Limite de Bogomolny

Euler-Lagrange : $\partial_\mu \left(\underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)}}_{=\partial^\mu \phi} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \longrightarrow -V'(\phi)$

d'où l'éq du mvt : $\Box \phi = -V'(\phi)$

si à $\pm\infty$ $\phi \to \phi_{(\pm)} = C^{ste}$ alors $\Box\phi \to 0$. Pour vérifier l'éq du mvt il faut donc que $V'(\phi_\pm) = 0 \Rightarrow \phi_+$ et ϕ_- sont des points où V atteint un extremum.

☑ Tenseur impulsion-énergie : $T^{\mu\nu} = \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu \phi)}}_{=\partial^\nu \phi} \partial^\mu \phi - g^{\mu\nu} \mathcal{L}$

donc $T^{\mu\nu} = \partial^\nu \phi \, \partial^\mu \phi - g^{\mu\nu} \left[\frac{1}{2} \partial^\alpha \phi \, \partial_\alpha \phi - V(\phi) \right]$ clairement symétrique

$$T^{00} = \left(\frac{1}{c} \partial_t \phi \right)^2 - \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{c} \partial_t \phi \right)^2 - \frac{1}{2} (\partial_x \phi)^2 - V(\phi) \right]$$

or $\mathcal{E} = \int T^{00} dx = \int_{\mathbb{R}} dx \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{1}{c} \partial_t \phi \right)^2 + \frac{1}{2} (\partial_x \phi)^2 + V(\phi) \right\}$

on a $\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \partial_x \phi \pm \underbrace{\sqrt{V(\phi)}}_{\text{bien défini puisque } V(\phi) \geq 0} \right)^2 = \frac{1}{2} (\partial_x \phi)^2 + V(\phi) \pm \partial_x \phi \sqrt{2V(\phi)} \geq 0$

d'où l'inégalité (B3) de l'énoncé.

on peut alors écrire : $\mathcal{E} \underset{\text{on enlève } \frac{1}{2}\left(\frac{1}{c}\partial_t\phi\right)^2 \text{ qui est } \geq 0}{\geq} \int_{\mathbb{R}} dx \left\{ \frac{1}{2} (\partial_x \phi)^2 + V(\phi) \right\} \underset{\text{(avec B3)}}{\geq} \pm \int_{\mathbb{R}} dx \, \partial_x \phi \sqrt{2V(\phi)}$

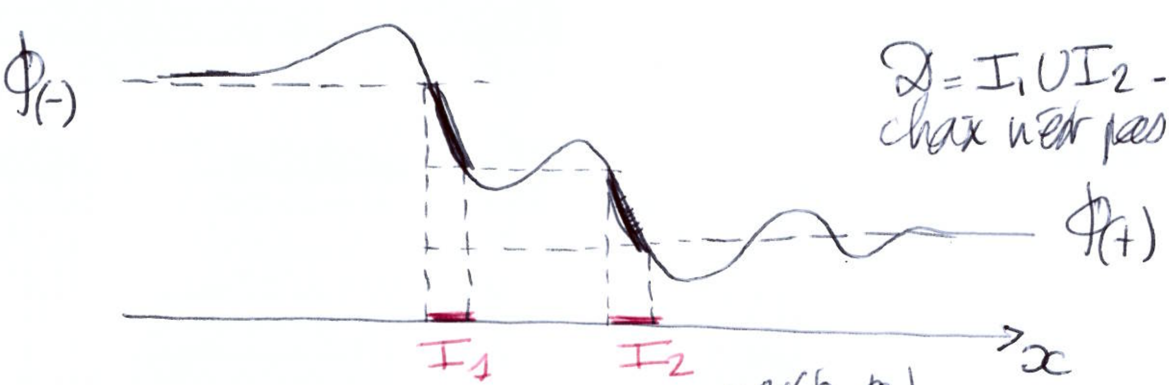
on fait un changement de variable : $\phi = \phi(x)$

donc

$$\boxed{\mathcal{E} \geq \left| \int_{\phi_-}^{\phi_+} d\phi \sqrt{2V(\phi)} \right| = \mathcal{E}_B}$$

⚠ le changt de variable n'est valable que si $\phi(x)$ est monotone
si ce n'est pas le cas on écrit : $\mathcal{E} \geqslant \int_{\mathbb{R}} dx\, |\partial_x \phi| \sqrt{2V(\phi)}$

puis on définit le domaine $\mathcal{D}$
réunion d'intervalles sur lesquels ϕ est monotone et on s'arrange pour que, sur $\mathcal{D}$, $\phi(x)$ parcourre toutes les valeurs entre $\phi_{(-)}$ et $\phi_{(+)}$.
Exemple (cas $\phi_{(+)} < \phi_{(-)}$) :



