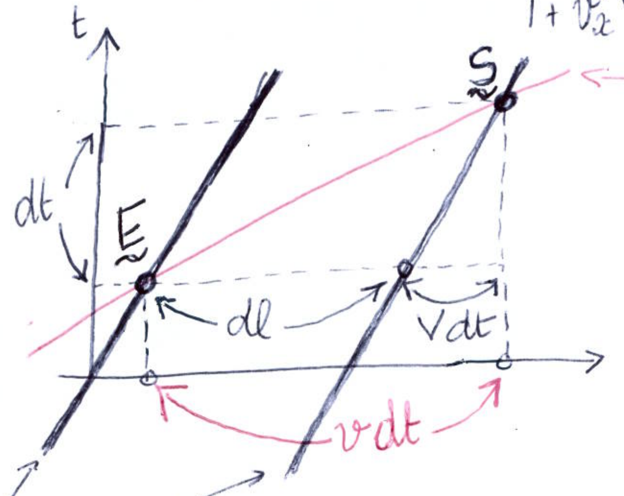
Effet Sagnac

préliminaire : cf. cours $v_x = \dfrac{v'_x + V}{1 + v'_x V/c^2}$ $\qquad v_{(y/z)} = \dfrac{v'_{(y/z)}}{\gamma(1 + v'_x V/c^2)}$

1



ligne d'univers du "photon" (vitesse = v)

lignes d'univers des 2 extrémités du segment (vitesses = V)

sur le schéma il est clair que $v\,dt = dl + V\,dt$

soit $\boxed{dt = \dfrac{dl}{v - V}}$

→ méca non relativiste : $\vec{v} = \vec{V} + \vec{v}'$ soit ici $v = V + v' \Rightarrow dt = \dfrac{dl}{v'}$

→ méca relativiste (cf. préliminaire) : $v = \dfrac{v' + V}{1 + v'V/c^2}$

donc $v - V = v' \dfrac{1 - V^2/c^2}{1 + v'V/c^2}$

la formule encadrée donne alors $dt = \gamma^2 \dfrac{dl}{v'}\left(1 + v'\dfrac{V}{c^2}\right)$

soit, aux faibles valeurs de V $\quad dt \simeq \dfrac{dl}{v'} + \dfrac{V\,dl}{c^2} + \dots$

si le segment est parcouru par un "photon" en sens contraire

on a : $dt = \dfrac{dl}{v + V}$ $\quad$ la loi de composition non relativiste ($\vec{v} = \vec{V} + \vec{v}'$) donne ici $v = v' - V$

et on retrouve $dt = dl/v'$ (non relat.)

la loi relativiste s'écrit : $-v = \dfrac{-v' + V}{1 - v'V/c^2}$ $\quad \left(\begin{array}{l}\text{car } v'_x = -v' \\ \text{et } v_x = -v\end{array}\right)$

alors $v + V = v' \dfrac{1 - V^2/c^2}{1 - v'V/c^2}$

donc dans ce cas : $dt = \gamma^2 \dfrac{dl}{v'}\left(1 - \dfrac{v'V}{c^2}\right) \simeq \dfrac{dl}{v'} - \dfrac{V\,dl}{c^2} + \dots$

on écrit donc

$$\boxed{dt_{(\pm)} = \frac{dl}{v'} \pm \frac{V\,dl}{c^2} + \dots}$$

② Déphasage : $\Delta\phi = \omega \oint (dt_+ - dt_-)$

$\omega = 2\pi\nu = \dfrac{2\pi c}{\lambda}$ $\qquad$ $dt_+ - dt_- = \dfrac{2}{c^2}\,\vec{V}\cdot d\vec{l}$ (en utilisant B1)

on a donc $\Delta\phi = \dfrac{4\pi}{\lambda c}\oint \vec{V}\cdot d\vec{l} = \dfrac{4\pi}{\lambda c}\iint d^2\sigma\, \vec{u}\cdot\underbrace{(\vec{\nabla}\wedge\vec{V})}$

(Thm de Stokes)

si $V = \vec{\Omega}\wedge\vec{r}$ ce rot vaut $2\vec{\Omega}$ (cf. formulaire)

on obtient : $\Delta\phi = \dfrac{8\pi}{\lambda c}\underbrace{\iint d^2\sigma\, \vec{u}\cdot\vec{\Omega}}_{\mathcal{A}\,\vec{u}\cdot\vec{\Omega}}$

soit $\Delta\phi = \dfrac{8\pi\mathcal{A}}{\lambda c}\,\Omega\cos\theta$ $\qquad$ où θ est l'angle entre $\vec{u}$ et $\vec{\Omega}$ (qui est lui $/\!/ \vec{e_z}$) - θ est la colatitude à Chicago $\theta = 90° - 41{,}77° = 48{,}23°$

on obtient $\Omega = \dfrac{\lambda c\,\Delta\phi}{8\pi\mathcal{A}\cos\theta} = \dfrac{570\times10^{-9}\times 3\,10^{8}\times 0.23}{4\times 613\times 339\times\cos(48{,}23°)} = 7.1\,10^{-5}$ rad/s

à comparer avec $\dfrac{2\pi}{24\,h} = 7.3\,10^{-5}$ rad/s