L3 et Magistère 1ère année

Physique fondamentale — 11 mai 2018

EXAMEN de RELATIVITÉ

Durée : 2 heures et 30 mns

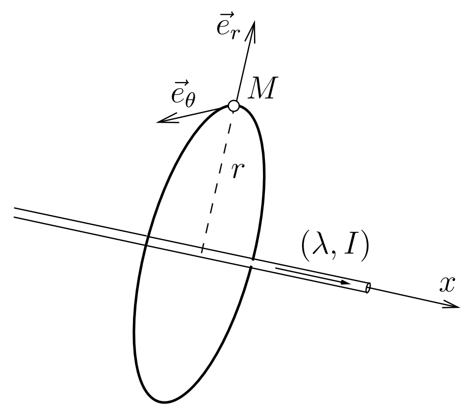
Les calculatrices sont autorisées. Barème indicatif : I = 6 pts ; II = 7 pts ; III = 7 pts.

Formulaire – Rappel de cours

- $\int \mathrm{d}x\,(1+x^2)^{-1/2} = \operatorname{arsinh}(x)$, où arsinh est la récriproque de sinh.
- $h = 6{,}6 \times 10^{-34}$ J.s; $c = 3\times 10^{8}$ m.s^{-1}; masse de l'électron: $m_e = 9{,}1\times 10^{-31}$ kg.
- On considère deux référentiels inertiels $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$. $\mathcal{R}'$ est animé par rapport à $\mathcal{R}$ d'un mouvement de translation rectiligne uniforme à la vitesse constante $\vec{V} = V\,\vec{e}_x$. Si un quadrivecteur a pour expressions respectives $\underset{\sim}{A}$ et $\underset{\sim}{A}'$ dans $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$, on a $A'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}\,A^{\nu}$ avec

$$\Lambda^{\mu}{}_{\nu} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \;, \quad \text{où} \quad \beta = V/c \quad \text{et} \quad \gamma = (1-\beta^2)^{-1/2}\;.$$

- Un objet de longueur L' au repos dans $\mathcal{R}'$ aura, dans $\mathcal{R}$, une longueur $L = L'/\gamma$.
- Un fil conducteur infiniment long et fin, assimilé à l'axe Ox, parcouru par un courant I et portant une charge linéique λ, crée, en un point M situé à une distance r du fil, des champs électrique et magnétique ayant pour expression:



$$\vec{E}(M) = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\,\frac{\lambda}{r}\,\vec{e}_r\;, \quad \text{et} \quad \vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{2\pi}\,\frac{I}{r}\,\vec{e}_\theta\;. \qquad (1)$$

Dans ces expressions λ et I sont des quantités algébriques, $\vec{e}_r$ et $\vec{e}_\theta$ sont définis sur la figure ci-contre et ne dépendent pas du signe de λ ou I.

- Lors d'un changement de référentiel inertiel, les champs électrique et magnétique dans le nouveau référentiel [$\vec{E}'$ et $\vec{B}'$] s'expriment en fonction de ceux dans l'ancien [$\vec{E}$ et $\vec{B}$] selon les relations

$$\vec{E}' = \gamma\left(\vec{E} + \vec{V}\wedge\vec{B}\right) + (1-\gamma)\,\frac{\vec{V}\cdot\vec{E}}{V^2}\,\vec{V}\;, \quad \text{et} \quad \vec{B}' = \gamma\left(\vec{B} - \frac{\vec{V}}{c^2}\wedge\vec{E}\right) + (1-\gamma)\,\frac{\vec{V}\cdot\vec{B}}{V^2}\,\vec{V}\;, \qquad (2)$$

où $\vec{V}$ est la vitesse du nouveau référentiel par rapport à l'ancien.

I Mouvement hyperbolique

Dans le référentiel du laboratoire $\mathcal{R}$, une fusée assimilée à un point matériel suit une trajectoire d'équation horaire: $x(t) = L\sqrt{1+(ct/L)^2}$ $(L > 0)$ et $y(t) = z(t) = 0$. On notera $\mathcal{R}'$ le référentiel de la fusée, ou référentiel propre.

1) a) Dans un diagramme d'espace-temps (x, ct), représenter la ligne d'univers de la fusée dans $\mathcal{R}$.

b) Dans $\mathcal{R}$, donner l'expression du quadrivecteur position de la fusée, $\underset{\sim}{X}$. Calculer sa pseudo-norme $\underset{\sim}{X}^2$, montrer qu'elle a une valeur constante et donner cette valeur.

