L3 et Magistère 1$^{\text{ème}}$ année 11 mars 2019

EXAMEN PARTIEL de RELATIVITÉ

Durée : 2 heures

Les calculatrices sont autorisées. Barème approximatif : A = 5 pts, B = 15 pts.

Formulaire

• On considère deux référentiels inertiels $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$. $\mathcal{R}'$ est animé par rapport à $\mathcal{R}$ d'un mouvement de translation rectiligne uniforme à la vitesse $\vec{V} = V\,\vec{e}_x$. Si un quadri-vecteur a pour coordonnées respectives $\underset{\sim}{A}$ et $\underset{\sim}{A}'$ dans $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$, on a $A'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}\,A^{\nu}$ où l'expression de $\Lambda^{\mu}{}_{\nu}$ est donnée dans (1), avec $\beta = V/c$ et $\gamma = (1-\beta^2)^{-1/2}$.

$$\Lambda^{\mu}{}_{\nu} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (1)$$

• Théorème de Stokes : la circulation d'un champ $\vec{A}(\vec{r})$ le long d'une courbe orientée fermée $\mathcal{C}$ délimitant une surface $\mathcal{S}$ vaut

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{A}\cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = \iint_{\mathcal{S}} \mathrm{d}^2\sigma\ \vec{u}\cdot(\vec{\nabla}\wedge\vec{A})\ , \quad (2)$$

où $\vec{u}$ est la normale unitaire au point courant de $\mathcal{S}$, sa direction est déterminée par l'orientation de $\mathcal{C}$.

• Soit $\vec{\Omega}$ un vecteur constant. On a

$$\vec{\nabla}\wedge(\vec{\Omega}\wedge\vec{r}) = 2\,\vec{\Omega}\ . \quad (3)$$

A Collision inélastique de deux protons

On considère une collision entre deux protons p^+ ($m_p\,c^2 = 938.25$ MeV) donnant un deutéron d^+ ($m_d\,c^2 = 1875.56$ MeV) et un méson π^+ ($m_\pi\,c^2 = 139.6$ MeV) :

$$p^+ + p^+ \to d^+ + \pi^+$$

Quelle est, dans le référentiel du centre de masse $\mathcal{R}^*$, l'énergie seuil de la réaction ? Calculer, au seuil de réaction, l'énergie du proton projectile dans le référentiel du laboratoire $\mathcal{R}$ où le proton cible est au repos. On donnera l'expression littérale et la valeur numérique.

B Effet Sagnac (1913)

0/ <u>Préliminaire :</u> on utilise les notations du formulaire ci-dessus. Une particule a une vitesse qui vaut $\vec{v}\,'$ dans $\mathcal{R}'$ et $\vec{v}$ dans $\mathcal{R}$. Exprimer les coordonnées v_x, v_y et v_z en fonction de v'_x, v'_y et v'_z.

On considère une fibre optique formant une boucle fermée $\mathcal{C}$, qui se déplace sans se déformer dans $\mathcal{R}$. On considère un segment de fibre de longueur $\mathrm{d}\ell$ dans $\mathcal{R}$, représenté par un vecteur $\mathrm{d}\vec{\ell}$. Puisque la fibre bouge, le segment est animé dans $\mathcal{R}$ d'une vitesse instantanée qu'on notera $\vec{V}$.

Le segment est parcouru par deux faisceaux lumineux dans les 2 sens possibles : soit dans le même sens que $\mathrm{d}\vec{\ell}$, soit dans le sens opposé. Dans le référentiel propre $\mathcal{R}'$ du segment[1], la lumière a une vitesse $v' = c/n$, où n (>1) est l'indice de réfraction du matériau dont est constituée la fibre.

[1]Plus précisément $\mathcal{R}'$ est le référentiel “comobile à l'instant t”.

1/ Pour étudier le problème dans $\mathcal{R}$ on se place dans un premier temps dans la situation unidimensionnelle souvent considérée en cours : $\vec{V} = V\,\vec{e}_x$ ($V > 0$) et $\mathrm{d}\vec{\ell} = \mathrm{d}\ell\,\vec{e}_x$. On note v (positive et $\neq c$) la vitesse dans $\mathcal{R}$ de la lumière dans la fibre. On étudie le cas où le sens de parcours est tel que $\vec{v} = +v\,\vec{e}_x$.

