M1 et Magistère 2$^{\text{ème}}$ année 23 novembre 2018

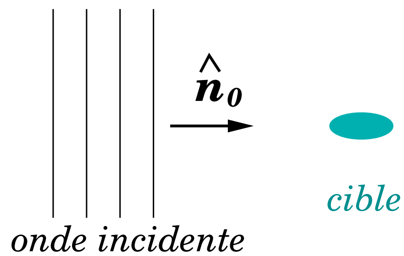
EXAMEN d'ÉLECTRODYNAMIQUE CLASSIQUE et QUANTIQUE

Durée : 3 heures

Les calculatrices, les polycopiés et les notes de cours et de travaux dirigés sont autorisés.
Ne restez pas bloqués sur une question: admettez la réponse et passez à la suite.
Barème approximatif : A = 7.5 points ; B = 12.5 points.

A Diffusion Rayleigh, couleur du ciel

On considère la diffusion d'une onde électromagnétique plane (vecteur d'onde $\vec{k} = k\,\hat{n}_0$, pulsation $\omega = c\,k$) par un objet (la "cible") de taille est très petite devant la longueur d'onde $\lambda = 2\,\pi/k$. Le champ incident s'écrit



$$\vec{E}_{\rm inc}(\vec{r},t) = \mathrm{Re}\left\{E_0\,\hat{\tau}_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\vec{k}.\vec{r}-\omega t)}\right\}\ ,\quad \vec{B}_{\rm inc}(\vec{r},t) = \hat{n}_0 \wedge \frac{\vec{E}_{\rm inc}}{c}\ ,$$

avec $\hat{\tau}_0 \perp \hat{n}_0$. L'amplitude scalaire E_0 et les vecteurs normés $\hat{\tau}_0$ et $\hat{n}_0$ sont constants et réels: l'onde incidente est polarisée linéairement.

Le mécanisme de rayonnement est le suivant: l'onde incidente provoque des oscillations des charges et des courants dans la cible, à la pulsation ω. La cible rayonne alors des champs de même pulsation. On écrira donc les champs rayonnés sous la forme

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \mathrm{Re}\left\{\vec{A}_\omega(\vec{r}\,)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\right\}\ ,\quad \vec{E}(\vec{r},t) = \mathrm{Re}\left\{\vec{E}_\omega(\vec{r}\,)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\right\}\ ,\quad \vec{B}(\vec{r},t) = \mathrm{Re}\left\{\vec{B}_\omega(\vec{r}\,)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\right\}\ .$$

1/ Justifier que l'on peut utiliser l'approximation dipolaire électrique. On travaillera dans le cadre de cette approximation dans tout ce qui suit.

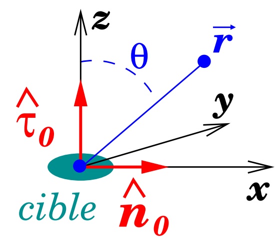
2/ On note $\vec{d}(t)$ le moment dipolaire de la distribution de charges dans la cible (il est induit par l'onde incidente). Il est de la forme $\vec{d}(t) = \mathrm{Re}\left\{\vec{d}_\omega\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\right\}$. Rappeler, en jauge de Loren(t)z, dans la zone de rayonnement (dont vous donnerez la définition), l'expression des champs $\vec{A}_\omega(\vec{r}\,)$, $\vec{E}_\omega(\vec{r}\,)$ et $\vec{B}_\omega(\vec{r}\,)$ en fonction de $\vec{d}_\omega$.

3/ Donner l'expression du vecteur de Poynting $\vec{S}(\vec{r},t)$ dans la zone de rayonnement en fonction de $\vec{B}(\vec{r},t)$, de $\hat{r} = \vec{r}/r$ et de constantes fondamentales. En déduire que la puissance rayonnée par unité d'angle solide en direction de $\vec{r}$ est, *une fois moyennée sur le temps*, de la forme

$$\left\langle \frac{\mathrm{d}^2\mathscr{P}}{\mathrm{d}^2\Omega} \right\rangle \propto |\hat{r}\wedge\vec{d}_\omega|^2\ , \tag{A1}$$

où les crochets $\langle ..\rangle$ désignent une moyenne temporelle $\frac{1}{T}\int_0^T \mathrm{d}t..$ avec $T = 2\pi/\omega$. Vous donnerez l'expression du coefficient de proportionnalité en fonction de k et de constantes fondamentales.

