec{e}_\theta + \sin\theta\,\vec{e}_r) \\ &= r\,\vec{e}_\theta \end{aligned}$$



$$\text{donc } \Phi = \lim_{r\to\infty} \int_0^{2\pi} \frac{g}{r}\vec{e}_\theta \cdot r\, d\theta\, \vec{e}_\theta = 2\pi \lim_{r\to\infty} g(r) = 0$$

on ne peut pas appliquer le thm d'Ampere à cause de la singularité en O... on pourrait également vérifier que notre solution a une energie ∞---

En tout cas il faut remarquer que c'est un vortex = le champ $\vec{A} = \frac{g(r)}{r}\vec{e}_\theta$ a l'allure



(dessin pour $\beta \leq 0$)