(a) Sur un diagramme de Minkowski dans $\mathcal{R}$ représenter les lignes d'univers des deux extrémités de la fibre, l'évènement $\underset{\sim}{E}$ (respectivement $\underset{\sim}{S}$) correspondant à l'entrée (respectivement la sortie) du signal lumineux dans la fibre, et la ligne d'univers du "photon" correspondant[2].

(b) Soit $\mathrm{d}t$ le temps que met, dans $\mathcal{R}$, le signal lumineux pour parcourir le segment de fibre. En vous aidant du schéma précédent, exprimer $\mathrm{d}t$ en fonction de $\mathrm{d}\ell$ et $v - V$. On remarquera que cette relation est valable à la fois en mécanique relativiste et en mécanique non relativiste.

(c) Exprimer alors $\mathrm{d}t$ et fonction de $\mathrm{d}\ell$ et v' en utilisant la loi non relativiste de composition des vitesses.

(d) Même question en utilisant la loi relativiste. Faire un développement limité du résultat en négligeant les termes d'ordre V^2.

(e) Comment se modifie la relation précédente lorsque la fibre est parcourue par un signal lumineux de vitesse $\vec{v} = -v\,\vec{e}_x$?[3]

On admettra que les résultats obtenus dans cette question se généralisent à un espace physique à trois dimensions sous la forme :

$$dt_{(\pm)} = \frac{\mathrm{d}\ell}{v'} \pm \frac{\vec{V}\cdot\mathrm{d}\vec{\ell}}{c^2} + \cdots \tag{B1}$$

où $\mathrm{d}t_{(+)}$ et $\mathrm{d}t_{(-)}$ sont les temps qui correspondent aux deux sens possibles de parcours du segment par la lumière.

2/ Deux rayons lumineux de longueur d'onde λ interfèrent dans $\mathcal{R}$ après avoir parcouru la fibre en sens opposés. Calculer la différence $\oint_{\mathcal{C}}(\mathrm{d}t_{(+)} - \mathrm{d}t_{(-)})$ des temps de parcours. Exprimer le déphasage $\Delta\phi$ correspondant en fonction de λ, de la circulation de $\vec{V}$ le long de $\mathcal{C}$, et de constantes fondamentales.

3/ En 1925 Michelson et Gale mesurèrent la vitesse angulaire de rotation de la Terre avec le dispositif suivant : ils ont fait interférer deux rayons lumineux qui avaient parcouru en sens opposés une trajectoire fermée $\mathcal{C}$ englobant une grande surface plane $\mathcal{A}$ (parallèle au sol), de vecteur normal unitaire $\vec{u}$. La trajectoire $\mathcal{C}$ étant entrainée par la rotation rigide de la Terre (vecteur rotation $\vec{\Omega}$), on a $\vec{V} = \vec{\Omega}\wedge\vec{r}$. En utilisant le résultat de la question précédente et le formulaire, montrer que

$$\Delta\phi = \frac{8\pi}{\lambda c}\,\mathcal{A}\,\vec{u}\cdot\vec{\Omega}\,. \tag{B2}$$

L'expérience a été faite en Illinois, à une latitude[4] de 41,77° Nord, avec de la lumière de 570 nm de longueur d'onde. L'interféromètre couvrait une surface de 613 m×339 m. Ils ont mesuré $\Delta\phi/(2\pi)$ =0,23. Quelle est la vitesse de rotation de la Terre correspondante ? Comparer avec la valeur "exacte".

[2]On met des guillemets car ce "photon" ne se propage pas exactement à la vitesse c, mais à $v < c$.

[3]Question pas difficile, qui rapporte des points, mais un peu fastidieuse car il faut reprendre ce qui précède. Peut être sautée dans un premier temps.

[4]Attention : la latitude mesure l'éloignement à l'équateur, pas directement l'angle entre $\vec{u}$ et $\vec{\Omega}$.