M1 et Magistère 2ème année 25 novembre 2016

EXAMEN d'ÉLECTRODYNAMIQUE CLASSIQUE et QUANTIQUE

Durée : 3 heures

Les calculatrices, les polycopiés et les notes de cours et de travaux dirigés sont autorisés.
Barème approximatif : A = 10 points ; B = 13 points.
La question A.4/ peut être traitée en admettant les résultats des questions précédentes. La question B.4/ est indépendante de B.3/. La question B.5/ peut être traitée en admettant les résultats des questions précédentes.

A Champ scalaire complexe, niveaux de Landau relativistes.

On étudie un champ scalaire complexe $\varphi(\underset{\sim}{X})$, $\underset{\sim}{X} = X^\mu = (ct, \vec{r}\,) = (ct, x, y, z)$. Ce champ peut être considéré comme formé de deux champs scalaires réels $\varphi_1(\underset{\sim}{X})$ et $\varphi_2(\underset{\sim}{X})$. On notera $\varphi^*(\underset{\sim}{X})$ le champ complexe conjugué du champ $\varphi(\underset{\sim}{X})$:

$$\varphi = \varphi_1 + \mathrm{i}\,\varphi_2\;, \qquad \varphi^* = \varphi_1 - \mathrm{i}\,\varphi_2\;.$$

Le système est régi par l'action $S = \dfrac{1}{c}\displaystyle\int \mathscr{L}\,\mathrm{d}^4X$. La densité lagrangienne est

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}\Big[\,(\partial^\mu\varphi)^*\,(\partial_\mu\varphi) - a^2\,\varphi^*\varphi\Big]\;, \tag{A1}$$

où $a > 0$ est une constante.

1/ Déterminer les équations du mouvement sous une forme manifestement covariante[1]. Pour cela, on rappelle qu'on peut appliquer le principe de moindre action en traitant $\varphi(\underset{\sim}{X})$ et $\varphi^*(\underset{\sim}{X})$ comme deux champs indépendants.

2/ Vérifier que les équations du mouvement admettent des solutions en ondes planes :

$$\varphi(\underset{\sim}{X}) = A\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)/\hbar}\;, \quad \text{où } A \text{ est une constante complexe.} \tag{A2}$$

(a) Quelle est la relation entre E et $\vec{p}$?

(b) On interprète $\varphi(\underset{\sim}{X})$ comme étant la fonction d'onde d'une particule élémentaire de masse m (et de spin nul). Quelle est la signification physique de E et $\vec{p}$ pour l'état décrit par l'équation (A2) ? Quelle est la valeur de la masse m ?

3/ Le champ scalaire complexe $\varphi(\underset{\sim}{X})$ décrit à présent une particule de masse m et de charge q dont le couplage au champ électromagnétique est régi par la densité lagrangienne

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}\,(D^\mu\varphi)^*\,(D_\mu\varphi) - \frac{a^2}{2}\,\varphi^*\varphi\;, \quad \text{où} \quad D_\mu = \partial_\mu + \mathrm{i}\,\frac{q}{\hbar}\,A_\mu(\underset{\sim}{X}) \quad \text{est la } \textit{dérivée covariante}. \tag{A3}$$

[1]On écrira directement les équations d'Euler-Lagrange, sans les démontrer à partir du principe variationnel.

Écrire les équations du mouvement vérifiées par le champ φ. Vous pourrez, si vous le désirez, vérifier votre résultat en vous assurant qu'il peut s'écrire sous la forme $(D_\mu D^\mu + m^2c^2/\hbar^2)\varphi = 0$.

4/ Le champ électromagnétique est décrit par le quadripotentiel

$$(A^\mu) = (0,\, -B\,y,\, 0,\, 0) \qquad \text{avec} \qquad B = \mathrm{C}^{\mathrm{ste}}\ . \tag{A4}$$

(a) Quels sont les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ associés au quadripotentiel (A4) ? Écrire la forme explicite correspondante de l'équation vérifiée par le champ φ.

