EFFET CERENKOV

dans un diélectrique $\vec{D} = \varepsilon_0 \hat{\varepsilon}_r \vec{E}$ on met un ^ sur ε_r, car c'est un opérateur. Il agit de telle sorte que pour une fct $f(t)$ on a :

$$\left[\hat{\varepsilon}_r f\right]_\omega = \varepsilon_r(\omega) f_\omega \quad \text{où} \quad f_\omega = \int_{\mathbb{R}} dt\, f(t)\, e^{i\omega t}$$

Donc $\hat{\varepsilon}_r$ est une convolution temporelle, elle commute avec ∂_t et $\vec{\nabla}$.
Dans le milieu les éqs. de Maxwell sont :

$$\vec{\nabla}\wedge\vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0\varepsilon_0\hat{\varepsilon}_r\partial_t\vec{E} \quad \vec{\nabla}\cdot\hat{\varepsilon}_r\vec{E} = \rho/\varepsilon_0 \quad \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \quad \vec{\nabla}\wedge\vec{E} = -\partial_t\vec{B}$$

on écrit donc toujours $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \partial_t\vec{A}$ et $\vec{B} = \vec{\nabla}\wedge\vec{A}$ et on impose la jauge de Lorentz généralisée : $0 = \frac{\hat{\varepsilon}_r}{c^2}\partial_t\phi + \vec{\nabla}\cdot\vec{A}$

on fait des TF temporelles, et en fct des potentiels l'éq. de Maxwell-Ampère s'écrit :

$$\underbrace{\vec{\nabla}\wedge(\vec{\nabla}\wedge\vec{A}_\omega)}_{\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}_\omega) - \vec{\nabla}^2\vec{A}_\omega} = \mu_0\vec{J}_\omega - \frac{i\omega}{c^2}\varepsilon_r(\omega)\left[-\vec{\nabla}\phi_\omega + i\omega\vec{A}_\omega\right]$$

la condition de jauge s'écrit
$$\boxed{0 = -i\omega\frac{\varepsilon_r(\omega)}{c^2}\phi_\omega + \vec{\nabla}\cdot\vec{A}_\omega}$$
donc le gradient de divergence $\vec{A}_\omega$ ci-dessus s'écrit $+i\omega\frac{\varepsilon_r(\omega)}{c^2}\vec{\nabla}\phi_\omega$ et annule un terme identique du membre de droite. Il vient donc

$$\boxed{\left[-\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_r(\omega) - \vec{\nabla}^2\right]\vec{A}_\omega(\vec{r}) = \mu_0\vec{J}_\omega(\vec{r})}$$

la solution de cette équation est
$$\begin{cases} \vec{A}_\omega(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3r'\, \frac{e^{ik(\omega)|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \\ \text{où} \\ k(\omega) \overset{\text{def}}{=} \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon_r(\omega)} \end{cases}$$

démonstration : on fait une TF spatiale :

$$\vec{A}_\omega(\vec{r}) = \int\frac{d^3q}{(2\pi)^3}\,\vec{\mathcal{A}}_\omega(\vec{q})\,e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}} \quad \text{alors} \quad \vec{\mathcal{A}}_\omega(\vec{q}) = \mu_0\frac{\vec{\mathcal{J}}_\omega(\vec{q})}{q^2 - k^2(\omega)}$$

on reporte dans l'expression de $\vec{A}_\omega(\vec{r})$ en écrivant
$\vec{\tilde{J}}_\omega(\vec{q}) = \int d^3r' \, \vec{J}_\omega(\vec{r}') \, e^{-i\vec{q}\cdot\vec{r}'}$ cela donne

$$\vec{A}_\omega(\vec{r}) = \mu_0 \int d^3r' \, \vec{J}_\omega(\vec{r}') \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\vec{q}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}}{q^2 - k^2(\omega)}$$

