EXAMEN de RELATIVITÉ

Durée : 2 heures et 30 minutes

Les calculatrices sont autorisées. Barème approximatif : A = 5 pts ; B = 15 pts ; C = 5 pts.

Formulaire – Rappel de cours

• On considère deux référentiels inertiels $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$. $\mathcal{R}'$ est animé par rapport à $\mathcal{R}$ d'un mouvement de translation rectiligne uniforme à la vitesse $\vec{V} = V\,\vec{e}_x$. Si un quadri-vecteur a pour expressions respectives $\underset{\sim}{A}$ et $\underset{\sim}{A}'$ dans $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$, on a $A'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu\, A^\nu$ où l'expression de $\Lambda^\mu{}_\nu$ est donnée dans (1).

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} , \tag{1}$$

où $\beta = V/c$ et $\gamma = (1-\beta^2)^{-1/2}$.

Pour inverser la relation entre $\underset{\sim}{A}$ et $\underset{\sim}{A}'$ il suffit de changer le signe devant β dans l'expression (1).

• Les champs électrique et magnétique dans $\mathcal{R}'$ ($\vec{E}\,'$ et $\vec{B}\,'$) s'expriment en fonction de ceux dans $\mathcal{R}$ ($\vec{E}$ et $\vec{B}$) selon la loi (2) où $\vec{E}_\perp$ (respectivement $\vec{E}_\parallel$) est la composante de $\vec{E}$ perpendiculaire (respectivement colinéaire) à $\vec{V}$. Même convention pour $\vec{B}_\perp$ et $\vec{B}_\parallel$.

$$\begin{cases} \vec{E}\,' = \vec{E}_\parallel + \gamma\left(\vec{E}_\perp + \vec{V}\wedge\vec{B}_\perp\right) , \\ \vec{B}\,' = \vec{B}_\parallel + \gamma\left(\vec{B}_\perp - \frac{\vec{V}}{c^2}\wedge\vec{E}_\perp\right) . \end{cases} \tag{2}$$

• Soit un système mécanique à n degrés de libertés décrit par un lagrangien $L(q_1,..,q_n,\dot{q}_1,..,\dot{q}_n,t)$. La variable canonique conjuguée de q_i est $\pi_i = \partial L/\partial\dot{q}_i$ et l'énergie est $\mathcal{E} = \sum_{i=1}^n \pi_i\,\dot{q}_i - L$. La dynamique est régie par les n équations de Lagrange : $\dot{\pi}_i = \partial L/\partial q_i$.

• Pour un réel $\alpha > 0$ et pour $x > 0$ on a

$$\int_0^x \frac{\mathrm{d}x'}{\sqrt{1-\exp(-\alpha\,x')}} = \frac{2}{\alpha}\,\mathrm{argtanh}\left(\sqrt{1-\exp(-\alpha\,x)}\right) , \tag{3}$$

où argtanh est la fonction réciproque de la tangente hyperbolique, tanh. La connaissance des propriétés de la fonction argtanh ne sera pas nécessaire dans cette épreuve, mais il pourra être utile de se souvenir que $\tanh'(x) = 1 - \tanh^2(x) = \cosh^{-2}(x)$.

A Collision inélastique photon – proton

Un photon entre en collision avec un proton ($m_p\,c^2 = 938.25$ MeV) immobile dans le référentiel $\mathcal{R}$ du laboratoire. La collision engendre un neutron ($m_n\,c^2 = 939.55$ MeV) et un pion ($m_\pi\,c^2 = 139.6$ MeV) :

$$\gamma + p^+ \to n + \pi^+ .$$

1/ Établir la relation entre l'énergie $\mathcal{E}_\gamma$ du photon incident dans $\mathcal{R}$ et l'énergie totale $\mathcal{E}^*_{\text{tot}}$ du système dans le référentiel $\mathcal{R}^*$ du centre de masse.

2/ Quelle est l'énergie seuil de la réaction dans $\mathcal{R}^*$? Calculer l'énergie seuil du photon dans $\mathcal{R}$ et donner sa valeur numérique.

B Particule couplée à un champ scalaire (théorie alternative)

On considère une théorie décrivant le couplage de la matière à un hypothétique champ scalaire de Lorentz : $\phi(\vec{r},t)$. Pour décrire la dynamique d'une particule ponctuelle soumise à l'action de ϕ, on propose le lagrangien suivant :

$$L(\vec{r},\vec{v},t) = -mc^2\sqrt{1-\frac{\vec{v}^{\,2}}{c^2}} \times \exp\left[\frac{q\,\phi(\vec{r},t)}{mc^2}\right] \ . \qquad \text{(B1)}$$

Dans cette expression, m est la masse de la particule et q une quantité décrivant l'intensité de l'interaction entre la particule et le champ ; m et q sont des invariants de Lorentz. La quantité $q\,\phi$ a les dimensions d'une énergie. Dans tout l'exercice on se placera dans le cas où $q > 0$.

