M1 et Magistère 2$^{\text{ème}}$ année 27 novembre 2015

EXAMEN d'ÉLECTRODYNAMIQUE CLASSIQUE et QUANTIQUE

Durée : 3 heures

Les calculatrices, les polycopiés et les notes de cours et de travaux dirigés sont autorisés.
Barème approximatif : A = 10 points ; B = 10 points ; C = 10 points.
Les parties B et C sont indépendantes. À chaque étape on pourra, en cas de difficulté, admettre les résultats de la question et passer à la suite.

Monopôles magnétiques

A Généralités.

En suivant une méthode proposée par Dirac, nous allons symétriser les équations de Maxwell sous la dualité électrique-magnétique et montrer que cela implique l'existence de monopôles magnétiques (analogues pour le magnétisme des charges électriques ponctuelles), dont nous étudierons les propriétés.

1/ Écrire les équations de Maxwell (en l'absence de charge et de courant) sous forme covariante relativiste.

2/ Comment se modifient le tenseur ${}^\star F^{\mu\nu}$ et les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ lors de la transformation, dite *transformation de dualité électrique/magnétique* : $F^{\mu\nu} \to {}^\star F^{\mu\nu}$? Vérifier que les équations écrites en 1/ sont bien invariantes sous cette transformation.

3/ On considère maintenant les équations de Maxwell en présence de matière. Plus exactement, on les écrit :

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 \, J^\nu \ , \quad \text{et} \quad \partial_\mu \, {}^\star F^{\mu\nu} = \mu_0 \, K^\nu \ , \tag{A1}$$

où $K^\mu(\vec{r}, t) = (c\, \sigma(\vec{r}, t), \vec{K}(\vec{r}, t))$.

(a) Rappeler la signification des composantes de $J^\mu(\vec{r}, t)$. Comment doivent se transformer J^μ et K^μ pour que le système d'équations (A1) soit invariant sous l'effet de la transformation de dualité électrique/magnétique ?

(b) Écrire la forme vectorielle des équations de Maxwell qui correspondent à (A1). On pourra, soit traduire (A1) en relations vectorielles, soit appliquer la transformation de dualité aux deux équations de Maxwell qui ne sont pas modifiées pour obtenir la nouvelle forme des deux autres.

4/ On suppose que la fonction $\sigma(\vec{r}\,)$ est indépendante du temps et qu'elle est localisée dans un domaine Ω de l'espace tridimensionnel (c'est-à-dire $\sigma(\vec{r}\,) = 0$ si $\vec{r} \notin \Omega$) et on note $G = \iiint_\Omega \mathrm{d}^3 v \; \sigma(\vec{r}\,)$. Exprimer en fonction de G le flux de champ magnétique à travers une surface S fermée entourant Ω. Comment peut-on alors interpréter G ? Quelles sont ses dimensions ?

5/ On considère un monopôle magnétique immobile, c'est à dire une charge magnétique g ponctuelle fixe placée à l'origine: $\sigma(\vec{r}\,) = g\, \delta^{(3)}(\vec{r}\,)$. Donner l'expression du champ magnétique $\vec{B}_{\mathrm{m}}(\vec{r}\,)$ créé par ce monopôle.

Indication: On pourra chercher $\vec{B}_{\mathrm{m}}(\vec{r}\,)$ sous la forme $C^{\text{ste}} \dfrac{\vec{e}_r}{r^2}$ et démontrer que $C^{\text{ste}} = g/(4\pi\varepsilon_0 c)$.

B Solénoïde infini.

On revient dans toute cette section dans le cadre de l'électromagnétisme usuel. Nous allons montrer que l'extrémité d'un solénoïde infiniment mince et long modélise un monopôle magnétique.