(b) On cherche les solutions stationnaires: $\varphi(\underset{\sim}{X}) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}Et/\hbar}\varphi(\vec{r})$. Comme ni x ni z n'apparaissent dans l'équation déterminée à la question précédente, on a le droit de chercher ces solutions sous la forme

$$\varphi(\underset{\sim}{X}) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(x\,p_x + z\,p_z - Et)/\hbar}\,\Phi(y)\ , \tag{A5}$$

où p_x et p_z sont des constantes. Montrer alors que l'équation vérifiée par $\Phi(y)$ peut s'écrire sous la forme

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}y^2} + \frac{1}{2}m\,\omega^2(y-y_0)^2\Phi = \mathcal{E}\,\Phi\ , \tag{A6}$$

où $\omega = |q|B/m$ est la *pulsation cyclotron*. Vous exprimerez y_0 en fonction de p_x, q et B et $\mathcal{E}$ en fonction de E, p_z, m et c.

(c) Déterminer sans calcul[2] les énergies propres $\mathcal{E}_n$ de l'équation (A6) en fonction de ω et $n \in \mathbb{N}$. Montrer ensuite que le carré E_n^2 de l'énergie propre de l'état stationnaire (A5) est la somme de deux contributions, l'une correspondant à ce que l'on appelle les niveaux de Landau (mouvement cyclotron dans le plan $x0y$), et l'autre associée au mouvement relativiste libre selon Oz.

[2] On justifiera que le terme constant y_0 n'est pas pertinent pour l'expression de ces énergies.

B Effet Tcherenkov

Une particule chargée en mouvement rectiligne uniforme ne rayonne pas dans le vide. Le but de ce problème est de démontrer qu'elle peut rayonner dans un milieu diélectrique. Dans un tel milieu, la vitesse de phase c^* de l'onde électromagnétique peut être plus petite que la vitesse c de la lumière dans le vide. Il est alors permis à une particule de se déplacer à une vitesse plus élevée que c^*. Dans ces conditions un rayonnement apparaît même si la particule n'est pas accélérée (effet Tcherenkov).

On propose ici une approche simplifiée qui aboutira néanmoins à une description convenable du phénomène. Le prix à payer sera l'apparition de difficultés mathématiques et un résultat seulement semi-quantitatif (ne fournissant que l'ordre de grandeur des quantités étudiées).

Considérons un milieu diélectrique homogène et isotrope. On a dans ce cas une relation $\vec{D}(\vec{r},t) = \varepsilon_0\,\hat{\varepsilon}_r\,\vec{E}(\vec{r},t)$, où la permittivité diélectrique relative $\hat{\varepsilon}_r$ est un opérateur qui agit comme suit sur une fonction $f(t)$: la transformée de Fourier temporelle $[\hat{\varepsilon}_r f]_\omega$ de $\hat{\varepsilon}_r f(t)$ vaut $\varepsilon_r(\omega) f_\omega$ où f_ω est la transformée de Fourier de $f(t)$ et $\varepsilon_r(\omega)$ une fonction donnée qui décrit comment l'indice de réfraction $n(\omega) = \sqrt{\varepsilon_r(\omega)}$ dépend de la fréquence.

1/ On utilise la condition de jauge de Lorenz généralisée: $c^{-2}\hat{\varepsilon}_r\partial_t\phi + \vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 0$. En utilisant les équations de Maxwell rappelées dans l'appendice montrer que le champ $\vec{A}_\omega(\vec{r}\,)$ est solution de[3]

$$\left(-\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_r(\omega) - \vec{\nabla}^2\right)\vec{A}_\omega(\vec{r}\,) = \mu_0\,\vec{J}_\omega(\vec{r}\,)\ . \tag{B1}$$

Un calcul calqué sur celui qui a été fait en cours (il n'est pas demandé) montre que, dans la zone de rayonnement, la solution de (B1) est

$$\vec{A}_\omega(\vec{r}\,) = \frac{\mu_0}{4\,\pi}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(\omega)r}}{r}\int \mathrm{d}^3r'\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\vec{k}(\omega)\cdot\vec{r}\,'}\,\vec{J}_\omega(\vec{r}\,')\ ,\quad \text{où}\quad k(\omega) = \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon_r(\omega)}\quad\text{et}\quad \vec{k}(\omega) = k(\omega)\,\hat{r}\ . \tag{B2}$$

2/ On considère une particule chargée (position $P(t)$) en translation rectiligne uniforme (vitesse $\vec{v} = v\,\vec{e}_z$) dans le diélectrique. La densité de courant correspondante est $\vec{J}(\vec{r},t) = q\,v\,\delta(x)\,\delta(y)\,\delta(z - vt)\,\vec{e}_z$.