→ intégrale calculée dans les rappels maths du poly. On ne garde que la réponse causale (ie retardée) :

$$\frac{e^{ik(\omega)|\vec{r}-\vec{r}'|}}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}'|}$$ d'où le résultat

en se plaçant dans la zone de rayonnement on peut écrire :

$$\boxed{\vec{B}_\omega = i\vec{k}(\omega) \wedge \vec{A}_\omega(\vec{r}) \qquad \vec{E}_\omega(\vec{r}) = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r(\omega)}} \vec{B}_\omega(\vec{r}) \wedge \hat{r}}$$

$$\boxed{\text{et } \vec{A}_\omega(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{ik(\omega)r}}{r} \int d^3r' \exp[-i\vec{k}(\omega)\cdot\vec{r}'] \, \vec{J}_\omega(\vec{r}') \quad \text{où } \vec{k}(\omega) = \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon_r(\omega)}\,\hat{r}}$$

pas besoin de tout démontrer : il suffit de s'assurer que dans la zone de rayonnement $\vec{\nabla} \equiv i\vec{k}(\omega)$ d'où la formule pour $\vec{B}_\omega(\vec{r})$

on a $\vec{E}(\vec{r},t) = -\vec{\nabla}\phi - \partial_t\vec{A} \rightarrow \vec{E}_\omega = -i\phi_\omega \vec{k}(\omega) + i\vec{A}_\omega \times \omega$

et la condition de jauge permet d'écrire $\phi_\omega = \frac{c^2}{\omega\varepsilon_r(\omega)} \vec{k}(\omega)\cdot\vec{A}_\omega$

d'où $\vec{E}_\omega = -i\frac{c^2}{\omega\varepsilon_r(\omega)} (\vec{k}(\omega)\cdot\vec{A}_\omega)\vec{k}(\omega) + i\omega\vec{A}_\omega = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r(\omega)}} \vec{B}_\omega \wedge \hat{r}$

facile à vérifier avec
$\vec{a}\wedge(\vec{b}\wedge\vec{c}) = \vec{b}(\vec{a}\cdot\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\cdot\vec{b})$

Ensuite la puissance rayonnée à travers une sphère de rayon assez grand pour être toute entière dans la zone de rayonnement est :

$$P(t) = \int_{\text{sphère}} \vec{S}\cdot\hat{r} \, \underbrace{r^2 d^2\Omega}_{d^2\sigma} \quad \text{où } \vec{S} = \frac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{\mu_0} \quad (\text{comme dans le vide : admis})$$

comme $\vec{E}_\omega = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r(\omega)}} \vec{B}_\omega \wedge \hat{r}$ on peut écrire $\vec{E}(\vec{r},t) = c\,\hat{\varepsilon}_r^{-1/2}\,\vec{B}(\vec{r},t)\wedge\hat{r}$

où l'opérateur $\hat{\varepsilon}_r^{-1/2}$ est défini par son action dans l'espace ω, mais il est important de noter qu'il est isotrope = il affecte de la m manière toutes les composantes de $\vec{B}(\vec{r},t)$.

Donc $\vec{S}(\vec{r},t) = \frac{c}{\mu_0}\hat{\varepsilon}_r^{-1/2}\underbrace{(\vec{B}(\vec{r},t)\wedge\hat{r})\wedge\vec{B}(\vec{r},t)}_{|\vec{B}|^2\hat{r} - \underbrace{(\vec{B}\cdot\hat{r})}_{\text{nul cas } \vec{B}\perp\hat{r} \text{ dans Z.R.}}\vec{B}}$

donc $\vec{S}(\vec{r},t) = \frac{c}{\mu_0}\hat{\varepsilon}_r^{-1/2}|\vec{B}|^2\hat{r}$

$$|\vec{B}|^2 = \vec{B}^*\cdot\vec{B} = \int\frac{d\omega\, d\omega'}{(2\pi)^2}\vec{B}^*_{\omega'}e^{i\omega' t}\cdot\vec{B}_\omega e^{-i\omega t}$$

($\vec{B}(\vec{r},t)$ réel)

et $\hat{\varepsilon}_r^{-1/2}|\vec{B}|^2 = \int_{\mathbb{R}^2}\frac{d\omega\, d\omega'}{(2\pi)^2}\vec{B}^*_{\omega'}\cdot\vec{B}_\omega\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_r(\omega)}}e^{it(\omega'-\omega)}$

énergie totale rayonnée =

$$W = \int_{\mathbb{R}} dt\, P(t) = \int dt\, d^2\Omega\, r^2\vec{S}\cdot\hat{r} = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\omega}{2\pi}\int_{\text{angles}} d\Omega\,\frac{cr^2}{\mu_0}\frac{|\vec{B}_\omega|^2}{\sqrt{\varepsilon_r(\omega)}} = \int_0^{\infty} d\omega\int_{\text{angles}} d\Omega\,\frac{\partial^2 W}{\partial\omega\,\partial\Omega}$$

