L3 et Magistère 1$^{\text{ème}}$ année 7 mars 2018

EXAMEN PARTIEL de RELATIVITÉ

Durée : 2 heures

Les calculatrices sont autorisées. Barème approximatif : A = 13 pts ; B = 7 pts.

Formulaire – Rappel de cours

On considère deux référentiels inertiels $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$. $\mathcal{R}'$ est animé par rapport à $\mathcal{R}$ d'un mouvement de translation rectiligne uniforme à la vitesse $\vec{V} = V\,\vec{e}_x$. Si un quadri-vecteur a pour coordonnées respectives $\underset{\sim}{A}$ et $\underset{\sim}{A}'$ dans $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$, on a $A'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}\, A^{\nu}$ avec

$$\Lambda^{\mu}{}_{\nu} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} , \quad \text{où} \quad \beta = V/c \quad \text{et} \quad \gamma = (1-\beta^2)^{-1/2} \, .$$

Pour inverser la relation entre $\underset{\sim}{A}$ et $\underset{\sim}{A}'$ il suffit de changer le signe de β dans l'expression ci-dessus.

A Modèle cosmologique de Milne

Voici un modèle du Big Bang[1] : à l'instant $t' = 0$ dans un référentiel inertiel $\mathcal{R}'$, des points matériels (les galaxies) sont émis depuis l'origine dans toutes les directions, chacun ayant une vitesse donnée qui reste constante au cours du temps. Leurs trajectoires dans $\mathcal{R}'$ sont donc de la forme $\vec{r}\,' = \vec{v}\,' \times t'$.

1/ Soit une galaxie particulière : la nôtre. Soit $\mathcal{R}$ le référentiel qui lui est attaché. On choisit dans $\mathcal{R}$ le même évènement origine que dans $\mathcal{R}'$. Expliquer pourquoi :

(a) Le référentiel $\mathcal{R}$ est inertiel.

(b) Dans $\mathcal{R}$, comme dans $\mathcal{R}'$, la vitesse d'une galaxie est constante au cours du temps.

(c) Les trajectoires des galaxies dans $\mathcal{R}$ sont de la forme $\vec{r} = \vec{v} \times t$: les galaxies s'éloignent à vitesse constante de l'origine spatiale (qui, dans $\mathcal{R}$, est la Terre).

Dans toute la suite on s'intéresse à une galaxie particulière (différente de la nôtre) et on prendra pour axe $0x$ l'axe passant par cette galaxie et orienté de la Terre vers cette galaxie.

2/ Décalage vers le rouge. La galaxie émet des impulsions lumineuses périodiques séparées l'une de la suivante par un intervalle de temps de durée $\Delta\tau$ dans son référentiel propre.

(a) Quel est la valeur correspondante Δt dans $\mathcal{R}$? On notera $\beta = V/c$ où V est la vitesse de la galaxie dans $\mathcal{R}$.

(b) Soit $\Delta t_{\rm r}$ la durée entre la réception sur Terre de deux signaux consécutifs. Exprimer $\Delta t_{\rm r}$ en fonction de Δt et β.

---

[1] Version simplifiée d'un ancien modèle, dû à E. A. Milne (1935), dans lequel les galaxies sont décrites comme des objets en mouvement dans un univers statique, ce qui est erroné : c'est l'univers qui est en expansion, en première approximation les galaxies sont statiques.

(c) On appelle décalage vers le rouge (redshift) la quantité $z = \Delta t_\mathrm{r}/\Delta\tau - 1$. Exprimer z en fonction de β. Quelle serait la valeur de z en mécanique classique ? Tracer les deux courbes (classique et relativiste) donnant z en fonction de β sur un même graphe.

(d) La raie spectrale [O II] a une longueur d'onde $\lambda_0 = 3727$ Å dans son référentiel propre. Dans le spectre, mesuré sur Terre, d'une galaxie lointaine, sa longueur d'onde est $\lambda_\mathrm{r} = 9500$ Å. Quel est le redshift de cette galaxie ? Et sa vitesse d'éloignement β ?