1/ Montrer que la limite non relativiste de (B1) (obtenue en prenant la limite formelle $c \to \infty$) fournit un lagrangien possible de la dynamique d'une particule de charge q soumise à un potentiel électrique ϕ.

2/ On revient au lagrangien relativiste (B1). Exprimer l'impulsion généralisée $\vec{\pi}$ de la particule (c'est le moment conjugué de la position) en fonction des données du problème (cf. formulaire). Calculer l'énergie $\mathcal{E}$ de la particule. On rappelle qu'elle est conservée lorsque ϕ ne dépend pas explicitement du temps.

3/ On veut étudier le mouvement d'une particule initialement au repos à l'origine des coordonnées et soumise à un champ indépendant du temps : $\phi(\vec{r}\,) = -E_0\,x$, où E_0 est une constante positive.

(a) En utilisant l'expression classique de la relation fondamentale de la dynamique (qui découle du développement non relativiste de la question 1/), donner l'expression de $x(t)$ aux temps courts.

(b) Plutôt que d'utiliser directement l'équation du mouvement relativiste, écrire la conservation de l'énergie associée au lagrangien (B1)[1] et exprimer alors $|\vec{v}\,|$ en fonction de x et de constantes.

(c) La question (a) nous a montré que le mouvement se situait initialement selon l'axe Ox, avec x et $\dot{x} > 0$; on va supposer que c'est également le cas ultérieurement. En utilisant le résultat de la question (b) et le formulaire, donner la loi horaire $x(t)$ de la trajectoire.

(d) Montrer qu'on obtient $v(t) = c \times \tanh(t/\tau)$ où τ est un temps caractéristique qu'on exprimera en fonction des données du problème.

4/ On considère la **vraie** dynamique relativiste d'une particule de charge q, initialement au repos, soumise à un champ électrique constant $\vec{E} = E_0\,\vec{e}_x$. Écrire sans démonstration l'équation relativiste du mouvement, en déduire l'expression de la vitesse en fonction du temps et comparer au résultat 3/(d) de notre théorie alternative. Conclure.

5/ Écrire les équations de Lagrange qui découlent de (B1)[2]. Montrer qu'elles peuvent se mettre sous la forme covariante suivante[3] :

$$\frac{\mathrm{d}P^\alpha}{\mathrm{d}\tau} = q\left(\partial^\alpha\phi - \frac{1}{c^2}\,U^\alpha\,U^\beta\partial_\beta\phi\right) \ , \qquad \text{(B2)}$$

où $\mathrm{d}\tau$ est l'intervalle de temps propre, $\underset{\sim}{U}$ la quadri-vitesse et $\underset{\sim}{P} = m\,\underset{\sim}{U}$ la quadri-impulsion. Pouvait-on prévoir à l'avance que l'équation du mouvement prendrait une forme covariante ?

---

[1] Cela constitue une intégrale première des équations relativistes du mouvement.

[2] Il est recommandé de faire apparaître la quantité de mouvement relativiste $\vec{p} = m\vec{v}/\sqrt{1-v^2/c^2}$.

[3] On ne fera la vérification que pour les composantes spatiales : $\alpha = 1$, 2 et 3.

C Transformation d'une onde plane

On considère une onde électromagnétique plane caractérisée dans un référentiel $\mathcal{R}$ par les champs

$$\vec{E}(\vec{r},t) = E_z(\vec{r},t)\,\vec{e}_z \quad \text{et} \quad \vec{B}(\vec{r},t) = \frac{1}{c}\,\vec{e}_y \wedge \vec{E}(\vec{r},t) = \frac{1}{c} E_z(\vec{r},t)\,\vec{e}_x \ ,$$

où

$$E_z(\vec{r},t) = E_0 \exp[\mathrm{i}(\omega t - ky)] \ , \quad \text{et} \quad \omega = c\,k \ .$$

1/ Donner la valeur des champs électrique et magnétique dans le référentiel $\mathcal{R}'$ qui est animé par rapport à $\mathcal{R}$ d'un mouvement de translation rectiligne uniforme à la vitesse $\vec{V} = V\,\vec{e}_x$. On donnera leur expression en fonction des coordonnées (t', x', y', z') dans $\mathcal{R}'$.

2/(a) Déduire de ce qui précède la pulsation ω' de l'onde dans $\mathcal{R}'$, ainsi que son vecteur d'onde $\vec{k}\,'$.

(b) Déduire du resultat précédent la relation entre ω' et $k' = |\vec{k}\,'|$. Commenter.

(c) Retrouver l'expression de ω' et celle de $\vec{k}\,'$ en utilisant les lois de transformation du quadri-vecteur d'onde.

(d) La nouvelle onde a-t-elle les caractéristiques d'une onde plane ? En particulier, $\vec{k}\,'$, $\vec{E}\,'$ et $\vec{B}\,'$ sont-ils mutuellement orthogonaux ? Forment-ils un trièdre direct ?