$\boxed{\text{Electromag. modifiée}}$

$\mathcal{L} = -\frac{1}{2\mu_0} \partial_\alpha A_\beta \partial^\alpha A^\beta - J_\alpha A^\alpha$ Euler-Lagrange : $\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu}$

on a ici $\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} = -\frac{1}{\mu_0} \partial^\mu A^\nu \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu} = -J^\nu \end{cases} \rightarrow \boxed{\partial_\mu \partial^\mu A^\nu = \mu_0 J^\nu}$

Electromag. usuelle = $\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 J^\nu$ soit $\boxed{\partial_\mu (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = \mu_0 J^\nu}$

les 2 equations encadrées sont equivalentes lorsque $\partial_\mu A^\mu = 0$ cad en jauge de Lorentz.

- on a $\partial_\alpha [A_\beta \partial^\beta A^\alpha - A^\alpha \partial^\beta A_\beta] = \partial_\alpha A_\beta \partial^\beta A^\alpha + A_\beta \partial_\alpha \partial^\beta A^\alpha$
$- \partial_\alpha A^\alpha \partial^\beta A_\beta - A^\alpha \partial_\alpha \partial^\beta A_\beta$

ces 2 termes sont egaux = on peut par exple re-ecrire le second comme : $A_\mu \partial^\mu \partial_\nu A^\nu = A_\mu \partial_\nu \partial^\mu A^\nu$ = identique au premier.

donc $\boxed{\partial_\alpha [A_\beta \partial^\beta A^\alpha - A^\alpha \partial^\beta A_\beta] = \partial_\alpha A_\beta \partial^\beta A^\alpha - (\partial_\alpha A^\alpha)^2}$

- en notant $\mathcal{L}_{EM}$ la densité lagrangienne usuelle de l'electromag.
($\mathcal{L}_{EM} = -\frac{1}{4\mu_0} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} - J_\alpha A^\alpha$)

$\mathcal{L}_{EM} - \mathcal{L} = -\frac{1}{4\mu_0} (\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha)(\partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta A^\alpha) + \frac{1}{2\mu_0} \partial_\alpha A_\beta \partial^\alpha A^\beta$

$= -\frac{1}{4\mu_0} \underline{\partial_\alpha A_\beta \partial^\alpha A^\beta} + \frac{1}{4\mu_0} \partial_\alpha A_\beta \partial^\beta A^\alpha + \frac{1}{4\mu_0} \partial_\beta A_\alpha \partial^\alpha A^\beta - \frac{1}{4\mu_0} \underline{\partial_\beta A_\alpha \partial^\beta A^\alpha}$

$+ \frac{1}{2\mu_0} \underline{\partial_\alpha A_\beta \partial^\alpha A^\beta}$

les termes soulignés par des lignes identiques sont egaux

-/-

il reste donc

$$\mathcal{L}_{EM} - \mathcal{L} = \frac{1}{2\mu_0}\partial_\alpha A_\beta \partial^\beta A^\alpha = \frac{1}{2\mu_0}\partial_\alpha\left[A_\beta \partial^\beta A^\alpha - A^\alpha \partial^\beta A_\beta\right] + \frac{1}{2\mu_0}\underbrace{(\partial_\alpha A^\alpha)^2}_{\text{nul en jauge de Lorentz}}$$

en utilisant la formule encadrée page précédente

Donc, en jauge de Lorentz $\mathcal{L}_{EM}$ et $\mathcal{L}$ ne diffèrent que par une quadri-divergence = c'est normal qu'ils conduisent aux mêmes équations du mouvement.

- Remarque sur la conservation de la charge = avec la densité lagrangienne modifiée, en prenant la divergence de l'éq. du mouvement on a :

$$\Box\, \partial_\nu A^\nu = \mu_0\, \partial_\nu J^\nu$$

si on n'est pas en jauge de Lorentz, rien n'impose que $\partial_\nu J^\nu = 0$, ce qui est ennuyeux.

De même, les éqs. du mouvement $\Box A^\nu = \mu_0 J^\nu$ ne sont pas invariantes de jauge.