3/ Mesure de distance. La galaxie émet à l'instant t_e, alors qu'elle est à une distance x_e de l'origine, un signal lumineux détecté sur Terre à l'instant t_r (temps et distances tous mesurés dans $\mathcal{R}$).

(a) Représenter sur un diagramme espace-temps dans $\mathcal{R}$ les lignes d'univers de la Terre, de la galaxie, du rayon lumineux, les événements d'émission (E), de réception (R) et l'évènement origine.

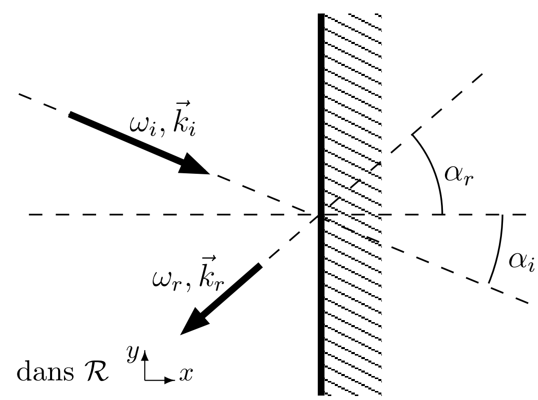
(b) Exprimer t_r en fonction de x_e, β et c. En déduire une expression de x_e en fonction de t_r et z.

(c) Soit X_e la position de la galaxie à l'instant t_r (instant de réception du signal). Montrer que la vitesse d'éloignement de la galaxie est proportionnelle à sa distance selon une loi de la forme $V = H_0\, X_\mathrm{e}$ où H_0 est appelée constante de Hubble. Exprimer H_0 en fonction de t_r.

(d) Les mesures les plus récentes donnent $H_0^{-1} = 14 \times 10^9$ ans. Quel est l'âge de l'univers selon notre modèle ? Et que valent les distances x_e et X_e pour la galaxie étudiée à la question 2(d) ? (vous exprimerez les résultats dans l'unité qui vous semble la plus appropriée).

B Réflexion sur un miroir mobile

Un miroir parfaitement réfléchissant, parallèle au plan yOz d'un référentiel d'inertie $\mathcal{R}$, se déplace à la vitesse constante $\vec{V} = c\,\beta\,\vec{e}_x$. Une onde lumineuse monochromatique de pulsation ω_i tombe sur le miroir avec un angle d'incidence α_i dans le référentiel $\mathcal{R}$ (cf. figure ci-contre). Dans tout l'exercice les angles sont des angles géométriques non orientés compris entre 0 et $\pi/2$.



Dans le référentiel $\mathcal{R}'$ lié au miroir : (i) la loi de Snell-Descartes pour la réflexion d'un rayon lumineux s'applique et (ii) la pulsation ω' de l'onde n'est pas modifiée lors de la réflexion.

1/ Montrer que les angles d'incidences dans $\mathcal{R}$ et dans $\mathcal{R}'$ (soit α_i') sont reliés par

$$\cos\alpha_i = \frac{\cos\alpha_i' + \beta}{1 + \beta\cos\alpha_i'}\ , \quad \sin\alpha_i = \frac{\sin\alpha_i'}{\gamma(1 + \beta\cos\alpha_i')}\ .$$

2/ Établir des relations similaires donnant les expressions de $\cos\alpha_r$ et $\sin\alpha_r$ en fonction de $\cos\alpha_i'$ et $\sin\alpha_i'$ (α_r est l'angle de réflexion dans $\mathcal{R}$, cf. figure). Montrer que dans $\mathcal{R}$ les angles d'incidence et de réflexion vérifient

$$\frac{\sin\alpha_r}{\sin\alpha_i} = \frac{\omega_i}{\omega_r} = \frac{\cos\alpha_r + \beta}{\cos\alpha_i - \beta}\ .$$

Comment déterminer la vitesse du miroir à partir de la seule mesure de α_i et α_r ? Si l'on peut choisir l'angle d'incidence, voyez-vous une méthode non géométrique pour obtenir simplement la même information ?