(symétrie $\omega \leftrightarrow -\omega$ car $\vec{B}(\vec{r},t)$ réel $\Rightarrow \vec{B}_{-\omega} = \vec{B}^*_\omega$)

avec donc $\boxed{\frac{\partial^2 W}{\partial\omega\,\partial\Omega} = \frac{cr^2}{\mu_0\pi}\frac{|\vec{B}_\omega|^2}{\sqrt{\varepsilon_r(\omega)}}}$

Dans le cas qui nous intéresse $\vec{J}(\vec{r},t) = qv\,\delta(x)\delta(y)\delta(z-vt)\,\vec{e}_z$

$$\vec{J}_\omega(\vec{r}) = qv\,\delta(x)\,\delta(y)\int_{-\infty}^{\infty}dt\,\delta(z-vt)\,e^{i\omega t}\,\vec{e}_z$$

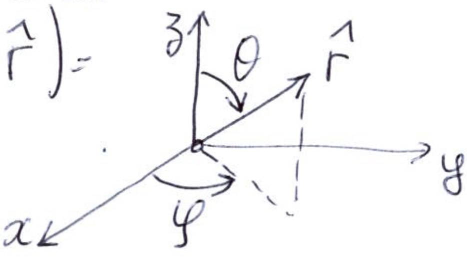
donc (zone rayonn^t)

$$\vec{A}_\omega(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{e^{ik(\omega)r}}{r}\int d^3r'\,\vec{J}_\omega(\vec{r}')e^{-i\vec{k}(\omega)\cdot\vec{r}'} \longrightarrow \vec{e}_z\, qv\int_{\mathbb{R}} e^{i(\omega t - \vec{k}(\omega)\cdot\vec{r}')}\,\delta(x')\delta(y')\,\delta(z'-vt)\,dt\,d^3r'$$

à cause des $\delta(x')\delta(y')\delta(z'-vt)$

$$\vec{k}(\omega)\cdot\vec{r}' = k_z(\omega)\times vt = k(\omega)vt\cos\theta = \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon_r(\omega)}\,vt\cos\theta$$

[où θ est la colatitude de $\hat{r}$ ($\vec{k}(\omega) \,//\, \hat{r}$) :



]

donc on obtient pour $\vec{A}_\omega(\vec{r})$ la formule

-/..

$$\vec{A}_\omega(\vec{r}) = \frac{qv\mu_0}{4\pi}\vec{e}_z \frac{e^{ik(\omega)r}}{r}\int_{-\infty}^{\infty} dt\, e^{i\omega t(1-\sqrt{\varepsilon_r(\omega)}\frac{v}{c}\cos\theta)}$$

soit

$$\boxed{\vec{A}_\omega(\vec{r}) = \frac{qv\mu_0}{2}\frac{e^{ik(\omega)r}}{r}\delta\left(\omega\left[1-\sqrt{\varepsilon_r(\omega)}\frac{v}{c}\cos\theta\right]\right)\frac{e^{ik(\omega)r}}{r}\vec{e}_z}$$

cas simple = * $\varepsilon_r(\omega) \equiv 1$ alors il est impossible d'avoir $1 = \frac{v}{c}\cos\theta$
(car $v<c$)

* $\sqrt{\varepsilon_r(\omega)} \equiv n$ ($c^{ste} > 1$) indice constant. alors l'argument de la distribution s'annule pour un angle θ_c tel que $\cos\theta_c = \frac{c}{nv}$ (c'est possible si $v > c/n$ = lorsque v est supérieure à la vitesse de phase dans le milieu)

Dans le cas $\sqrt{\varepsilon_r(\omega)} \equiv n$ on peut déterminer $\vec{A}(\vec{r},t)$ dans tout l'espace = c'est fait dans la parenthèse (ECA-ECB-ECC)

* Dans le cas général =

$$\frac{\partial^2 W}{\partial\omega\partial\Omega} = \frac{cr^2}{\mu_0\pi}\frac{|\vec{B}_\omega|^2}{\sqrt{\varepsilon_r(\omega)}} \quad \text{avec } \vec{B}_\omega(\vec{r}) = i\vec{k}(\omega)\wedge\vec{A}_\omega(\vec{r})$$

$$\text{donc } |\vec{B}_\omega|^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_r(\omega)|\vec{A}_\omega(\vec{r})|^2\sin^2\theta$$

