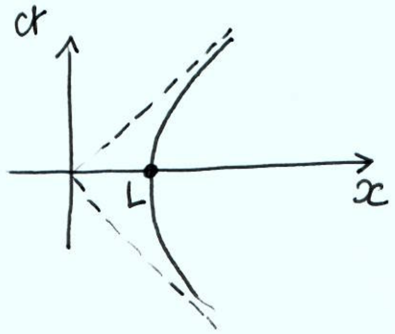
Mouvement hyperbolique



$$\underset{\sim}{X} = (ct, x(t)) \qquad \underset{\sim}{X}^2 = c^2t^2 - x^2 = -L^2$$

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = \frac{L}{2}\,\frac{2c^2t/L^2}{\sqrt{1+(ct/L)^2}} = \frac{c^2t}{x(t)}$$

$$c^2dt'^2 = c^2dt^2 - dx^2 \underset{\uparrow}{=} [c^2 - v^2(t)]dt^2$$

event = position de la fusée

donc
$$\begin{cases} dt' = \sqrt{1-\frac{v^2(t)}{c^2}}\,dt = \sqrt{1-\frac{c^2t^2}{L^2+c^2t^2}}\,dt \\ \quad = \frac{1}{\sqrt{1+c^2t^2/L^2}}\,dt \end{cases}$$

en intégrant et en prenant $t'=0$ lorsque $t=0$:

(on pose $u = \frac{ct}{L}$) $\quad t' = \frac{L}{c}\int_0^{ct/L} \frac{du}{\sqrt{1+u^2}}$

$$\boxed{ct'/L = \operatorname{arsinh}(ct/L)}$$

donc
$$\begin{cases} ct/L = \sinh(ct'/L) \\ x(t)/L = \sqrt{1+(ct/L)^2} = \cosh(ct'/L) \end{cases}$$

$\underset{\sim}{U} = \frac{d\underset{\sim}{X}}{dt'}$ $\quad dt'$ = temps propre est un invariant de Lorentz, donc $\underset{\sim}{U}$ est un "bon" quadri-vct.

$\underset{\sim}{U} = \left(c\frac{dt}{dt'}, \frac{dx}{dt'}\right)$ et
$$\begin{cases} c\,dt/L = \frac{c\,dt'}{L}\cosh(ct'/L) = c\,dt'\,x(t)/L^2 \\ dx/L = \frac{c\,dt'}{L}\,\mathrm{sh}(ct'/L) = \frac{c^2t\,dt'}{L^2} \end{cases}$$

donc
$$\underset{\sim}{U} = c\left(\cosh\left(\frac{ct'}{L}\right), \sinh\left(\frac{ct'}{L}\right)\right) = c\left(\frac{x(t)}{L}, \frac{ct(t')}{L}\right)$$

(au passage on peut vérifier que $\underset{\sim}{U}^2 = +c^2$ comme il se doit)

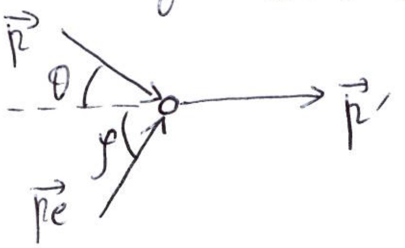
$$\underset{\sim}{\Gamma} = \frac{d\underset{\sim}{U}}{dt'} = \frac{c}{L}\left(\frac{dx}{dt'}, c\frac{dt}{dt'}\right) = \frac{c}{L}\left(\frac{c^2}{L}t, \frac{cx}{L}\right) = \frac{c^2}{L^2}\underset{\sim}{X}$$

donc $\underset{\sim}{\Gamma}^2 = \frac{c^4}{L^4}\underset{\sim}{X}^2 = -c^4/L^2$

mouvement à accélération propre constante (rectiligne dans $\mathbb{R}$ puisque $y = z = 0$)

$\boxed{\text{Compton inverse}}$

Dans le Réf. $\mathcal{R}'$ où e^- est immobile après la collision :



on a $\tilde P_e + \tilde P = \tilde P'_e + \tilde P'$

soit $\tilde P_e = \tilde P'_e + \tilde P' - \tilde P$ – en prenant la pseudo norme on a :

$$0 = \tilde P'_e \cdot \tilde P' - \tilde P'_e \cdot \tilde P - \tilde P' \cdot \tilde P$$

où $\tilde P'_e = (m_e c, \vec 0)$ et $\tilde P = \left(\frac{\mathcal{E}}{c}, \vec p\right)$ [$\tilde P'$ = expression identique]

cela donne :

$$0 = m_e(\mathcal{E}' - \mathcal{E}) - \frac{\mathcal{E}\mathcal{E}'}{c^2}(1-\cos\theta)$$

en écrivant $\mathcal{E} = \frac{hc}{\lambda}$ cela donne : $\frac{1}{\lambda'} - \frac{1}{\lambda} = \frac{h}{m_e c}\,\frac{1-\cos\theta}{\lambda\lambda'}$

soit $\boxed{\Delta\lambda = \lambda - \lambda' = \frac{h}{m_e c}(1-\cos\theta)}$

$$\Delta\lambda = \frac{6.6\ 10^{-34}}{9.1\ 10^{-31} \times 3.10^{8}}\left(\underbrace{1-\cos(1\,\text{rad})}_{0.46}\right) = 0.11\ 10^{-11}\,\text{m} = 1.1\ 10^{-2}\,\text{Å} \ll \lambda \sim 1\,\text{mm}$$

▨ traitement classique : en se référant au schéma ci-dessus.

