M1 et Magistère 2$^{\text{ème}}$ année 5 décembre 2014

EXAMEN d'ÉLECTRODYNAMIQUE CLASSIQUE et QUANTIQUE

Durée : 3 heures

Les calculatrices, les polycopiés et les notes de cours et de travaux dirigés sont autorisés.
Barème approximatif : A = 10 points ; B = 7 points ; C = 7 points.
La partie C est indépendante des deux premières. À chaque étape on pourra, en cas de difficulté, admettre les résultats de la question et passer à la suite.

THÉORIES DE CHERN-SIMONS

A Théorie de Chern-Simons

On se propose d'étudier le modèle de Chern-Simons abélien en 2+1 dimensions (deux dimensions d'espace, 1 dimension de temps) qui joue un rôle important dans le contexte de l'effet Hall quantique. L'action de cette théorie des champs couplée à un courant conservé est:

$$S = \frac{1}{c}\int \mathrm{d}^3X\,(\mathscr{L}_{\rm CS} + \mathscr{L}_{\rm int})\ , \quad \text{avec} \quad \mathscr{L}_{\rm CS} = \frac{\kappa}{2}\,\epsilon^{\mu\nu\rho}A_\mu\partial_\nu A_\rho \quad \text{et} \quad \mathscr{L}_{\rm int} = -A_\mu J^\mu\ , \tag{A1}$$

où les indices grecs μ, ν, ρ varient dans $\{0,1,2\}$ et $\epsilon^{\mu\nu\rho}$ est le tenseur complètement antisymétrique à trois indices défini avec la convention $\epsilon^{012} = 1$. Le tenseur métrique est $g_{\mu,\nu} = \text{diag}\,(1,-1,-1)$. Dans (A1) le quadri-potentiel est $A^\mu = (\phi/c, \vec{A})$ où $\phi(\vec{r},t)$ est le potentiel scalaire, $\vec{A}(\vec{r},t)$ le potentiel vecteur à deux composantes, κ est une constante positive et le courant $J^\mu(\vec{r},t) = (c\rho, \vec{J})$ est le courant conservé associé à la charge électrique : $\partial_\mu J^\mu = 0$.

1/ En négligeant les termes de bord, vérifier que l'action S est invariante sous la transformation de jauge $A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu G$ où $G(\vec{r},t)$ est un champ scalaire quelconque.

2/ Écrire les équations d'Euler-Lagrange pour le modèle (A1). On pourra introduire le tenseur de Faraday $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$.

3/ On définit le champ magnétique $B(\vec{r},t)$: $B = \partial_x A_y - \partial_y A_x$ et le champ électrique (vecteur à deux composantes) : $\vec{E}(\vec{r},t) = -\vec{\nabla}\phi - \partial_t\vec{A}$. Donner l'expression des composantes du tenseur $F_{\mu\nu}$ en fonction des champs $\vec{E}$ et B.

4/ On introduit le champ dual en 2+1 dimensions: ${}^\star F^\mu = \frac{1}{2}\,\epsilon^{\mu\alpha\beta}F_{\alpha\beta}$.

(a) Donner l'expression des composantes de ${}^\star F^\mu$ en fonction des champs $\vec{E}$ et B.

(b) Montrer que les équations du mouvement sont données par

$$c\,\rho = -\kappa\,B\ , \quad \text{et} \quad \vec{J} = \frac{\kappa}{c}\begin{pmatrix} -E_y \\ E_x \end{pmatrix}\ . \tag{A2}$$

En déduire que toute particule ponctuelle de charge q porte un champ magnétique localisé (un "tube de flux") dont on donnera l'expression.

(c) Montrer que $\partial_\mu {}^\star F^\mu = 0$. Comment pourrait-on appeler cette équation ?[1] Montrer que la conservation de la charge est alors obtenue comme une conséquence des équations du mouvement.

(d) Montrer que[2]

$$\epsilon^{\alpha\beta\gamma}\, {}^\star F_\gamma = F^{\alpha\beta} \ , \quad \text{en déduire que} \quad \epsilon_{\beta\mu\nu}\, \partial_\alpha F^{\alpha\beta} = \partial_\nu\, {}^\star F_\mu - \partial_\mu\, {}^\star F_\nu \ . \tag{A3}$$

B Théorie de Maxwell-Chern-Simons

On remplace maintenant la densité lagrangienne $\mathscr{L}_{\rm CS}$ par

$$\mathscr{L}_{\rm MCS} = -\frac{1}{4\,\mu_0} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{\kappa}{2}\, \epsilon^{\mu\nu\rho} A_\mu \partial_\nu A_\rho \ . \tag{B1}$$

1/ Montrer que les nouvelles équations du mouvement sont

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} + \kappa\mu_0\, {}^\star F^\nu = \mu_0\, J^\nu \ . \tag{B2}$$

Vérifier que l'on a

$$\partial_\nu\, {}^\star F_\mu - \partial_\mu\, {}^\star F_\nu + \kappa\mu_0\, F_{\mu\nu} = \mu_0\, \epsilon_{\beta\mu\nu}\, J^\beta \ . \tag{B3}$$

2/ En déduire qu'en l'absence de source, le champ ${}^\star F^\mu$ est solution de l'équation de Klein-Gordon:

$$\left(\Box + \frac{m^2c^2}{\hbar^2} \right) {}^\star F^\mu = 0 \ . \tag{B4}$$

Donner la valeur du paramètre m. Quelle est la relation de dispersion des solutions en onde plane de (B4) ? Conclure.