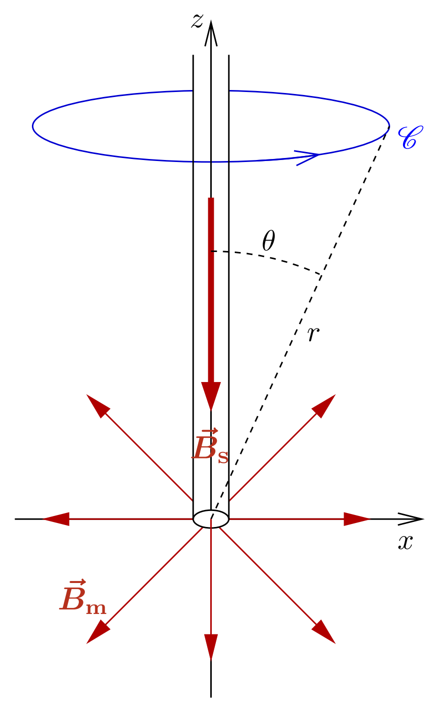
Nous considérons donc un tel solénoïde qui s'étend le long de l'axe des z depuis l'origine jusqu'à $z \to +\infty$. On écrit le champ magnétique créé par ce solénoïde dans tout l'espace sous la forme $\vec{B} = \vec{B}_{\mathrm{m}} + \vec{B}_{\mathrm{S}}$ où $\vec{B}_{\mathrm{m}}(\vec{r}\,)$ est le champ déterminé à la question A.5/, et

$$\vec{B}_{\mathrm{S}}(\vec{r}\,) = \alpha\,\delta(x)\delta(y)\Theta(z)\,\vec{e}_z\ , \tag{B1}$$

est le champ qui règne à l'intérieur du solénoïde[1]. Déterminer la constante α qui apparaît dans (B1) afin que le champ $\vec{B}$ soit un champ acceptable pour la magnéto-statique usuelle[2].

1/ Nous allons démontrer ici que le champ $\vec{B}$ dérive d'un potentiel vecteur $\vec{A}$ dont l'expression en coordonnées sphériques est:

$$\vec{A}(\vec{r}\,) = -\frac{g}{4\pi\varepsilon_0 c}\,\frac{1+\cos\theta}{r\,\sin\theta}\,\vec{e}_\varphi\ . \tag{B2}$$



(a) Déterminer la zone de l'espace où $\vec{A}$ est singulier.

(b) Montrer que sur $\mathscr{U}^+ = \{\mathbb{R}^3$ privé du demi-axe $z \geq 0\}$, on a $\vec{\nabla}\wedge\vec{A} = \vec{B}$.

(c) Pour achever la démonstration on va vérifier que le théorème de Stokes s'applique sur un contour qui entoure la ligne de singularités de $\vec{A}$. Soit donc un cercle orienté $\mathscr{C}$ entourant le demi-axe $z > 0$ (cf. schéma). Calculer la circulation de $\vec{A}$ le long de ce cercle et vérifier que

$$\oint_{\mathscr{C}} \vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{\ell} = \Phi_{\mathrm{m}} + \Phi_{\mathrm{S}}\ , \tag{B3}$$

où Φ_{m} (resp. Φ_{S}) est le flux de $\vec{B}_{\mathrm{m}}$ (resp. de $\vec{B}_{\mathrm{S}}$) sur une surface orientée s'appuyant sur $\mathscr{C}$. On choisira à chaque fois la surface la plus appropriée.

2/ On définit sur $\mathscr{U}^- = \{\mathbb{R}^3$ privé du demi-axe $z \leq 0\}$, le champ $\vec{A}^* = \dfrac{g}{4\pi\varepsilon_0 c}\,\dfrac{1-\cos\theta}{r\,\sin\theta}\,\vec{e}_\varphi$.

(a) Démontrer que sur le domaine $\mathscr{U}$ où $\vec{A}^*$ et $\vec{A}$ sont tous deux non singuliers ($\mathscr{U} = \mathscr{U}^-\cap\mathscr{U}^+ = \{\mathbb{R}^3$ privé de l'axe $z = 0\}$), on a $\vec{\nabla}\wedge\vec{A}^* = \vec{\nabla}\wedge\vec{A} = \vec{B}_{\mathrm{m}}$.

(b) Démontrer que sur $\mathscr{U}$, on passe de $\vec{A}$ à $\vec{A}^*$ par une transformation de gauge, c'est à dire qu'il existe un champ scalaire $G(\vec{r}\,)$ tel que $\vec{A}^* = \vec{A} + \vec{\nabla}G$. Donner l'expression de $G(\vec{r}\,)$.

---

[1] On rappelle que Θ est la fonction de Heaviside: $\Theta(z) = 1$ si $z > 0$ et $\Theta(z) = 0$ si $z < 0$.