PULSAR

$$\vec A_n(\vec r) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{e^{ik_n r}}{r}\int d^3r'\, \underbrace{e^{-i\vec k_n\cdot\vec r'}}_{\simeq\, 1 - ik_n \hat r\cdot\vec r'}\, \vec J_n(\vec r') \qquad \text{où } \vec k_n = \frac{n\omega}{c}\hat r$$

• le premier terme de ce développement donne la contribution dipolaire électrique (cf cours) qui est nulle puisque notre système est rigoureusement neutre

on peut retrouver le résultat rapidement en utilisant :
$\vec\nabla\cdot(x_k\vec J) = \partial_i(x_kJ_i) = x_k\vec\nabla\cdot\vec J + \delta_{ik}J_i$, donc en remettant les ' sur la variable d'intégration et en enlevant la contribution de la divergence totale (qui donne un flux sortant qui est bien-sûr nul) :

$$\int d^3r'\, \vec J_n = \int d^3r'\, \vec r'(\vec\nabla'\cdot\vec J_n)$$

et comme $\rho\equiv 0$, $\vec\nabla\cdot\vec J=0$, et, pour sa $n^{ième}$ composante : $\vec\nabla\cdot\vec J_n = 0$

• pour le terme suivant du développement de $e^{-i\vec k_n\cdot\vec r'}$ on utilise la formule du double produit vectoriel pour écrire :

$$(\vec r'\wedge\vec J_n)\wedge\hat r = -(\hat r\cdot\vec J_n)\vec r' + (\hat r\cdot\vec r')\vec J_n$$

soit

$$(\hat r\cdot\vec r')\vec J_n = \frac12\left\{(\hat r\cdot\vec r')\vec J_n + (\hat r\cdot\vec J_n)\vec r'\right\} + \frac12(\vec r'\wedge\vec J_n)\wedge\hat r$$

la contribution du terme entre { } à $\vec A_n(\vec r)$ est le terme quadrupolaire électrique : il est nul pour notre système neutre

en effet, en laissant tomber les ' et en notation $\hat r = \hat n$ pour ne pas confondre on a (ici $\hat n$ est un vect constant) :

$$\vec\nabla\left(x_k(\vec r\cdot\vec n)\vec J\right) = \partial_i\left(x_k(r_jn_j)J_i\right) = x_k(\vec r\cdot\vec n)\vec\nabla\cdot\vec J + \delta_{ik}(\vec r\cdot\vec n)J_i + x_k\underbrace{(\delta_{ij}n_jJ_i)}_{\to\, \vec n\cdot\vec J}$$

Donc

$$\int\left\{(\hat r\cdot\vec r')\vec J_n + (\hat r\cdot\vec J_n)\vec r'\right\}d^3r' = -\int d^3r'\,\vec r'(\vec r'\cdot\hat r)\underbrace{\vec\nabla'\cdot\vec J_n}_{\text{nul}} = 0$$

où, comme d'hab, on en enlève la contribution de la divergence totale.

il reste donc $\vec{A}_n(\vec{r}) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{ik_n e^{ik_n r}}{r} \underbrace{\left(\int d^3r' \frac{\vec{r}' \wedge \vec{J}_n(\vec{r}')}{2} \right)}_{\vec{M}_n} \wedge \hat{r}$

$\vec{M}_n$ est le $n^{ème}$ terme de la décomposition en série de Fourier de $\vec{M}(t) = \frac{1}{2} \int d^3r' (\vec{r}' \wedge \vec{J}(\vec{r}', t))$

- Puissance rayonnée :

$\vec{S}(\vec{r}, t) = \frac{1}{\mu_0} \vec{E}(\vec{r}, t) \wedge \vec{B}(\vec{r}, t)$ dans la zone de rayonnement on a : $\vec{E}(\vec{r}, t) = c \vec{B}(\vec{r}, t) \wedge \hat{r}$ avec $\vec{B}(\vec{r}, t) \perp \hat{r}$. Donc

$$\vec{S} = \frac{c}{\mu_0} \vec{B} \wedge (\hat{r} \wedge \vec{B}) = \frac{c}{\mu_0} \vec{B}^2(\vec{r}, t)\, \hat{r}$$

