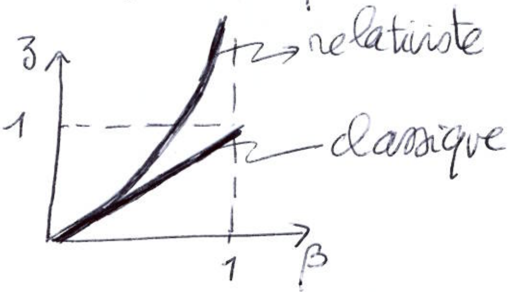
Modèle de Milne

① * $\Delta\tau = \sqrt{1-\beta^2}\,\Delta t$ (en méca-classique : $\Delta\tau = \Delta t$)

* entre les 2 émissions l'étoile a parcouru une distance $V\Delta t$ cette distance sera parcourue par la lumière en un temps $V\Delta t/c$ qui accroît la durée entre la réception sur Terre des 2 signaux. On aura donc $\Delta t_r = (1+\beta)\Delta t$ (résultat également valable en méca classique)

* $1+z = \dfrac{\Delta t_r}{\Delta\tau} = \sqrt{\dfrac{1+\beta}{1-\beta}}$ ($\simeq 1+\beta$ lorsque $\beta \ll 1$)

on a



Pour la galaxie étudiée on a donc $1+z = \dfrac{\lambda}{\lambda_0} = \dfrac{9500}{3727}$

puisque :

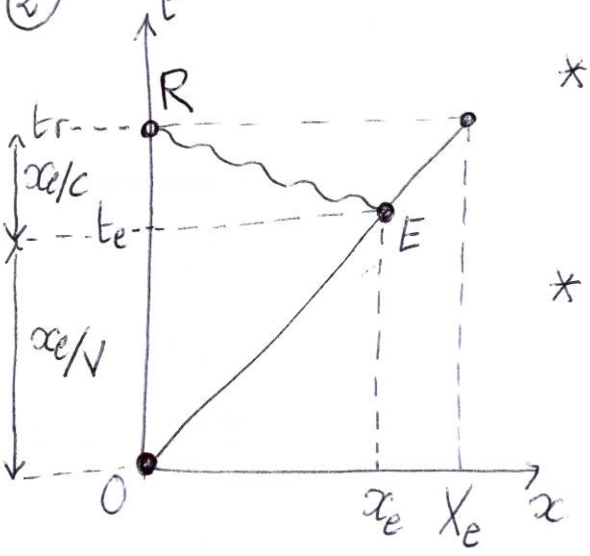
$c\,\Delta\tau = \lambda_0$ — période propre ; λ_0 : longueur d'onde mesurée

$c\,\Delta t_r = \lambda$ — Δt_r : période temporelle mesurée

soit $z = 1.55$

puis $\beta = \dfrac{(1+z)^2 - 1}{(1+z)^2 + 1} = 0,733$

②



* $t_r = \dfrac{x_e}{c}\left(1 + \dfrac{1}{\beta}\right) = \dfrac{x_e}{c}\,\dfrac{2(1+z)^2}{2z+z^2}$

en inversant on a x_e en fct de t_r et z.

* on a bien-sûr $X_e = V t_r$ donc dans notre modèle $H_0 = t_r^{-1}$ = c'est l'inverse de l'âge de l'univers.

* pour la galaxie étudiée $X_e = \beta \times c t_r$ où $c t_r = 14\,10^9$ a.l.

soit $X_e \simeq 10,3\,10^9$ al. $x_e = \dfrac{\beta c t_r}{1+\beta} = 5,92\,10^9$ al.