(a) Vérifier que, dans la zone de rayonnement, l'amplitude de Fourier (B2) du potentiel vecteur créé par la particule s'écrit

$$\vec{A}_\omega(\vec{r}\,) = \frac{qv\mu_0}{2}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(\omega)r}}{r}\,\delta\Big(\omega\left[1 - \sqrt{\varepsilon_r(\omega)}\,\frac{v}{c}\cos\theta\right]\Big)\ \vec{e}_z\ , \tag{B3}$$

où θ est l'angle entre $\vec{r}$ et l'axe $0z$ de la tajectoire de la particule.

(b) Définir la zone de rayonnement dans le cas qui nous intéresse et justifier que l'expression (B3) n'est pas valable pour $\omega = 0$. On va cependant l'utiliser pour tout $\omega \in \mathbb{R}$, mais on ne considèrera pas que l'argument de la distribution de Dirac s'annule pour $\omega = 0$.

[3] On rappelle la relation $\vec{\nabla}\wedge(\vec{\nabla}\wedge\vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}) - \vec{\nabla}^2\,\vec{A}$.

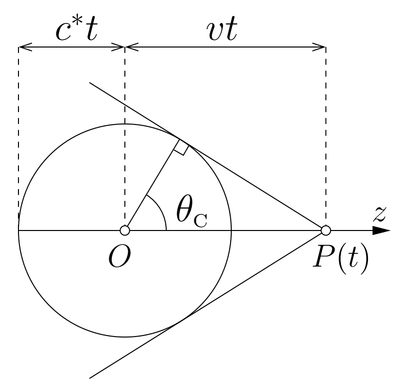
(c) On considère le cas simple où $\varepsilon_r(\omega)$ est une constante: ε_r. Pour quels points $\vec{r}$ l'argument de la distribution de Dirac dans l'expression (B3) s'annule-t-il ? Est-ce possible dans le vide ? Dans le cas du milieu diélectrique montrer l'existence d'un champ de rayonnement concentré sur une valeur donnée θ_{C} de l'angle d'émission θ.

3/ Avant d'aller plus loin on va étudier plus en détail le cas modèle où $\varepsilon_r(\omega)$ est une constante ε_r (> 1). Dans ce cas, il est possible d'obtenir l'expression exacte du champ $\vec{A}(\vec{r}, t)$ dans tout l'espace[4], soit à partir de (B1) (mais c'est un peu long), soit par analogie avec la solution du problème dans le vide (rappelée en appendice). Justifier que dans ce cas l'expression (B5) peut être adaptée en remplaçant la vitesse de la lumière par une vitesse c^* que vous exprimerez en fonction de c et ε_r.

(a) Montrer alors que le champ $\vec{A}(\vec{r}, t)$ n'est non nul qu'à l'intérieur d'un cône dont vous préciserez l'axe, le sommet, et l'ouverture angulaire.

(b) Justifier qu'un observateur immobile extérieur au cône voit progresser vers lui un front d'onde dans la direction θ_{C} identifiée en 2/(c).

(c) On veut justifier géométriquement la possibilité d'une singularité du champ dans la direction θ_{C}. On se reporte pour cela à la figure ci-contre. Soit t l'instant d'observation et P la position instantanée de la particule. L'origine des coordonnées est la position de la particule à l'instant $t = 0$. En examinant le rayon des fronts d'onde émis aux dates $t - \eta$, $t - 2\eta$ ... vérifier que le support du champ de rayonnement est le cône d'axe Oz, de sommet P et de demi ouverture $\pi/2 - \theta_{\mathrm{C}}$.



4/ On revient au problème général où ε_r dépend de ω. En utilisant les rappels de l'appendice, donner l'expression de $\partial^2 W/\partial\Omega\partial\omega$, énergie rayonnée par unité d'angle solide et de fréquence (cette expression est très singulière car elle fait intervenir le carré d'une distribution de Dirac). En effectuant l'intégration angulaire, obtenir la puissance rayonnée par unité de fréquence

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\omega} = \frac{1}{T}\int_{\text{angles}} \mathrm{d}^2\Omega\, \frac{\partial^2 W}{\partial\omega\partial\Omega} = \begin{cases} \frac{\mu_0}{4\pi} q^2 v\, \omega \left(1 - \dfrac{c^2}{n(\omega)^2 v^2}\right) & \text{si} \quad v > c/n(\omega)\ , \\ 0 & \text{sinon}\ . \end{cases} \tag{B4}$$

où $n(\omega) = \sqrt{\varepsilon_r(\omega)}$ et T est le temps total écoulé durant le processus de rayonnement. Pour calculer les intégrales des carrés de δ on utilisera la méthode indiquée en appendice.