[2] Si vous ne savez pas faire, ce n'est pas rédhibitoire, il suffit de sauter la question 1/(c) ci-dessous.

(c) On considère une particule quantique chargée soumise au hamiltonien $H = \frac{1}{2m}(\frac{\hbar}{\mathrm{i}}\vec{\nabla} - q\vec{A}\,)^2 + q\phi$ et décrite par une fonction d'onde $\Psi(\vec{r}, t)$. On note H^* la nouvelle forme de H obtenue lors de la transformation de jauge la plus générale ($\vec{A} \to \vec{A}^* = \vec{A}(\vec{r}, t) + \vec{\nabla} G$ et $\phi \to \phi^* = \phi(\vec{r}, t) - \partial_t G$ où $G(\vec{r}, t)$ est un champ scalaire quelconque).

Montrer (ou admettre et passer à la suite) que la nouvelle fonction d'onde Ψ^* (solution de $H^*\Psi^* = \mathrm{i}\hbar\partial_t\Psi^*$) est $\Psi^*(\vec{r}, t) = \Psi(\vec{r}, t)\exp\{\mathrm{i}\, q\, G(\vec{r}, t)/\hbar\}$.

(d) Revevons au problème du monopôle, avec le $G(\vec{r}\,)$ qui a été déterminé à la question (b) ci-dessus. Les fonctions d'onde Ψ et Ψ^* décrivant une particule se déplacant dans l'espace $\mathscr{U}$ doivent chacune reprendre la même valeur lors d'un parcours $\varphi \to \varphi + 2\pi$. En déduire la condition de quantification de la charge q :

$$\frac{q\, g}{\varepsilon_0 c} = n\, h \quad \text{où} \quad n \in \mathbb{Z}\ . \tag{B4}$$

C Quantification du moment cinétique.

On va retrouver le résultat (B4) d'une autre manière. On considère une charge électrique ponctuelle de coordonnée $\xi^\mu = (c\, t, \vec{\xi}(t))$ pour laquelle

$$J^\mu(\vec{r}, t) = q\, \frac{\mathrm{d}\xi^\mu}{\mathrm{d}t}\, \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{\xi}(t))\ , \quad K^\mu(\vec{r}, t) = 0\ . \tag{C1}$$

1/ Rappeler l'expression (vue en cours) de l'équation relativiste (non quantique !) du mouvement pour cette particule test dans un champ électromagnétique $(\vec{E}(\vec{r}, t), \vec{B}(\vec{r}, t))$. On l'écrira sous forme covariante relativiste (en utilisant le tenseur de Faraday $F^{\mu\nu}$) puis sous forme vectorielle (on notera $\vec{p}$ la quantité de mouvement relativiste de la particule).

2/ On se place dans le cas où cette particule se déplace dans le champ $\vec{B}_{\mathrm{m}}(\vec{r}\,)$ obtenu à la question A.5/. Montrer que la quantité

$$\vec{L} = \vec{\xi} \wedge \vec{p} - \frac{qg}{4\pi\varepsilon_0 c}\, \frac{\vec{\xi}}{|\,\vec{\xi}\,|} \tag{C2}$$

est conservée au cours du mouvement de la particule.

3/ Démontrer que le produit scalaire $\vec{L} \cdot \hat{\xi}$ est constant ($\hat{\xi} = \vec{\xi}/|\,\vec{\xi}\,|$). En déduire que la particule se déplace sur un cône d'axe $\vec{L}$, dont le sommet est à l'origine et dont on donnera le demi-angle au sommet.

4/ On suppose qu'on a réussi à démontrer que $\vec{L}$ est le moment cinétique total, particule + champ (ce sera fait à la question suivante). Pour quantifier le système, on impose que la projection de $\vec{L}$ sur une direction constante soit de la forme $m\hbar/2$ où $m \in \mathbb{Z}$. En prenant comme direction un des vecteurs unitaires porté par la surface du cône identifié précédemment, retrouver la condition de quantification (B4).