Pour calculer la puissance rayonnée on calcule le flux sortant de $\vec{S}$ à travers une sphère de grand rayon :

$$\mathcal{P} = \int_{\text{angles}} r^2 d\Omega\, \vec{S} \cdot \hat{r} = \frac{c}{\mu_0} r^2 \int_{\text{angles}} \vec{B}^2(\vec{r}, t)\, d\Omega$$

donc, si on moyenne sur une période : $\overline{\mathcal{P}} = \frac{1}{T} \int_0^T \mathcal{P}\, dt$ on obtient pour la distribution angulaire :

$$\frac{d\overline{\mathcal{P}}}{d\Omega} = \frac{c}{\mu_0} r^2\, \overline{\vec{B}^2(\vec{r}, t)} = \frac{c}{\mu_0} r^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\vec{B}_n^2(\vec{r})| = \frac{2c}{\mu_0} r^2 \sum_{n=1}^{\infty} |\vec{B}_n^2(\vec{r})|$$

(cf. formulaire) on utilise : $\vec{B}_0(\vec{r}) \equiv 0$ et $\vec{B}_{-n}(\vec{r}) = \vec{B}_n^*(\vec{r})$

et on a $\vec{B}_n(\vec{r}) = ik_n \hat{r} \wedge \vec{A}_n(\vec{r})$ avec $\vec{A}_n(\vec{r}) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{ik_n e^{ik_n r}}{r} \vec{M}_n \wedge \hat{r}$

donc, avec le double produit vectoriel :

$$\vec{B}_n(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{k_n^2}{r} e^{ik_n r} \hat{r} \wedge (\vec{M}_n \wedge \hat{r}) \rightarrow \vec{M}_n - (\hat{r} \cdot \vec{M}_n) \hat{r}$$

et $|\vec{B}_n(\vec{r})|^2 = \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{k_n^2}{r} \right)^2 \left[|\vec{M}_n^2| - |\hat{r} \cdot \vec{M}_n|^2 \right]$ (où je rappelle que $k_n = n \frac{\omega}{c}$)

cela donne

$$\frac{d\overline{\mathcal{P}}}{d\Omega} = \frac{\mu_0 \omega^4}{8\pi^2 c^3} \sum_{n=1}^{\infty} n^4 \left[|\vec{M}_n|^2 - |\hat{r}\cdot\vec{M}_n|^2 \right]$$

• Dans le cas qui nous intéresse :

$$\vec{M}(t) = \mathcal{M} \begin{vmatrix} \sin\alpha \cdot \frac{1}{2}(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}) \\ \sin\alpha \cdot \frac{i}{2}(-e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}) \\ \cos\alpha \end{vmatrix} = \mathcal{M} \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \cos\alpha \end{vmatrix} + \overbrace{e^{-i\omega t} \frac{\mathcal{M}}{2}\sin\alpha \begin{vmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{vmatrix}}^{\vec{M}_1} + \underbrace{e^{i\omega t} \frac{\mathcal{M}}{2}\sin\alpha \begin{vmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{vmatrix}}_{\vec{M}_{-1}}$$

$$\hat{r}\cdot\vec{M}_1 = \frac{\mathcal{M}}{2}\sin\alpha \begin{vmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta \end{vmatrix} = \frac{\mathcal{M}}{2}\sin\alpha\sin\theta\, e^{i\varphi}$$

or

$$|\vec{M}_1|^2 - |\hat{r}\cdot\vec{M}_1|^2 = \frac{\mathcal{M}^2}{4}\sin^2\alpha \cdot 2 - \frac{\mathcal{M}^2}{4}\sin^2\alpha\sin^2\theta = \frac{\mathcal{M}^2}{4}\sin^2\alpha \underbrace{(2 - \sin^2\theta)}_{1+\cos^2\theta}$$

donc

$$\frac{d\overline{\mathcal{P}}}{d\Omega} = \frac{\mu_0}{32\pi^2}\frac{\omega^4}{c^3}\mathcal{M}^2\sin^2\alpha\,(1+\cos^2\theta)$$

il est clair que

$$\int d\Omega\,(1+\cos^2\theta) = 4\pi + 2\pi \overbrace{\int_0^\pi \sin\theta\, d\theta \cos^2\theta}^{2/3} = \frac{16\pi}{3}$$

donc la puissance totale rayonnée (moyennée sur le temps) est :

$$\boxed{\overline{\mathcal{P}} = \frac{\mu_0}{6\pi}\frac{\omega^4}{c^3}\mathcal{M}^2\sin^2\alpha}$$

