

EXAMEN d'ÉLECTRODYNAMIQUE CLASSIQUE et QUANTIQUE

Durée : 3 heures

Les calculatrices, les polycopiés et les notes de cours et de travaux dirigés sont autorisés.

Barème approximatif : A = 5.5 points ; B = 17.5 points.

A Lagrangien électromagnétique modifié

On étudie une théorie de l'électromagnétisme dans laquelle la densité lagrangienne du champ en interaction avec les particules est

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2\mu_0} \partial_\alpha A_\beta \partial^\alpha A^\beta - J_\alpha A^\alpha . \quad (\text{A1})$$

1/ Déterminer les équations qui régissent la dynamique du champ dans cette théorie en utilisant (sans démonstration) la forme générale des équations d'Euler-Lagrange donnée en cours.

2/ Dans quel cas les équations obtenues à la question précédente sont elles compatibles avec l'électrodynamique usuelle ?

3/ Montrer que pour tout champ quadrivectoriel $A^\alpha(\vec{r}, t)$ on a

$$\partial_\alpha \left[A_\beta \partial^\beta A^\alpha - A^\alpha \partial^\beta A_\beta \right] = \partial_\alpha A_\beta \partial^\beta A^\alpha - (\partial_\alpha A^\alpha)^2 . \quad (\text{A2})$$

Justifier alors le résultat obtenu à la question 2/ en calculant la différence entre la densité lagrangienne (A1) et la densité lagrangienne usuelle de l'électromagnétisme.

B Rayonnement d'un pulsar

Un pulsar est une étoile à neutrons en rotation rapide dont le moment magnétique n'est pas aligné avec l'axe de rotation. Le système se comporte alors comme un dipôle magnétique oscillant dont nous allons étudier le rayonnement.

On suit presque exactement la démarche de la section 3 du chapitre II du cours, mais ici on considère des phénomènes exactement périodiques et il est donc approprié de faire un développement en série de Fourier plutôt que d'utiliser des transformées de Fourier comme en cours. On note T la période de rotation de l'étoile à neutrons, et $\omega = 2\pi/T$ la pulsation correspondante. Tous les champs sont décomposés en série de Fourier sur les harmoniques de la pulsation principale ω , ainsi on écrit par exemple:

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \vec{B}_n(\vec{r}) e^{-in\omega t} , \quad \text{où} \quad \vec{B}_n(\vec{r}) = \frac{1}{T} \int_0^T dt \vec{B}(\vec{r}, t) e^{in\omega t} . \quad (\text{B1})$$

Toutes les quantités dépendantes du temps admettent un développement similaire. Les formules (II.14) et (II.15) du cours s'écrivent donc ici (on définit $\vec{k}_n = \frac{n\omega}{c} \hat{r}$ où $\hat{r} = \vec{r}/r$ et $n \in \mathbb{Z}$) :

$$\vec{B}_n(\vec{r}) = i\vec{k}_n \wedge \vec{A}_n(\vec{r}) , \quad \vec{E}_n(\vec{r}) = c \vec{B}_n(\vec{r}) \wedge \hat{r} , \quad \text{où} \quad \vec{A}_n(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{ik_n r}}{r} \int d^3 r' e^{-i\vec{k}_n \cdot \vec{r}'} \vec{J}_n(\vec{r}') . \quad (\text{B2})$$

Pour mémoire, ces expressions ne sont valables que dans la zone de rayonnement, et c'est dans cette région que nous allons travailler durant tout le problème.

B.1 Contribution dipolaire magnétique

Dans le dernier terme de (B2) on développe l'exponentielle :

$$\exp\{-i \vec{k}_n \cdot \vec{r}'\} = 1 - i k_n \hat{r} \cdot \vec{r}' + \dots \quad (\text{B3})$$

où $k_n = |\vec{k}_n| = n\omega/c$.

1/ L'étoile à neutrons est parfaitement neutre: $\rho(\vec{r}', t) \equiv 0$. En vous appuyant sur le cours, expliquez alors rapidement pourquoi le premier terme du développement (B3) donne ici une contribution nulle au potentiel vecteur.

2/ On s'occupe maintenant de la contribution aux champs (B2) du second terme du développement (B3). Cette question calculatoire (dans laquelle il faut utiliser les indications fournies dans le formulaire F) peut être traitée en admettant les résultats intermédiaires.