cela donne =

$$\frac{\partial^2 W}{\partial\omega\partial\Omega} = \frac{cr^2}{\mu_0\pi}\frac{\omega^2}{c^2}\sqrt{\varepsilon_r(\omega)}\left(\frac{qv\mu_0}{2}\right)^2\frac{1}{r^2}\delta^2\left(\omega\left[1-\sqrt{\varepsilon_r(\omega)}\frac{v}{c}\cos\theta\right]\right)\sin^2\theta$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi c}q^2v^2\omega^2 n(\omega)\sin^2\theta\,\delta^2\left(\omega\left[1-\frac{n(\omega)v}{c}\cos\theta\right]\right)$$ en notant $\sqrt{\varepsilon_r(\omega)} = n(\omega)$

alors

$$\frac{dP}{d\omega} = \frac{1}{T}\int d^2\Omega\frac{\partial^2 W}{\partial\omega\partial\Omega} = \frac{\mu_0}{8\pi^2 c}q^2v^2\omega^2 n(\omega)\int\sin\theta\, d\theta\, d\varphi\,\sin^2\theta\,\delta\left(\omega-\frac{n(\omega)v}{c}\omega\cos\theta\right)$$

(régularisation du δ^2 = voir appendice)

intégrale sur $\varphi \to 2\pi$, et pour θ on pose $u = \cos\theta$, $du = -\sin\theta\, d\theta$

alors

$$\frac{dP}{d\omega} = \frac{\mu_0}{4\pi c} q^2 v^2 \omega^2 n(\omega) \underbrace{\int_{-1}^{1} du (1-u^2)\, \delta\left(\omega - \frac{n(\omega) v}{c} \omega u\right)}_{\frac{1}{n(\omega) v \omega / c} \times \left(1 - \frac{c^2}{v^2 n^2(\omega)}\right)}$$

seulement possible si $\frac{c}{v\, n(\omega)} < 1$ = sinon le résul est nul

$$\frac{dP}{d\omega} = \begin{cases} \frac{\mu_0}{4\pi} q^2 v\, \omega \left(1 - \frac{c^2}{v^2 n^2(\omega)}\right) & \text{si } \frac{c}{v\, n(\omega)} < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

la puissance totale rayonnée est (on suppose que $\frac{c}{vN} < 1$)

$$P = \int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{dP}{d\omega} d\omega = \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{8\pi} \mu_0 q^2 v \left(1 - \frac{c^2}{N^2 v^2}\right)$$

et la perte d'énergie par unité de distance parcourue est =

$$\frac{dW}{dz} = \frac{P\,dt}{dz} = P/v$$

l'énergie initiale est $W_{init} = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = 2\,\text{MeV}$

donc $v = c\sqrt{1 - \frac{mc^2}{W_{init}}} = 0.97c$

on a bien $v > c/N$

$$1 - \frac{c^2}{N^2 v^2} = 0.4 \qquad \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{c^2} = 10^{14}\,\text{m}^{-2} \qquad \frac{\mu_0 c^2 q^2}{4\pi} = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0} = 1.5\,\text{MeV.m}$$

$\frac{dW}{dz} = 30\,\text{keV m}^{-1}$ la particule rayonne tant que sa vitesse est $> c/N$ et que son énergie est $> W_{fin} = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - 1/N^2}} = 0.75\,\text{MeV}$

évaluation de la distance pdt laquelle l'e^- rayonne =

$$\frac{W_{fin} - W_{init}}{dW/dz} = \frac{1250\,\text{keV}}{30\,\text{keV.m}^{-1}} = 40\,\text{m}.$$

Il y a d'autres sources de perte d'énergie (= rayonnt résiduel puisque v varie à cause de Cerenkov et également collision)

Au final l'e^- sera $\sim$ à l'arrêt au bout de qques dizaines de m.

ECA

Parenthèse : expression de $\vec{A}(\vec{r},t)$ lorsque ε_r est indep. de ω, hors de la zone de rayonnement.

$$\vec{A}_\omega(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3r' \, \vec{J}_\omega(\vec{r}') \frac{e^{ik(\omega)|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$ (formule démontrée en haut de EC2)

ici $\vec{J}(\vec{r},t) = q\vec{v}\,\delta(x)\delta(y)\delta(z-vt)$ et $\vec{J}_\omega(\vec{r}') = q\vec{v}\,\delta(x)\delta(y)\int_{\mathbb{R}} \delta(z-vt')e^{i\omega t'}dt'$

puis $\vec{A}(\vec{r},t) = \int \frac{d\omega}{2\pi} \vec{A}_\omega(\vec{r})$ s'écrit ici :