• la puissance rayonnée correspond à une diminution de l'énergie cinétique de rotation : $\frac{dE_{rot}}{dt} = -\overline{\mathcal{P}}$

cela s'écrit $I\omega\dot{\omega} = -A\omega^4$ avec $A = \frac{\mu_0}{6\pi c^3}\mathcal{M}^2\sin^2\alpha$

on a donc $\tau = -\frac{\omega}{\dot{\omega}} = I/A\omega^2$

on a également $-2\frac{d\omega}{\omega^3} = 2\frac{A}{I}t$, soit, en intégrant avec la condition initiale $\omega(t=0) = \omega_0$

./..

$$\boxed{\frac{1}{\omega^2} - \frac{1}{\omega_0^2} = \frac{2A}{I} t}$$

$\Rightarrow$ si $\omega_0 \gg \omega$ cette relation s'écrit $t_c = \frac{I}{2A\omega^2} = \frac{\tau}{2}$

pour le pulsar PSR J0205+6449 cela donne : (on appelle t_c l'âge caractéristique)

$$t_c = \frac{1}{2}\frac{T}{\dot{T}} = 16,93(5)\ 10^{10} s = 5370 \text{ ans}$$

$\Rightarrow$ en réalité $t = 836$ ans. Cela permet d'évaluer la valeur initiale ω_0. On a (avec la formule encadrée ci-dessus) :

$$1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 = \frac{2A\omega^2}{I} t = t/t_c$$

donc $\left(\frac{T_0}{T}\right)^2 = 1 - t/t_c$ soit $T_0 = T \times \sqrt{1 - t/t_c} = 60,354$ ms

- il est également intéressant d'évaluer le champ magnétique à la surface d'un pulsar : on a $\frac{T}{\dot{T}} = -\frac{\omega}{\dot{\omega}} = \frac{I}{A\omega^2}$. Cela s'écrit :

$$\frac{T}{\dot{T}} = \frac{6\pi c^3 I}{\mu_0 \mathcal{M}^2 \sin^2\alpha\, \omega^2}$$

pour une sphère homogène $I = \frac{2}{5} M_p R^2$ où M_p est la masse du pulsar et R son rayon

Un dipôle magnétique crée un champ $\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi r^3}[3(\vec{M}\cdot\hat{r})\hat{r} - \vec{M}]$ (formule pour cas stationnaire).

On peut donc évaluer le champ au pôle nord magnétique comme : $B_{PN} = \frac{\mu_0 \mathcal{M}}{2\pi R^3}$. Cela donne en ré-injectant

$$\boxed{B_{PN}^2 = \frac{3\mu_0}{20\pi^3} \frac{M_p c^3 T\cdot\dot{T}}{R^4 \sin^2\alpha}}$$

(pour le pulsar du Crabe on a :
$M_p = 1.4\, M_\odot = 2.8\ 10^{30}$ kg
$R = 10$ km $\quad T = 0,0334$ s
$\mu_0 = 4\pi\ 10^{-7}$ USI $\quad \dot{T} = 4,21\ 10^{-13}$)

je trouve $B_{PN} = 8\ 10^8$ T (en prenant $\sin\alpha = 1$)

wikipedia donne $3.8\ 10^8$ T, je ne sais pas quelle est leur source.

Calcul "brute force" de la puissance rayonnée =

ici on n'a de composante sur le développement de Fourier que pour $n=0,\pm 1$ et comme $\vec{B}_0 \equiv 0$ cela donne :

$$\vec{B}(\vec{r},t) = \vec{B}_{-1} e^{i\omega t} + \vec{B}_1 e^{-i\omega t} = 2\,\mathcal{R}e\left(\vec{B}_1 e^{-i\omega t}\right)$$

avec, on l'a vu : $\vec{B}_1(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{k_1^2}{r}e^{ik_1 r}\left(\vec{M}_1 - (\hat{r}\cdot\vec{M}_1)\hat{r}\right)$

donc

$$\vec{B}_1 e^{-i\omega t} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\omega^2}{c^2 r} e^{i(k_1 r - \omega t)} \frac{\mathcal{M}}{2}\sin\alpha \left(\begin{vmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{vmatrix} - \sin\theta\, e^{i\varphi} \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta \end{vmatrix} \right)$$

$$\underbrace{2\,\mathcal{R}e\left(\vec{B}_1 e^{-i\omega t}\right)}_{=\vec{B}(\vec{r},t)} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\omega^2}{c^2 r}\mathcal{M}\sin\alpha \underbrace{\begin{vmatrix} \cos\Phi - \sin^2\theta\cos\varphi\cos(\Phi+\varphi) \\ -\sin\Phi - \sin^2\theta\sin\varphi\cos(\Phi+\varphi) \\ -\sin\theta\cos\theta\cos(\Phi+\varphi) \end{vmatrix}}_{\text{soit } \mathcal{N} \text{ la norme de ce vecteur.}}$$