Miroir en mvt

$\underset{\sim}{K_i} = \left(\frac{\omega_i}{c}, \vec{k_i}\right)$ avec $|\vec{k_i}| = \omega_i/c$ le passage de $\underset{\sim}{K_i}'$ à $\underset{\sim}{K_i}$ s'écrit :

$$\underbrace{\frac{\omega_i}{c}\begin{pmatrix}1\\ \cos\alpha_i\\ -\sin\alpha_i\end{pmatrix}}_{\underset{\sim}{K_i}} = \underbrace{\begin{pmatrix}\gamma & \beta\gamma & 0\\ \beta\gamma & \gamma & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ \cos\alpha_i'\\ -\sin\alpha_i'\end{pmatrix}\times\frac{\omega'}{c}}_{\underset{\sim}{K_i}'} \Rightarrow \begin{cases}\omega_i = \gamma\omega'(1+\beta\cos\alpha_i')\\ \cos\alpha_i = \gamma\frac{\omega'}{\omega_i}(\beta+\cos\alpha_i')\\ \sin\alpha_i = \frac{\omega'}{\omega_i}\sin\alpha_i'\end{cases}$$

d'où $\boxed{\cos\alpha_i = \frac{\cos\alpha_i'+\beta}{1+\beta\cos\alpha_i'} \quad \text{et} \quad \sin\alpha_i = \frac{\sin\alpha_i'}{\gamma(1+\beta\cos\alpha_i')}}$

dans $\mathcal{R}'$ on a $\underset{\sim}{K_r} = \frac{\omega_i'}{c}\begin{pmatrix}1\\ -\cos\alpha_i'\\ -\sin\alpha_i'\end{pmatrix}$ et dans $\mathcal{R}$ $\underset{\sim}{K_r} = \frac{\omega_r}{c}\begin{pmatrix}1\\ -\cos\alpha_r\\ -\sin\alpha_r\end{pmatrix}$

ici aussi $\frac{\omega_r}{c}\begin{pmatrix}1\\ -\cos\alpha_r\\ -\sin\alpha_r\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\gamma & \beta\gamma & 0\\ \beta\gamma & \gamma & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ -\cos\alpha_i'\\ -\sin\alpha_i'\end{pmatrix}\times\frac{\omega_i'}{c}$

donc $\omega_r = \gamma\omega_i'(1-\beta\cos\alpha_i')$, $-\cos\alpha_r = \gamma\frac{\omega'}{\omega_r}(\beta-\cos\alpha_i')$, $\sin\alpha_r = \frac{\omega'}{\omega_r}\sin\alpha_i'$

d'où $\boxed{\cos\alpha_r = \frac{\cos\alpha_i'-\beta}{1-\beta\cos\alpha_i'} \quad \text{et} \quad \sin\alpha_r = \frac{\sin\alpha_i'}{\gamma(1-\beta\cos\alpha_i')}}$

on a donc $\frac{\sin\alpha_r}{\sin\alpha_i} = \frac{1+\beta\cos\alpha_i'}{1-\beta\cos\alpha_i'}$ $\quad \frac{\omega_r}{\omega_i} = \frac{\omega_r}{\omega'}\times\frac{\omega'}{\omega_i} = \frac{1-\beta\cos\alpha_i'}{1+\beta\cos\alpha_i'}$

et $\frac{\cos\alpha_r+\beta}{\cos\alpha_i-\beta} = \frac{\cos\alpha_i'(1-\beta^2)}{1-\beta\cos\alpha_i'}\times\frac{1+\beta\cos\alpha_i'}{\cos\alpha_i'(1-\beta^2)} = \frac{1+\beta\cos\alpha_i'}{1-\beta\cos\alpha_i'}$

d'où $\boxed{\frac{\sin\alpha_r}{\sin\alpha_i} = \frac{\omega_i}{\omega_r} = \frac{1+\beta\cos\alpha_i'}{1-\beta\cos\alpha_i'} = \frac{\cos\alpha_i+\beta}{\cos\alpha_i-\beta}}$

cela permet d'écrire $\beta = \frac{\cos\alpha_i\sin\alpha_r - \sin\alpha_i\cos\alpha_r}{\sin\alpha_i+\sin\alpha_r} = \frac{\sin(\alpha_r-\alpha_i)}{\sin\alpha_i+\sin\alpha_r}$

dans la limite $\alpha_i\to 0$ cela donne $\omega_r = \omega_i\frac{1-\beta}{1+\beta}$ (cf. exo TD mesure de vitesse)