3/ Écrire l'analogue de l'équation de Maxwell-Gauss. Montrer qu'une configuration des particules en interaction avec le champ de charge totale Q porte un flux magnétique total $\Phi = -(c/\kappa)\, Q$. Comparer avec la réponse à la question A.4/(b)

C Théorie de Proca-Chern-Simons

On considère maintenant la théorie de Proca-Chern-Simons :

$$\mathscr{L}_{\rm PCS} = \frac{\kappa}{2}\, \epsilon^{\mu\nu\rho} A_\mu \partial_\nu A_\rho + \frac{\kappa}{2\,\Lambda}\, A^\mu A_\mu \ , \tag{C1}$$

où Λ est un paramètre positif ayant les dimensions d'une longueur. Dans toute cette partie on considère le champ libre (sans source).

1/ Écrire les équations d'Euler-Lagrange.

2/ On cherche des solutions indépendantes du temps *qui s'annulent à l'infini* et qui sont de la forme

$$A^\mu(\vec{r}\,) = \left(A_0 \, , \vec{A} \right) \ , \quad \text{avec} \quad A_0 = f(r) \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \end{pmatrix} = \frac{g(r)}{r^2} \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \ , \tag{C2}$$

où $f(r)$ et $g(r)$ sont des fonctions pour l'instant inconnues. Pourquoi peut-on appeler cette solution un vortex ?

---

[1] Indication : écrire cette équation en fonction des champs $\vec{E}$ et B.

[2] Indication : $\epsilon^{\mu\nu\rho}\, \epsilon_{\mu\alpha\beta} = \delta^\nu_\alpha\, \delta^\rho_\beta - \delta^\nu_\beta\, \delta^\rho_\alpha$.

(a) Montrer que[3] $\dfrac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}r} = r f(r)/\Lambda$ et que $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r} = g(r)/(\Lambda r)$.

(b) En déduire que $f(r)$ est proportionnelle à une fonction de Bessel modifiée d'argument r/Λ. Donner l'expression correspondante de $g(r)$.

(c) Calculer le flux associé à ce vortex. Essayer également d'appliquer le théorème d'Ampère en calculant $\oint \vec{A} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell}$ sur un cercle dont le rayon tend vers l'infini. Voyez-vous un problème ? Expliquer son origine.

D Annexe: fonctions de Bessel modifiées

Les fonctions de Bessel modifiées $I_\nu(x)$ et $K_\nu(x)$ forment une base de l'espace des solutions de l'équation différentielle

$$x^2 \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2} + x \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} - (x^2 + \nu^2)\, f = 0 \,. \tag{D1}$$

où ν est une constante, complexe, réelle ou entière. Pour $\nu = n \in \mathbb{N}$, les K_n vérifient la relation de récurrence $K_n'(x) = \frac{n}{x} K_n(x) - K_{n+1}(x)$, et en particulier $K_0'(x) = -K_1(x)$. Elles ont les comportements asymptotiques[4]

$$\begin{aligned} K_n(x) &\sim \begin{cases} -\ln(x/2) - \gamma & \text{si} \quad n = 0 \\ \frac{\Gamma(n)}{2}\,(2/x)^n & \text{si} \quad n \geq 1 \end{cases} && \text{lorsque} \quad x \to 0 \,, \\ K_n(x) &\sim \sqrt{\frac{\pi}{2\,x}}\, e^{-x} \left(1 + \frac{4n^2 - 1}{8\,x} + \mathcal{O}(x^{-2})\right) && \text{lorsque} \quad x \to \infty \,. \end{aligned} \tag{D2}$$

Les premières fonctions de Bessel modifiées sont tracées sur la figure 1. On a

$$\int_0^\infty \mathrm{d}x\, x\, K_0(x) = 1 \,. \tag{D3}$$

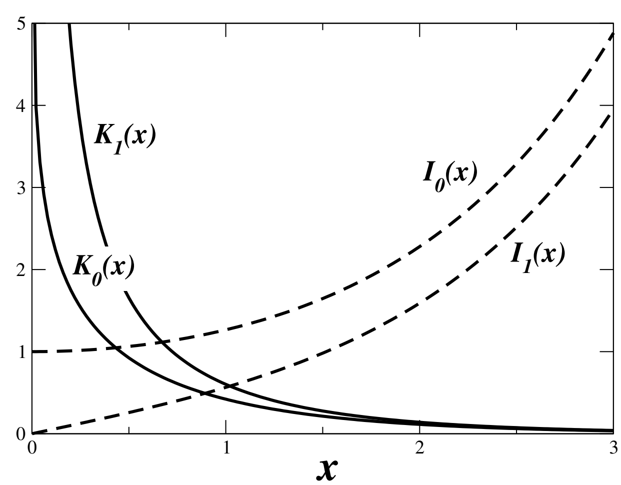

Figure 1: *Fonctions de Bessel modifiées. Les fonctions de première espèce (les $I_n(x)$, lignes tiretées) croissent exponentiellement à l'infini. Les fonctions de seconde espèce (les $K_n(x)$, lignes pleines) décroissent exponentiellement à l'infini et divergent logarithmiquement ou en loi de puissance à l'origine [cf. éqs.* (D2)*].*

[3] On rappelle que $\partial_x r = x/r$ et que $\partial_y r = y/r$.

[4] γ est la constante d'Euler, $\Gamma(1) = 1$ et $\Gamma(n) = (n-1)!$