(où, pour faire simple j'ai noté $\Phi \equiv k_1 r - \omega t$)

on a $\mathcal{N}^2 = 1 + \sin^4\theta\cos^2(\Phi+\varphi) - 2\sin^2\theta\cos(\Phi+\varphi)\underbrace{\left[\cos\Phi\cos\varphi - \sin\Phi\sin\varphi\right]}_{=\cos(\Phi+\varphi)}$
$\quad + \sin^2\theta\cos^2\theta\cos^2(\Phi+\varphi)$

donc $\mathcal{N}^2 = 1 + \sin^2\theta\cos^2(\Phi+\varphi)\left(\sin^2\theta + \cos^2\theta - 2\right)$
$\quad = 1 - \sin^2\theta\cos^2(\Phi+\varphi)$

et $\left|\vec{B}^2(\vec{r},t)\right| = \frac{\mu_0^2}{16\pi^2}\frac{\omega^4}{c^4 r^2}\mathcal{M}^2\sin^2\alpha\left(1 - \sin^2\theta\cos^2(k_1 r - \omega t + \varphi)\right)$

$$\boxed{\frac{d\mathcal{P}}{d\Omega} = \frac{c}{\mu_0} r^2 \left|\vec{B}^2(\vec{r},t)\right| = \frac{\mu_0}{16\pi^2}\frac{\omega^4}{c^3}\mathcal{M}^2\sin^2\alpha\left[1 - \sin^2\theta\cos^2(k_1 r - \omega t + \varphi)\right]}$$

$\underbrace{\overline{\cos^2(k_1 r - \omega t + \varphi)} = 1/2}_{\text{moyenne temporelle}}$ donc $\frac{d\overline{\mathcal{P}}}{d\Omega} = \frac{\mu_0}{16\pi^2}\frac{\omega^4}{c^3}\mathcal{M}^2\sin^2\alpha \underbrace{\left(1 - \frac{\sin^2\theta}{2}\right)}_{\frac{1}{2}(2-\sin^2\theta) = \frac{1+\cos^2\theta}{2}}$

(en accord avec formule de la page P3)

pour moi : l'approche utilisée permet de retrouver le résultat souvent donné dans les livres de cours pour le dipôle magnétique $\vec{M}(t) = m \cos(\omega t)\, \vec{e}_z$ (celui là ne tourne pas)

on a ici $\vec{M}_1 = \vec{M}_{-1} = \frac{m}{2} \vec{e}_z$ et tous les autres $\vec{M}_n$ sont nuls.

la formule (B7), (B8) de l'énoncé (démontrée en page P2) est :

$$\frac{d\overline{P}}{d\Omega} = \frac{\mu_0 \omega^4}{8\pi^2 c^3} \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} n^4 \left[|\vec{M}_n|^2 - |\hat{r} \cdot \vec{M}_n|^2 \right]}_{\text{n'a de contribution que pour } n=1}$$

n'a de contribution que pour $n = 1$:

$$|\vec{M}_1|^2 - |\hat{r} \cdot \vec{M}_1|^2 = \frac{m^2}{4} (1 - \cos^2\theta)$$

donc $\frac{d\overline{P}}{d\Omega} = \frac{\mu_0 m^2 \omega^4}{32 \pi^2 c^3} \sin^2\theta$

et $\overline{P} = \frac{\mu_0 m^2 \omega^4}{12 \pi c^3}$ (car $\int d\Omega \sin^2\theta = \frac{8\pi}{3}$)

c'est bien le résultat donné dans le livre de Griffith (introduction to electrodynam)

âge du pulsar du Crabe :

$t_c = \frac{1}{2} \frac{T}{\dot{T}} = 3{,}97 \; 10^{10} s = 1257$ ans

âge réel (en 2017) $= 963$ ans $= t$

en écrivant (cf page P4) $T_0 = T \times \sqrt{1 - \frac{t}{t_c}}$ on trouve $T_0 = 0.483\, T$
$= 16{,}1$ ms