2) Exprimer la vitesse $v(t)$ de la fusée dans $\mathcal{R}$, en fonction de t, L et c puis en fonction de t, c et x.

3) On considère deux positions successives de la fusée, séparés, dans $\mathcal{R}$, par un intervalle de temps $\mathrm{d}t$. On notera $\mathrm{d}t'$ et $\mathrm{d}s'$ les intervalles de temps et d'espace-temps correspondants dans $\mathcal{R}'$.

a) Exprimer l'intervalle d'espace-temps $\mathrm{d}s$ correspondant dans $\mathcal{R}$. Exprimer alors $\mathrm{d}t'$ en fonction de $\mathrm{d}t$. En utilisant le résultat de la question 2), montrer qu'en prenant $t' = 0$ à $t = 0$, on obtient $c\,t' = L \times \operatorname{arsinh}(c\,t/L)$.

b) Exprimer alors t puis x en fonction du temps propre t' ainsi que de L et c.

c) On définit $\underset{\sim}{U} = \mathrm{d}\underset{\sim}{X}/\mathrm{d}t'$. Justifier que $\underset{\sim}{U}$ est effectivement un quadri-vecteur. Comment s'appelle-t-il ? Exprimer $\underset{\sim}{U}$ en fonction de t', c et L.

d) Exprimer enfin le quadrivecteur accélération $\underset{\sim}{\Gamma}$ de la fusée d'abord en fonction de t' puis en fonction de t et x. Calculer sa pseudo-norme. Comment caractériser un tel mouvement ?

II Diffusion Compton inverse

Dans l'Univers jeune, des masses de gaz d'hydrogène se contractent pour former des galaxies et on nomme ces systèmes amas de galaxies. En traversant un amas de galaxies, les photons du rayonnement de fond cosmique (corps noir à 2,7 K) subissent des collisions avec les électrons qui augmentent leur énergie: c'est l'effet Compton inverse. On considère donc la diffusion d'un photon de fréquence ν et d'impulsion $\vec{p}$ par un électron d'impulsion $\vec{p}_e$, d'énergie $\mathcal{E}_e$ et de facteur de Lorentz γ. Pour décrire ce processus, *on se place dans $\mathcal{R}'$ le référentiel propre de l'électron après la collision* et on suppose que le photon diffusé (de fréquence ν' et d'impulsion $\vec{p}\,'$) se propage selon l'axe Ox. L'angle entre Ox et l'impulsion du photon incident est θ et l'angle entre Ox et $\vec{p}_e$ sera noté φ.

0) *Question de cours:* Rappeler la définition du quadrivecteur impulsion $\underset{\sim}{P}$ d'une particule de masse m et de vitesse $\vec{v}$. Que vaut la norme de $\underset{\sim}{P}$? Exprimer alors $\underset{\sim}{P}$ en fonction de $\mathcal{E}$ et $\vec{p}$, énergie totale et impulsion relativiste de la particule. Rappeler alors la relation entre $\mathcal{E}$, p et m.

1) Faire un schéma représentant les impulsions et les angles θ et φ au cours de la diffusion.

2) On cherche à exprimer la variation de longueur d'onde du photon $\Delta\lambda = \lambda - \lambda'$.

a) Écrire la conservation de la quadri-impulsion au cours de la collision en utilisant les quadrivecteurs $\underset{\sim}{P}$, $\underset{\sim}{P}_e$, $\underset{\sim}{P}'$, $\underset{\sim}{P}'_e$ du photon et de l'électron avant, puis après, la collision.

b) Établir l'expression de $\Delta\lambda$ en fonction de $\cos\theta$ et de la longueur d'onde de Compton $\lambda_{\mathrm{C}} = h/(m_e c)$. Calculer sa valeur sachant que $\theta = 1$ rad. Pour $\lambda = 1$ mm (valeur typique pour le fond cosmique), que peut-on dire de $\Delta\lambda/\lambda$?