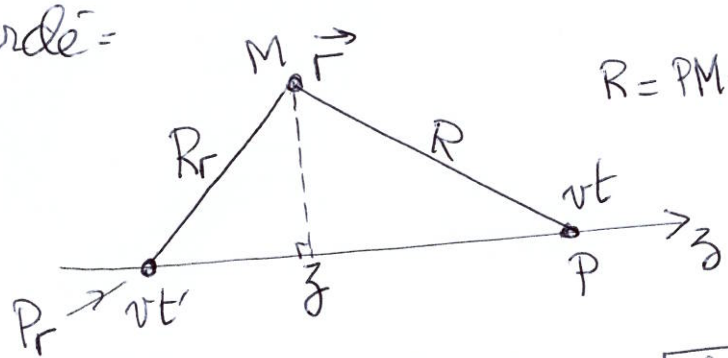
$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3r' \frac{d\omega}{2\pi} dt' \frac{\delta(x')\delta(y')\delta(z'-vt')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} e^{i\omega(t'-t)+i\frac{\omega}{c^*}|\vec{r}-\vec{r}'|} \times q\vec{v}$$ (où $c^* = c/\sqrt{\varepsilon_r}$)

$\int d^3r'$ facile grâce aux 3 δ. $\int \frac{d\omega}{2\pi} e^{i\omega X} = \delta(X)$ il reste donc :

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi} q\vec{v} \int_{\mathbb{R}} dt' \frac{\delta\left[t'-t+\frac{1}{c^*}\sqrt{x^2+y^2+(z-vt')^2}\right]}{\sqrt{(z-vt')^2+x^2+y^2}}$$

il faut donc $t > t'$ et $c^*(t-t') = \sqrt{x^2+y^2+(z-vt')^2} = R_r$ (cf. dessin)

t' est le temps retardé :



$R = PM = \sqrt{x^2+y^2+(z-vt)^2}$

on a : $\delta[f(t')] = \frac{\delta(t'-t_0)}{|f'(t_0)|}$ ici $f(t') = t'-t+\frac{1}{c^*}\sqrt{x^2+y^2+(z-vt')^2}$

et $f'(t') = 1 + \frac{1}{c^*}\frac{1}{2}\frac{-2v(z-vt')}{\sqrt{x^2+y^2+(z-vt')^2}}$

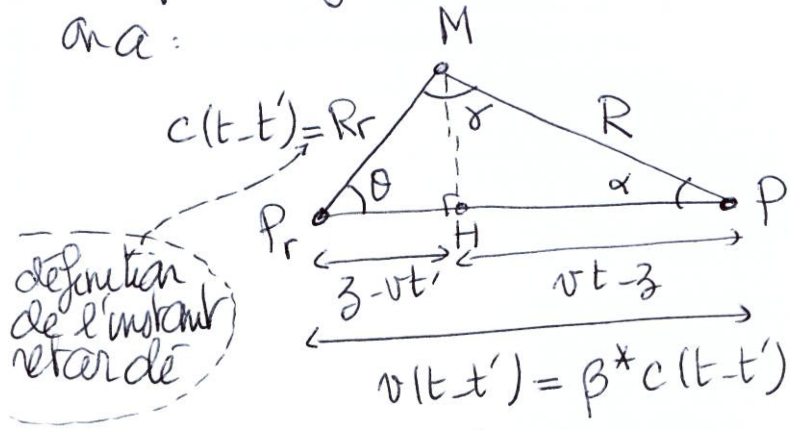
$$\frac{\delta[f(t')]}{\sqrt{\quad''}} = \frac{\delta(t'-t_0)}{\left|\underbrace{\sqrt{x^2+y^2+(z-vt')^2}}_{R_r} - \beta^*(z-vt')\right|}$$ où $\beta^* = v/c^*$ et $\vec{\beta}^* = \beta^*\vec{e}_z = \vec{v}/c^*$

et $$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi} q\vec{v} \frac{1}{|R_r - \vec{R}_r\cdot\vec{\beta}^*|}$$

ECB

un peu de géométrie :

on a :