$\mathcal{D} = I_1 \cup I_2$. bien sûr le choix n'est pas unique

alors $$\mathcal{E} \geqslant \int_{\mathcal{D}} dx\, |\partial_x \phi| \sqrt{2V(\phi)} = \int_{\min(\phi_+,\phi_-)}^{\max(\phi_+,\phi_-)} d\phi\, \sqrt{2V(\phi)} = \mathcal{E}_B$$

ici on peut faire légitimement le chgt de variable $\phi = \phi(x)$

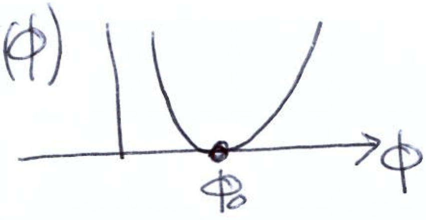
* on cherche une config. où $\mathcal{E}_B$ est atteinte. Pour cela il faut bien-sûr que $\partial_t \phi = 0$ et que $\mathcal{D} = \mathbb{R}$, cad que $\phi(x)$ soit monotone et il faut aussi obtenir l'égalité dans (B3). En remontant à l'identité remarquable dont (B3) découle cela impose (ici $\partial_x = \frac{d}{dx}$ puisque $\partial_t \equiv 0$)

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{d\phi}{dx} \pm \sqrt{V(\phi)} = 0 \quad \text{soit} \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{d\phi}{dx} = \mp \sqrt{V(\phi)} \quad \text{cad} \quad \boxed{\frac{1}{2}\left(\frac{d\phi}{dx}\right)^2 - V(\phi) = 0}$$

c'est analogue à la conservation de l'énergie totale d'une particule classique $\frac{m}{2}\dot{X}^2 + U_{pot}(X) = E_{tot} = 0$ avec

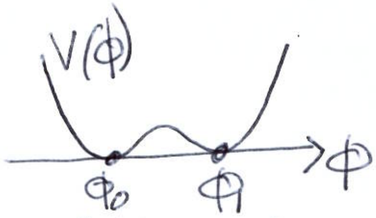
analogue classique	m	X	t	$U_{pot}(X)$	E_{tot}
théorie des champs	1	ϕ	x	$-V(\phi)$	0

* si $V(\phi)$

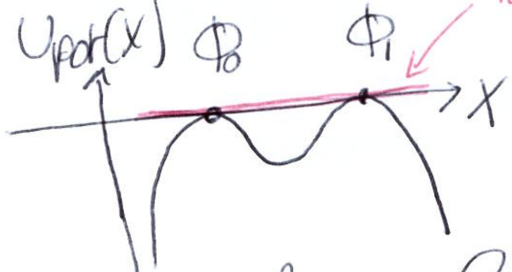


la solution classique à energie totale nulle est simplement $X(t) = \phi_0$ $(\forall t)$
on aura donc $\phi(x,t) = \phi_0$ $\forall (t,x)$ et effectivement $\mathcal{E} = \mathcal{E}_B = 0$

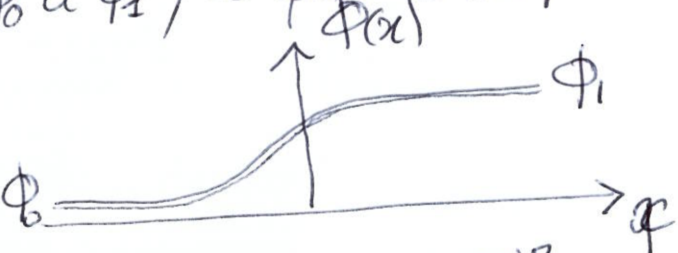
* si on a



alors



en plus des solutions "triviales" $X = \phi_0$ ou $X = \phi_1$ on a une solution "interes-sante" où X varie de ϕ_0 à ϕ_1, ce qui correspond pour la théorie des champs :



solution "kink"

* considérons le cas particulier $V(\phi) = \frac{1}{2}(m^2 - \phi^2)^2$
ici c'est $\pm m$ qui jouent le rôle de ϕ_0 et ϕ_1. Pour avoir l'expression de $\phi(x)$ il faut résoudre (B5) avec le signe "+" : $\dfrac{d\phi}{dx} = m^2 - \phi^2$

soit $dx = \dfrac{d\phi}{m^2 - \phi^2} \underset{\uparrow}{=} \dfrac{1}{m} \dfrac{du}{1-u^2}$ cad $m(x - x_0) = \text{artanh}(\phi/m)$
$u = \phi/m$

x_0 : c^{ste} d'intégration que l'on peut annuler en changeant l'origine des x.

cela donne $\phi(x) = m \tanh(m x)$
l'energie correspondante peut être calculée avec la formule (B2) mais comme on sait que $\mathcal{E} = \mathcal{E}_B$, il est + simple d'utiliser (B4) :

$$\mathcal{E} = \int_{-m}^{m} (m^2 - \phi^2)\, d\phi = 2\left[m^2\phi - \frac{\phi^3}{3}\right]_0^m = \frac{4}{3} m^3$$