(a) Justifier que l'on peut écrire¹

$$(\hat{r} \cdot \vec{r}') \vec{J}_n = \frac{1}{2} \left\{ (\hat{r} \cdot \vec{r}') \vec{J}_n + (\hat{r} \cdot \vec{J}_n) \vec{r}' \right\} + \frac{1}{2} (\vec{r}' \wedge \vec{J}_n) \wedge \hat{r}. \quad (\text{B4})$$

(b) Montrer que

$$\int d^3r' \left\{ (\hat{r} \cdot \vec{r}') \vec{J}_n + (\hat{r} \cdot \vec{J}_n) \vec{r}' \right\} = - \int d^3r' \vec{r}' (\hat{r} \cdot \vec{r}') \vec{\nabla}' \cdot \vec{J}_n, \quad \text{où } \vec{\nabla}' = \begin{vmatrix} \partial_{x'} \\ \partial_{y'} \\ \partial_{z'} \end{vmatrix}. \quad (\text{B5})$$

(c) En déduire que, dans la contribution du second terme du développement (B3) à l'intégrale (B2), le terme venant du membre entre crochets du membre de droite de (B4) (que l'on appelle "quadrupolaire électrique") s'annule pour notre étoile à neutrons.

Il reste donc la contribution du dernier terme du membre de droite de (B4), soit:

$$\vec{A}_n(\vec{r}) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{i k_n e^{i k_n r}}{r} \vec{M}_n \wedge \hat{r}, \quad \text{où } \vec{M}_n = \frac{1}{2} \int d^3r' (\vec{r}' \wedge \vec{J}_n(\vec{r}')). \quad (\text{B6})$$

$\vec{M}(t) = \frac{1}{2} \int d^3r' [\vec{r}' \wedge \vec{J}(\vec{r}', t)]$ est le moment dipolaire magnétique de l'étoile à neutrons; \vec{M}_n est la $n^{\text{ième}}$ composante de son développement en série de Fourier. L'expression (B6) est la $n^{\text{ième}}$ composante de ce qu'on appelle la contribution "dipolaire magnétique" au champ rayonné.

B.2 Puissance rayonnée

1/ Montrer, en vous appuyant sur le cours, le formulaire, et les résultats précédents, que la moyenne temporelle de la norme du vecteur de Poynting est ici

$$\frac{1}{T} \int_0^T |\vec{S}(\vec{r}, t)| dt = \frac{2c}{\mu_0} \sum_{n=1}^{\infty} |\vec{B}_n(\vec{r})|^2, \quad (\text{B7})$$

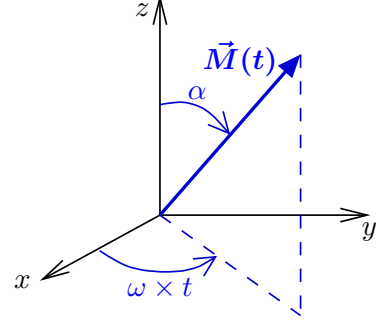
¹Dans les formules (B4), (B5) et (F2), \vec{J}_n est une notation simplifiée pour $\vec{J}_n(\vec{r}')$.

où, pour la contribution dipolaire magnétique,

$$|\vec{B}_n(\vec{r})|^2 = \left(\frac{\mu_0 k_n^2}{4\pi r}\right)^2 \left(|\vec{M}_n|^2 - |\hat{r} \cdot \vec{M}_n|^2\right). \quad (\text{B8})$$

2/ Le moment magnétique du pulsar n'est pas exactement aligné avec son axe de rotation (il est incliné d'un angle α , cf. figure ci-contre). $\vec{M}(t)$ tourne donc avec une pulsation ω autour de l'axe tout en gardant une norme fixée qu'on notera \mathfrak{M} . On écrit donc (en prenant l'axe de rotation du pulsar comme axe Oz):

$$\vec{M}(t) = \mathfrak{M} \begin{pmatrix} \sin \alpha \cos(\omega t) \\ \sin \alpha \sin(\omega t) \\ \cos \alpha \end{pmatrix}. \quad (\text{B9})$$



- (a) Montrer que dans ce cas \vec{M}_n n'est non nul que pour $n = 0$ et $n = \pm 1$, avec, par exemple, $\vec{M}_1 = \frac{1}{2}\mathfrak{M} \sin \alpha (\vec{e}_x + i \vec{e}_y)$. Donner l'expression de \vec{M}_0 et \vec{M}_{-1} .
- (b) Montrer que la distribution angulaire de puissance moyenne² rayonnée est³ :

$$\frac{d\overline{\mathcal{P}}}{d\Omega} = \frac{\mu_0}{32\pi^2} \frac{\omega^4}{c^3} \mathfrak{M}^2 \sin^2 \alpha (1 + \cos^2 \theta). \quad (\text{B10})$$

Calculer la puissance totale rayonnée $\overline{\mathcal{P}}$.

3/ Le pulsar perd de l'énergie par rayonnement, et sa vitesse de rotation diminue donc. On rappelle que l'énergie cinétique de rotation du pulsar est de la forme $E_{\text{rot}} = \frac{1}{2}I\omega^2$, où I est son moment d'inertie autour de l'axe Oz .