5/ Dans le diélectrique, l'indice de réfraction s'écarte de sa valeur dans le vide ($n = 1$) seulement dans des bandes de fréquence proches des fréquences caractéristiques du milieu. Nous allons par la suite modéliser cette dépendance en prenant un indice différent de l'unité seulement dans l'intervalle $[\omega_1,\, \omega_2]$ où il prend la valeur $N > 1$.

[4] Alors que (B3) n'est valable que dans la zone de rayonnement.

(a) Calculer la puissance totale rayonnée dans un tel milieu par une particule ultra-relativiste ainsi que sa perte d'énergie par unité de distance parcourue (c'est ce que mesure un détecteur Tcherenkov).

(b) Le rayonnement se matérialise dans un réacteur-piscine par une lumière bleue autour du cœur. Supposant que cette lumière est provoquée par des électrons d'énergie initiale égale à 2 MeV, que $\omega_1 = 4 \times 10^{15}$ s^{-1}, que $\omega_2 = 5 \times 10^{15}$ s^{-1} et que $N = 1.33$, évaluer la vitesse initiale des électrons, leur perte d'énergie par unité de longueur et estimer leur distance d'arrêt. On rappelle que l'énergie de l'électron au repos est $mc^2 = 0.5$ MeV et que $q^2/4\pi\epsilon_0\, mc^2 = 3 \times 10^{-15}$ m.

Appendice

• Équations de Maxwell dans un diélectrique :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \left(\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{J} \right) \ , \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho \ , \quad \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \ , \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \ .$$

• Transformées de Fourier :

$$f_\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}t\, f(t)\, e^{\mathrm{i}\omega t} \ , \quad f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi}\, f_\omega\, e^{-\mathrm{i}\omega t} \ , \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}t\, e^{\mathrm{i}\omega\alpha t} = 2\pi\delta(\alpha\omega) \ .$$

• Solution du problème de rayonnement pour le diélectrique dans la zone de rayonnement :

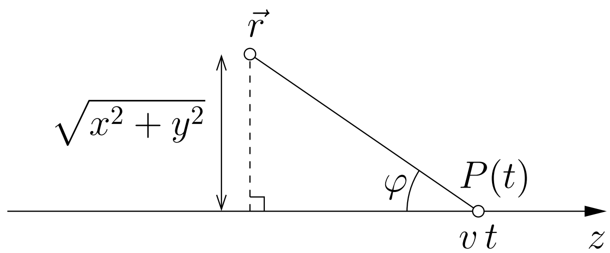
$$\vec{B}_\omega(\vec{r}\,) = \mathrm{i}\vec{k}(\omega) \wedge \vec{A}_\omega(\vec{r}\,) \ , \quad W = \int_0^{+\infty} \mathrm{d}\omega \int_{\text{angles}} \mathrm{d}^2\Omega\, \frac{\partial^2 W}{\partial\omega\partial\Omega} \quad \text{avec} \quad \frac{\partial^2 W}{\partial\Omega\partial\omega} = \frac{c\, r^2}{\mu_0\, \pi} \frac{\left|\vec{B}_\omega(\vec{r}\,)\right|^2}{\sqrt{\varepsilon_r(\omega)}} \ ,$$

et l'expression de $\vec{k}(\omega)$ est donnée en (B2).

• Champ créé par une charge en mouvement rectiligne uniforme dans le vide :

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\, v\, \vec{e}_z}{\sqrt{(z - vt)^2 - (x^2 + y^2)(\beta^2 - 1)}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\, v\, \vec{e}_z}{R\sqrt{1 - \beta^2 \sin^2 \varphi}} \ , \quad \text{où} \quad \beta = v/c \ , \qquad \text{(B5)}$$

et l'angle φ est défini sur la figure ci-dessous:



• On rencontre au cours du problème le carré d'une distribution de Dirac. On tentera de surmonter l'horreur dans laquelle nous plonge cet objet en effectuant le double remplacement

$$\delta^2(\alpha x) \to \delta(\alpha x)\delta(0) = \frac{\delta(x)}{|\alpha|}\, \delta(0) \qquad \text{et} \qquad \delta(0) \to \frac{T}{2\pi} \ ,$$

où T sera interprété comme le temps total écoulé durant le processus de rayonnement.