3) Reprendre le calcul cinématique en écrivant la conservation de l'énergie et de l'impulsion dans le cas non-relativiste [avec en particulier $\mathcal{E}_e = p_e^2/(2m_e)$] et montrer qu'on aboutit à

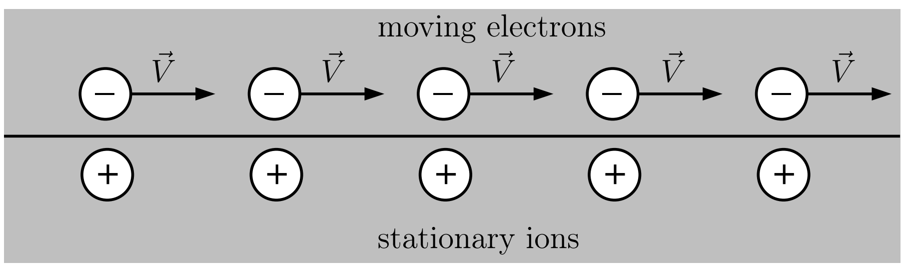
$$\nu' - \nu = \frac{h}{2\,m_e c^2}\left(\nu^2 + \nu'^2 - 2\nu\nu'\cos\theta\right) = \frac{h}{2\,m_e c^2}\left[(\nu-\nu')^2 + 2\nu\nu'(1-\cos\theta)\right] \ .$$

Montrer alors qu'on retrouve l'expression de $\Delta\lambda$ obtenue à la question 2).b) en faisant une approximation que l'on peut légitimer *a posteriori* pour des photons du fond cosmique.

Cette distorsion du rayonnement de fond cosmique à 2,7 K a été étudiée théoriquement par deux physiciens russes Sunyaev et Zel'dovich dans les années 60. Elle est depuis mesurée régulièrement et permet de tracer la masse des grandes structures de l'Univers et de contraindre les paramètres cosmologiques tels que l'âge de l'Univers.

III Courant dans un fil

On considère un fil rectiligne d'axe Ox. Le fil contient des charges positives (des ions) immobiles correspondant à une charge électrique volumique $\rho_{\rm i}$ et une densité de courant $\vec{J}_{\rm i} = \vec{0}$. Il y a aussi des électrons (densité de charge $\rho_{\rm e}$) se déplaçant à la vitesse constante $\vec{V} = V\,\vec{e}_x$ créant une densité de courant $\vec{J}_{\rm e} = \rho_{\rm e}\vec{V}$. Le fil étant globalement neutre, la densité totale de charge vaut $\rho_{\rm i} + \rho_{\rm e} = 0$. Le système est schématiquement représenté sur la figure ci-dessous. On note $\mathcal{R}$ le référentiel dans lequel est tracée la figure.



1/ Les quadri-courants associés à chaque type de charge seront notés $\underset{\sim}{J}_{\rm i}$ et $\underset{\sim}{J}_{\rm e}$. Écrire leurs composantes dans le référentiel $\mathcal{R}$.

2/ Déterminer l'expression des champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ dans $\mathcal{R}$ en un point M situé à une distance r du fil en fonction de la quantité $\lambda_0 = S\rho_{\rm i}$, où S est l'aire de la section droite du fil [cf. formules (1)].

3/ On considère un référentiel $\mathcal{R}'$ lié aux électrons: $\mathcal{R}'$ se déplace à vitesse constante $V\,\vec{e}_x$ par rapport à $\mathcal{R}$.

(a) Déterminer les densités de charge ($\rho'_{\rm i}$ et $\rho'_{\rm e}$) et de courant ($J'_{\rm i}$ et $J'_{\rm e}$) dans $\mathcal{R}'$.

(b) Que valent la densité linéique totale de charges λ' et le courant total I' dans $\mathcal{R}'$? Exprimer les résultats en fonction de λ_0, γ et V (ou β).
Indication: on aura besoin de donner la valeur de la section S' du fil dans $\mathcal{R}'$.

(c) La densité linéique de charges λ' n'est pas nulle, contrairement à ce qui se passe dans $\mathcal{R}$. Expliquer ce phénomène en retrouvant, grâce au concept de contraction des longueurs, l'expression de λ' obtenue à la question précédente.
Indication: cf. formulaire. Cette question nécessite peu de calculs, mais on exigera une discussion précise et argumentée.

(d) Déterminer alors l'expression des champs $\vec{E}'$ et $\vec{B}'$ dans $\mathcal{R}'$ en utilisant les formules (1).

4/ Retrouver les résultats de la question **3**/(d) en utilisant les relations (2).