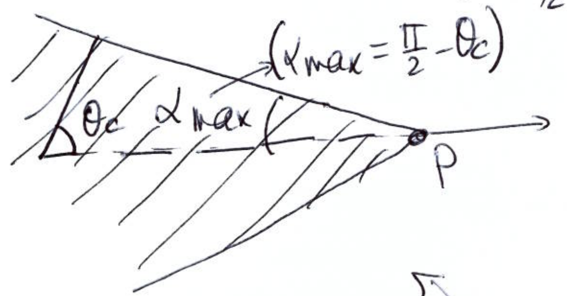


$v(t-t') = \beta^* c(t-t') = \beta^* R_r$

sur le dessin on voit que $\gamma > \pi/2$

géométrie du triangle : $\dfrac{\sin\theta}{R} = \dfrac{\sin\alpha}{R_r} = \dfrac{\sin\gamma}{\beta^* R_r}$

la dernière égalité donne $\sin\gamma = \beta^* \sin\alpha$ avec ici $\beta^* > 1$.
cas limite : $\sin\gamma = 1$ $(\gamma = \pi/2)$ et
alors $\sin\alpha = \dfrac{1}{\beta^*}$ et comme $\gamma = \pi/2$
$\theta = \pi/2 - \alpha$ avec $\cos\theta = \dfrac{1}{\beta^*}$ = angle θ_c :



il faut donc $\beta^* \sin\alpha < 1$
soit
$\alpha < \arcsin(1/\beta^*) = \alpha_{max}$
donc on ne peut trouver de solution que dans la zone hachurée.
(càd si $M \in$ zone hachurée

on a également :

il est clair que
P_rM^* = projection de $\vec{P_rP}$ sur $\hat{R}_r$
$= \hat{R}_r \cdot R_r \vec{\beta}^* = R_r \beta^* \cos\theta$

donc $R \underbrace{\cos(\pi-\gamma)}_{-\cos\gamma > 0} = MM^* = P_rM^* - P_rM = \vec{R}_r \cdot \vec{\beta}^* - R_r > 0$

donc dans la valeur absolue de l'expression de $\vec{A}(\vec{r},t)$ il faut prendre $\dfrac{1}{\vec{R}_r \cdot \vec{\beta}^* - R_r} = \dfrac{1}{MM^* = -R\cos\gamma} = \dfrac{1}{R\sqrt{1-\sin^2\gamma}}$

et on a vu avec la géom. du triangle : $\sin\gamma = \beta^* \sin\alpha$

donc $$\boxed{\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\, q\vec{v}_x \, \frac{1}{R\sqrt{1-\beta^{*2}\sin^2\alpha}}}$$

ECC

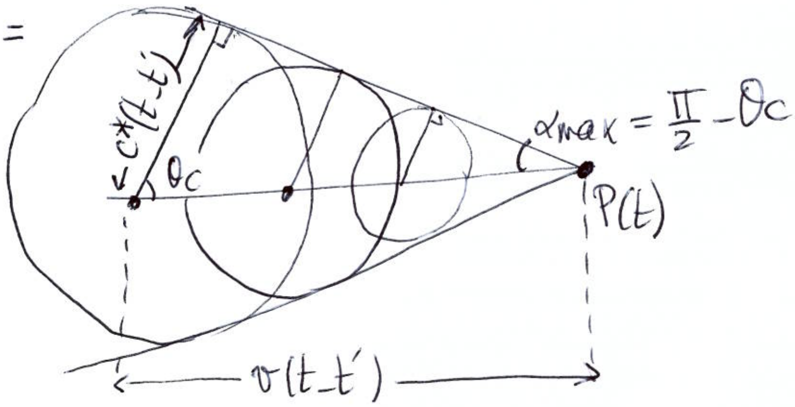
$R=\sqrt{x^2+y^2+(z-vt)^2}$

$R\sin\alpha = HM = \sqrt{x^2+y^2}$

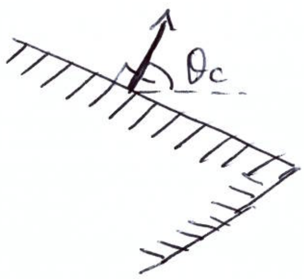
donc $$\boxed{\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\, \frac{q v \vec{e}_z}{\sqrt{(z-vt)^2-(x^2+y^2)\underbrace{(\beta^{*2}-1)}_{>0}}}}$$

cette expression n'est valable que dans la zone hachurée de la page précédente (ECB). Ailleurs $\vec{A}(\vec{r},t)\equiv 0$

Juste à la frontière de la zone hachurée $\sin\alpha = 1/\beta^*$ et l'expression encadrée ci-dessus de $\vec{A}$ diverge = phénomène de caustique =



un observateur extérieur au repos voit progresser un front dans la direction θ_c:



θ_c = direction de propagation du front = direction de la divergence de $\vec{A}_\omega(\vec{r})$ dans la zone de rayonnement