- (a) Écrire l'équation différentielle à laquelle obéit ω (on notera $\dot{\omega} = d\omega/dt$). Un temps caractéristique de la décroissance de la vitesse de rotation du pulsar est $\tau(t) = -\omega/\dot{\omega} = T/\dot{T}$. Exprimer τ en fonction de ω et des constantes du problème. On se place dans le cas typique où le pulsar avait, à sa formation, une pulsation initiale ω_0 très grande devant sa pulsation actuelle ω . Montrer alors que l'âge du pulsar s'exprime simplement en fonction de τ .
- (b) La nébuleuse du Crabe héberge un pulsar (appelé PSR B0531+21) dont la période $T = 0.0334$ s, avec $\dot{T} = 4.21 \times 10^{-13}$ s.s⁻¹. Évaluer l'âge de ce pulsar (en années).
- (c) Ce pulsar est probablement issu d'une supernova historique, détectée par les astronomes chinois, japonais, et arabes en 1054: l'estimation de son âge établie à la question précédente n'est donc pas tout à fait correcte. On peut corriger notre estimation en prenant en compte la faveur finie de la pulsation initiale ω_0 . Quelle est la valeur de $T_0 = 2\pi/\omega_0$ qui correspond à l'âge réel ?⁴

²Le terme "moyenne" se rapporte ici à la moyenne temporelle: $\overline{\mathcal{P}} = T^{-1} \int_0^T dt \mathcal{P}(t)$.

³on utilise un système de coordonnées sphériques avec les conventions usuelles pour les angles θ (=colatitude = "polar angle" en anglais) et φ (=longitude = "azimuthal angle"). $d\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi$ est l'élément d'angle solide.

⁴Remarque culturelle: une autre source d'erreur dans l'estimation de l'âge de ce pulsar réside dans le fait que son rayonnement n'est pas exactement dipolaire magnétique, cf. fr.wikipedia.org/wiki/Indice_de_freinage.

4/ Il est intéressant d'évaluer le champ magnétique qui règne à la surface du pulsar. Nos calculs n'étant valables que dans la zone de rayonnement, pour avoir un ordre d'idée grossier, on utilise la formule de magnéto-statique (F4) pour déterminer le champ en surface.

- (a) Exprimer la valeur B_{PN} du champ magnétique au pôle Nord magnétique⁵ en fonction de \mathfrak{M} et du rayon R du pulsar.
- (b) On rappelle que le moment d'inertie d'une sphère homogène de masse M_{p} est $I = \frac{2}{5}M_{\text{p}}R^2$. En déduire une expression de B_{PN} en fonction de M_{p} (masse du pulsar), R , T , \dot{T} , α et de constantes fondamentales.
- (c) On considère toujours le pulsar de la nébuleuse du Crabe, dont les caractéristiques sont: $M_{\text{p}} = 1.4 M_{\odot} = 2.8 \times 10^{30}$ kg et $R = 10$ km. On rappelle que $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ USI et, faute de mieux, on prendra $\sin \alpha = 1$. Exprimer la valeur correspondante de B_{PN} en Tesla.

F Formulaire

On pourra utiliser toutes les formules suivantes sans démonstration. Il en va d'ailleurs de même pour les résultats figurant dans les notes de cours, il suffit juste d'indiquer le numéro d'équation, par exemple au lieu d'utiliser (F1) on aurait pu citer (Z.16).

- Double produit vectoriel:

$$\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c}. \quad (\text{F1})$$

- En notant x'_k la $k^{\text{ième}}$ coordonnée cartésienne de \vec{r}' ($k \in \{1, 2, 3\}$) et $J_n^{(k)}$ la $k^{\text{ième}}$ coordonnée cartésienne de \vec{J}_n , on a⁶:

$$\vec{\nabla}' \cdot (x'_k (\hat{r} \cdot \vec{r}') \vec{J}_n) = x'_k (\hat{r} \cdot \vec{r}') \vec{\nabla}' \cdot \vec{J}_n + (\hat{r} \cdot \vec{r}') J_n^{(k)} + x'_k (\hat{r} \cdot \vec{J}_n), \quad (\text{F2})$$

où \vec{J}_n est une notation simplifiée pour $\vec{J}_n(\vec{r}')$ et $\vec{\nabla}'$ est défini dans (B5).

- Pour un champ réel qui admet le développement (B1) on a un théorème de Parseval-Plancherel:

$$\frac{1}{T} \int_0^T dt \vec{B}^2(\vec{r}, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| \vec{B}_n(\vec{r}) \right|^2, \quad (\text{F3})$$

où le module au carré d'un vecteur complexe est la somme du carré des modules de ses composantes cartésiennes.

- Champ magnétique créé par un dipôle magnétique stationnaire \vec{M} :

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} \left[3(\vec{M} \cdot \hat{r})\hat{r} - \vec{M} \right]. \quad (\text{F4})$$

⁵À ne pas confondre avec le pôle Nord géographique qui est situé sur l'axe de rotation. Le pôle Nord magnétique est le point d'intersection de la surface du globe avec l'axe qui porte le moment dipolaire magnétique.

⁶Pas de notation covariante ici: la position (haute ou basse) de l'indice k est fixée par un choix esthétique.