4/ On fixe l'origine des coordonnées au centre de la cible. On écrit de manière heuristique $\vec{d}(t) = \gamma\epsilon_0\vec{E}_{\rm inc}(\vec{0},t)$. C'est à dire que le moment dipolaire induit par l'onde incidente est proportionnel au champ électrique incident. γ est un paramètre phénoménologique réel, homogène à un volume.
On se place dans la géométrie illustrée sur le schéma ci-contre. Donner alors l'expression de $\langle \mathrm{d}^2\mathscr{P}/\mathrm{d}^2\Omega\rangle$ en fonction de k, γ, E_0, $\sin\theta$ et de constantes fondamentales.



5/ En se rapportant aux compléments de cours on voit que la section efficace différentielle est

$$\frac{\mathrm{d}^2\sigma}{\mathrm{d}^2\Omega} = \left\langle \frac{\mathrm{d}^2\mathscr{P}}{\mathrm{d}^2\Omega} \right\rangle \bigg/ \left\langle |\vec{S}_{\rm inc}| \right\rangle \;, \quad \text{où} \quad \left\langle |\vec{S}_{\rm inc}| \right\rangle = \frac{1}{\mu_0} \left\langle |\vec{E}_{\rm inc} \wedge \vec{B}_{\rm inc}| \right\rangle \;.$$

Donner alors l'expression de $\mathrm{d}^2\sigma/\mathrm{d}^2\Omega$ en fonction des paramètres du problème. Dans quelle(s) direction(s) l'énergie est-elle principalement rayonnée ? Donner l'expression de la section efficace totale σ en fonction de k et γ.

La décroissance de σ en fonction de λ que l'on vient d'obtenir est typique de la diffusion Rayleigh. Elle explique que les grandes longueurs d'onde (le rouge) sont peu affectées alors que les faibles longueurs d'onde (le bleu) sont beaucoup plus diffusées. Sachant que $\lambda_{\rm rouge} = 0.65\,\mu$m et $\lambda_{\rm violet} = 0.41\,\mu$m, donner la valeur du rapport $\sigma_{\rm rouge}/\sigma_{\rm violet}$.

B Limite de Bogomolny

On se place à $1+1$ dimensions (une dimension de temps et une d'espace). On introduit une notation covariante avec des indices prenant les valeurs 0 et 1 : $X^0 = ct = X_0$, $X^1 = x = -X_1$, $\partial_\mu\phi = \partial\phi/\partial X^\mu$, $g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$... On considère un système décrit par un champ scalaire dont la dynamique est régie par une densité lagrangienne de la forme

$$\mathscr{L}(\phi, \partial_\mu\phi) = \tfrac{1}{2}\,(\partial^\mu\phi)\,(\partial_\mu\phi) - V(\phi) \;. \tag{B1}$$

Dans la suite on supposera que le potentiel $V(\phi)$ vérifie $V(\pm\infty) = +\infty$ et que $V(\phi)$ est positif pour toute valeur de ϕ (on peut toujours se ramener à ce cas en rajoutant à V une constante additive).

1/ Écrire les équations du mouvement (on notera $v(\phi) = \mathrm{d}V/\mathrm{d}\phi$). On se placera désormais dans une configuration où $\phi(x \to \pm\infty) = \phi_{(\pm)}$, où $\phi_{(-)}$ et $\phi_{(+)}$ sont deux constantes positives. Montrer que dans ce cas, la fonction $V(\phi)$ doit atteindre un extremum en $\phi = \phi_{(-)}$ et $\phi = \phi_{(+)}$.

2/ Calculer le tenseur impulsion-énergie $T^{\mu,\nu}$. Montrer que l'énergie $\mathcal{E}$ du système se met sous la forme

$$\mathcal{E} = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x\, T^{00}(x,t) \;. \tag{B2}$$

où vous donnerez l'expression de T^{00} en fonction de $\partial_t\phi$, $\partial_x\phi$ et $V(\phi)$.