$\vec p_e = \vec p\,' - \vec p$ et $\frac{p_e^2}{2m} + cp = cp'$ avec $p = \frac{h\nu}{c}$, $p' = \frac{h\nu'}{c}$

cette eq conduit à $p_e^2 = p'^2 + p^2 - 2pp'\cos\theta$ on a donc, en reportant dans la conservation de l'énergie :

$$\frac{h^2}{2mc^2}\underbrace{(\nu'^2+\nu^2-2\nu\nu'\cos\theta)}_{(\nu-\nu')^2 + 2\nu\nu'(1-\cos\theta)} = h(\nu'-\nu)$$

comme ν et ν' sont proches, on néglige le terme en $(\nu-\nu')^2$. Il reste :

$$\frac{h}{mc^2}(1-\cos\theta) = \frac{\nu'-\nu}{\nu\nu'} = \frac{1}{\nu} - \frac{1}{\nu'} = \frac{\lambda-\lambda'}{c}$$

on retrouve la formule de Compton

courant dans un fil

$$\underset{\sim}{J_i} = \begin{pmatrix} c\rho_i \\ J_i = 0 \end{pmatrix} \qquad \underset{\sim}{J_e} = \begin{pmatrix} c\rho_e \\ J_e = V\rho_e \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} \lambda = S(\rho_e + \rho_i) = 0 \\ I = S(J_e + J_i) = -V\lambda_0 \end{cases}$$

avec la formule (1), dans $\mathcal{R}$: $\vec{E} = \vec{0}$ et $\vec{B} = \frac{\mu_0}{2\pi}\left(\frac{-V\lambda_0}{r}\right)\vec{e_\theta}$

▨ $\begin{pmatrix} c\rho_i' \\ J_i' \end{pmatrix} = \underset{\sim}{J_i'} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c\rho_i \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c\gamma\rho_i = c\rho_i' \\ -\beta\gamma c\rho_i = -V\rho_i' \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} c\rho_e' \\ J_e' \end{pmatrix} = \underset{\sim}{J_e'} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c\rho_e \\ V\rho_e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c\gamma\rho_e(1-\beta^2) = c\rho_e/\gamma \\ \gamma\rho_e(-\beta c + V) = 0 \end{pmatrix}$

où l'on a utilisé le fait que dans $\mathcal{R}'$ la section du fil est inchangée : $S' = S$

$$\begin{cases} \lambda' = S'(\rho_e' + \rho_i') = S(\rho_e/\gamma + \gamma\rho_i) = \lambda_0\left(\gamma - \frac{1}{\gamma}\right) = \lambda_0\gamma\beta^2 \\ I' = -VS\rho_i' = -V\gamma\lambda_0 \end{cases}$$

▨ dans $\mathcal{R}$ on peut écrire $S\rho_i = \lambda_i = q_i/d_i$ où λ_i est la densité linéique de charge ionique, q_i la charge d'un ion et d_i la distance entre 2 ions. Dans $\mathcal{R}'$ on a $\lambda_i' = q_i/d_i'$ avec des notations évidentes. Comme $\mathcal{R}$ est le réf. au repos des ions, la contraction des longueurs donne $d_i' = d_i/\gamma$ donc $\lambda_i' = \gamma\lambda_i = \gamma\lambda_0$

Pour les $\bar{e}$, le réf. au repos c'est $\mathcal{R}'$ et le m̂ raisonnement conduit à $\lambda_e' = \lambda_e/\gamma = -\lambda_0/\gamma$. Donc au total $\lambda' = \lambda_0\left(\gamma - \frac{1}{\gamma}\right) = \lambda_0\gamma\beta^2$ comme on a trouvé en 3/b).

* Alors, la formule (1) donne, dans $\mathcal{R}'$:

$\vec{E}' = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda_0\gamma\beta^2}{r}\vec{e_r} = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{\lambda_0\gamma V^2}{r}\vec{e_r}$ et $\vec{B}' = \frac{\mu_0}{2\pi}\left(\frac{-V\gamma\lambda_0}{r}\right)\vec{e_\theta}$ (on a utilisé le fait que $r' = r$)

* selon la formule (2) :

$$\begin{cases} \vec{E}' = \gamma\,\vec{V}\wedge\vec{B} = \gamma V\frac{\mu_0}{2\pi}\left(\frac{-V\lambda_0}{r}\right)\underbrace{\vec{e_x}\wedge\vec{e_\theta}}_{-\vec{e_r}} = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{\lambda_0\gamma V^2}{r}\vec{e_r} \\ \vec{B}' = \gamma\vec{B} \end{cases}$$

c'est en accord avec les expressions ci-dessus.