5/ Enfin, dernière étape, nous allons démontrer comme promis que $\vec{L}$ est le moment cinétique total: particule + champ. Pour ce faire, il suffit de s'assurer que le second terme du membre de droite de (C2) correspond au moment cinétique du champ, c'est à dire que $-\frac{qg}{4\pi\varepsilon_0 c}\,\hat{\xi} = \vec{L}_{\mathrm{chp}}$ où

$$\vec{L}_{\mathrm{chp}} \equiv \iiint_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3 v\ \vec{r} \wedge \vec{g}(\vec{r}, t)\ , \quad \text{avec} \quad \vec{g}(\vec{r}, t) = \frac{\vec{S}(\vec{r}, t)}{c^2} = \varepsilon_0\, \vec{E}(\vec{r}, t) \wedge \vec{B}(\vec{r}\,)\ . \tag{C3}$$

Dans (C3) $\vec{E}(\vec{r},t) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{r}-\vec{\xi}(t)}{|\vec{r}-\vec{\xi}(t)|^3}$ est le champ électrique du système (il est créé par la charge mobile) et $\vec{B}(\vec{r}\,) = \vec{B}_{\mathrm{m}}(\vec{r}\,)$ le champ magnétique (il est créé par le monopôle[3], cf. question A.5/).

(a) En utilisant les notations tensorielles de l'espace à trois dimensions, avec sommation implicite sur les indices répétés (sans distinction covariant/contravariant), montrer que

$$(\vec{r}\wedge\vec{g}\,)_i = \frac{g}{4\pi c}\,E_\ell\left(\frac{\delta_{i\ell}}{r} - \frac{x_i\,x_\ell}{r^3}\right) = \frac{g}{4\pi c}\,E_\ell\,\partial_\ell\Big(\frac{x_i}{r}\Big)\ . \tag{C4}$$

(b) En déduire que

$$\vec{L}_{\mathrm{chp}} = -\frac{g}{4\pi c}\iiint_{\mathbb{R}^3}\mathrm{d}^3v\ \frac{\vec{r}}{r}\,\vec{\nabla}\cdot\vec{E}\ , \tag{C5}$$

et achever le calcul explicite de $\vec{L}_{\mathrm{chp}}$.

Formulaire :

$$^{\star}F^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\,\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & -B_x & -B_y & -B_z \\ B_x & 0 & E_z/c & -E_y/c \\ B_y & -E_z/c & 0 & E_x/c \\ B_z & E_y/c & -E_x/c & 0 \end{pmatrix}\ . \tag{1}$$

Formules en coordonnées sphériques :

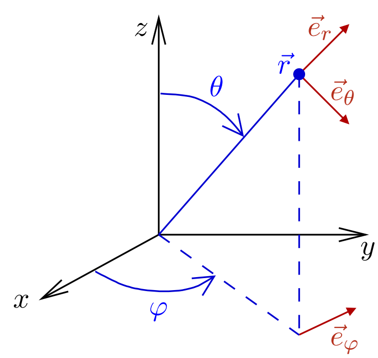
$$\vec{\nabla}\cdot\left(\frac{\vec{e}_r}{r^2}\right) = 4\pi\,\delta^{(3)}(\vec{r}\,)\ . \tag{2}$$

Si $\vec{A}(\vec{r}\,) = f(r,\theta)\,\vec{e}_\varphi$, alors

$$\vec{\nabla}\wedge\vec{A} = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(f\sin\theta)}{\partial\theta}\ \vec{e}_r - \frac{1}{r}\frac{\partial(rf)}{\partial r}\ \vec{e}_\theta\ . \tag{3}$$

Pour un champ scalaire $G(\vec{r}\,)$:

$$\vec{\nabla}\,G(r,\theta,\varphi) = \frac{\partial G}{\partial r}\ \vec{e}_r + \frac{1}{r}\,\frac{\partial G}{\partial\theta}\ \vec{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\,\frac{\partial G}{\partial\varphi}\ \vec{e}_\varphi\ . \tag{4}$$



$$\vec{a}\wedge(\vec{b}\wedge\vec{c}\,) = (\vec{a}\cdot\vec{c}\,)\,\vec{b} - (\vec{a}\cdot\vec{b}\,)\,\vec{c}\,. \tag{5}$$

$$\varepsilon_{ijk}\,\varepsilon_{k\ell m} = \delta_{i\ell}\,\delta_{jm} - \delta_{im}\,\delta_{j\ell}\ . \tag{6}$$

---

[3]On se place dans une approximation non relativiste où l'on néglige le champ magnétique que pourrait créer la charge mobile.