Montrer que

$$\tfrac{1}{2}(\partial_x\phi)^2 + V(\phi) \geq \pm(\partial_x\phi)\sqrt{2\,V(\phi)} \;, \tag{B3}$$

et en déduire que l'énergie du système est minorée par :

$$\mathcal{E}_{\rm B} = \left| \int_{\phi_{(-)}}^{\phi_{(+)}} \mathrm{d}\phi \, \sqrt{2\,V(\phi)} \right| = \int_{\min\{\phi_{(-)},\phi_{(+)}\}}^{\max\{\phi_{(-)},\phi_{(+)}\}} \mathrm{d}\phi \, \sqrt{2\,V(\phi)} \,, \tag{B4}$$

où $\phi_{(\pm)}$ est la valeur asymptotique de $\phi(x,t)$ lorsque $x \to \pm\infty$. On appelle $\mathcal{E}_{\rm B}$ la limite de Bogomolny. Puisque $V(\phi)$ est défini à une constante additive près, nous avons une certaine latitude dans le choix de la limite $\mathcal{E}_{\rm B}$. Sa plus faible valeur compatible avec la condition $V(\phi) \geq 0$ est obtenue lorsque V est choisi de sorte que son minimum $V_{\rm min} \equiv \min\{V(\phi)\}_{\phi\in\mathbb{R}}$ soit nul. On se place désormais dans cette configuration.

3/ On cherche une configuration dans laquelle la limite de Bogomolny est atteinte, c'est à dire $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{\rm B}$. Montrer que ce n'est possible que si : (i) $\partial_t\phi = 0$, (ii) $\phi(x)$ est monotone, et (iii) $\phi(x)$ vérifie l'une des deux équations différentielles du premier ordre suivantes:

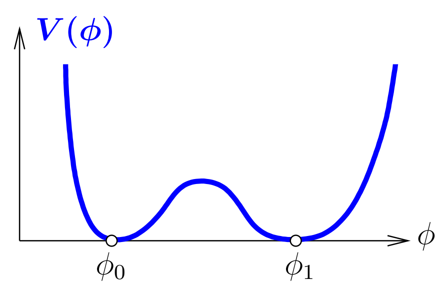
$$\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x} = \pm\sqrt{V(\phi)} \,. \tag{B5}$$

Une solution de (B5) avec le signe "+" est appelée un "kink"; une solution avec le signe négatif est un "anti-kink" (on peut passer de l'une à l'autre par la symétrie $x \to -x$).

4/ Re-écrire (B5) comme la relation de conservation de l'énergie mécanique totale ($\frac{m}{2}\dot{X}^2 + U_{\rm pot}(X) = E_{\rm tot}$) d'une particule classique effective de "masse" unité, "position" $X = \phi$, "temps" x, évoluant dans un "potentiel" $U_{\rm pot}(X) = -V(\phi)$. Que vaut alors l'énergie mécanique totale $E_{\rm tot}$ de la particule effective ? On va utiliser cette analogie avec le mouvement classique dans un potentiel extérieur pour acquérir de l'intuition sur les possibles solutions de (B5).

5/ On considère tout d'abord le cas où $V(\phi)$ atteint son minimum $V_{\rm min} = 0$ pour une unique valeur ϕ_0 de ϕ. Pour quelle solution $\phi(x)$ (très simple!) de (B5) (et donc des équations du mouvement) la limite de Bogomolny est-elle atteinte ?

6/ On considère à présent le cas plus intéressant où $V(\phi)$ atteint son minimum $V_{\rm min} = 0$ pour deux valeurs ϕ_0 et ϕ_1 ($\phi_0 < \phi_1$), cf. graphe ci-contre.
Montrer que pour le choix particulier de conditions limites $\phi_{(-)} = \phi_0$ et $\phi_{(+)} = \phi_1$ on peut obtenir une solution $\phi(x)$ en kink de (B5) non triviale (c'est à dire moins ennuyeuse que celle qui a été obtenue dans la question 5/ précédente). Tracer grossièrement l'allure de $\phi(x)$.



7/ Pour fixer les idées on considère le cas

$$V(\phi) = \tfrac{1}{2}(m^2 - \phi^2)^2 \,. \tag{B6}$$

où m est une constante positive. Tracer $V(\phi)$. Tracer grossièrement l'allure de la solution en kink $\phi(x)$ puis donner son expression analytique [indication: $\int \mathrm{d}u\,(1-u^2)^{-1} = \mathrm{artanh}(u)$]. Calculer l'énergie de cette solution.