

# De la corde au film de savon : l'auto-adaptation dans les systèmes vibrants

**Quand on force une corde tendue à vibrer, elle ne répond que si la fréquence d'excitation est proche de l'une de ses fréquences propres. Si l'on ajoute une masselotte qui peut coulisser sur la corde, on observe que la position stationnaire de la masselotte s'ajuste pour que le système se mette à résonance avec la force appliquée. L'ajout d'un degré de liberté à la corde rend son comportement auto-adaptatif : elle répond à presque toute fréquence d'excitation. L'auto-adaptation à une force appliquée est un phénomène général, probablement observable dans des cavités acoustiques, optiques ou micro-ondes.**

La théorie des vibrations figure maintenant dans les cours de physique classique. Les premiers travaux sur les vibrations cherchaient à comprendre le fonctionnement des instruments de musique. Ils remontent au début du XVII<sup>e</sup> siècle quand Galilée et Mersenne établirent la loi donnant les fréquences propres d'une corde tendue, *i.e.* la hauteur des sons qu'elle émet en vibrant. De nombreux travaux suivirent aux XVIII<sup>e</sup> et XIX<sup>e</sup> siècles. L'étude de la propagation des ondes suscita ainsi une controverse entre Euler, d'Alembert et Lagrange, qui se demandaient si une corde pincée (que l'on écarte de sa position d'équilibre en la pinçant entre les doigts) pouvait physiquement et mathématiquement présenter une discontinuité de pente à l'endroit du pincement. Lagrange détermina les fréquences propres d'une corde de masse linéique spatialement variable. Helmholtz prolongea ce travail en étudiant les vibrations d'une corde au milieu de laquelle est fixée une masse ponctuelle ; son but était en fait de trouver les plus basses fréquences audibles par l'oreille humaine : la masse ajoutée augmente l'inertie de la corde et, par conséquent, abaisse sa fréquence fonda-

mentale (sa plus petite fréquence de vibration spontanée) ; ainsi, en faisant vibrer la corde et en variant la masse ajoutée, Helmholtz calculait les fréquences fondamentales audibles.

Si l'on soumet une corde tendue à une force sinusoïdale, la vibration de la corde est imperceptible sauf si la fréquence de la force appliquée est proche de l'une des fréquences propres de la corde. Dans ce cas, l'amplitude de vibration de la corde est grande : il y a résonance avec le « forçage » (la force extérieure). Le premier système modèle que nous présentons est quasiment identique à celui de Helmholtz : il s'agit d'une corde tendue sur laquelle est enfilée une masselotte. Mais dans notre expérience, la masselotte peut en outre coulisser sur la corde. Cette caractéristique est essentielle pour notre propos. En effet, le système acquiert un degré de liberté supplémentaire : la position de la masselotte sur la corde. Nous verrons que cela donne au système un caractère auto-adaptatif : il se réorganise pour répondre à quasiment tout type de forçage. Ainsi, la corde avec une masselotte libre de coulisser vibre pour presque toute fréquence d'excitation, alors qu'une corde avec une masselotte fixe ne vibre qu'à des fréquences proches de ses fréquences propres. En parallèle avec

Brazovskaia et Pieranski, nous avons décrit les premiers exemples – à notre connaissance – de systèmes auto-adaptatifs. Nous pensons que l'auto-adaptation est un phénomène générique pour un système physique auquel on a ajouté un degré de liberté. En plus de la corde portant une masselotte, nous considérerons trois autres exemples de systèmes vibrants auto-adaptatifs : un autre exemple discret (avec un degré de liberté supplémentaire) – une bille posée sur une membrane tendue ; deux exemples continus (avec beaucoup de degrés de liberté supplémentaires) – une corde portant un grand nombre de masselottes et un film de savon. Nous discuterons enfin des exemples de systèmes non mécaniques où il est probablement possible d'observer un comportement auto-adaptatif.

### VIBRATIONS FORCÉES D'UNE CORDE

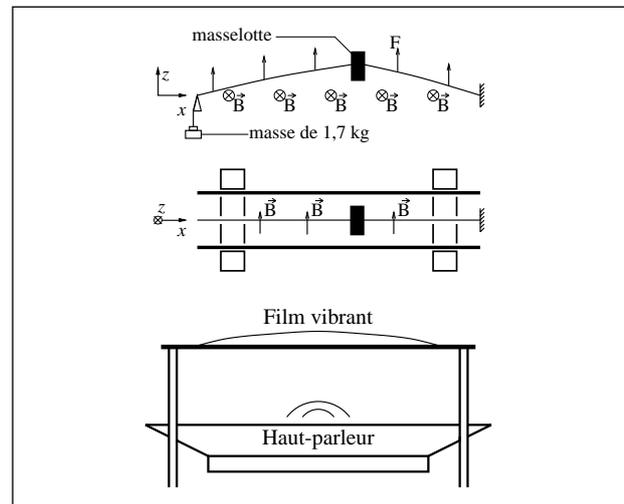
Considérons une corde tendue et soumise à un forçage périodique (figure de l'encadré 1, sans la masselotte) et rappelons quelques résultats classiques sur ses vibrations. Supposons la corde horizontale à l'équilibre. Un élément de la corde dont la position à l'équilibre est  $(x, 0)$  se trouve à l'instant  $t$  en  $(x, z(x, t))$  ; la donnée du déplacement transverse (ici vertical)  $z(x, t)$  définit la forme

## Encadré 1

**DISPOSITIFS EXPÉRIMENTAUX**

**Corde vibrante :** une corde de piano de masse linéique  $\mu = 1,53 \text{ g/m}$  est fixée à une extrémité et tendue par un poids de  $1,7 \text{ kg}$  à l'autre extrémité (figure). Le forçage est réalisé avec un champ magnétique produit par deux aimants en U reliés par des barres en fer doux ; un courant alternatif sinusoïdal passe dans la corde de sorte qu'elle est soumise à une force verticale sinusoïdale de fréquence contrôlée. La masselotte est un disque en cuivre de masse  $m = 1,62 \text{ g}$  percé d'un trou légèrement plus grand que la section de la corde. On mesure l'abscisse ( $x = \xi$ ) des positions stationnaires de la masselotte en fonction de la fréquence de forçage (figure 1 du texte).

**Films vibrants :** un film smectique ou un film de savon (encadré 2) est produit sur un cadre rectangulaire (de dimensions  $8 \times 5 \text{ mm}$  pour le film smectique et  $16 \times 2,5 \text{ cm}$  pour le film de savon, par exemple). Le forçage est acoustique : le film est placé au-dessus d'un haut-parleur soumis à un signal sinusoïdal dont on contrôle la fréquence.



**Figure** - Schémas des expériences. Haut : corde vibrante (vue de côté). Milieu : corde vibrante (vue de haut). Bas : films vibrants.

de la corde à chaque instant. Si  $\mu$  est la masse par unité de longueur de la corde,  $T$  la force avec laquelle elle est tendue et  $F \cos(2\pi\omega t)$  la force verticale appliquée par unité de longueur, le principe fondamental de la dynamique conduit à

$$\mu \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = T \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + F \cos(2\pi\omega t) \quad (1)$$

qui est l'équation d'onde forcée à la fréquence  $\omega$ . Le premier terme du membre de droite traduit le fait que, si la corde est courbée (si le déplacement transverse est petit,  $\partial^2 z / \partial x^2$  représente la courbure), la tension  $T$  tend à ramener la corde vers un état rectiligne.

En l'absence de force appliquée, la corde possède des modes propres de vibration, dont les longueurs d'onde sont

$$\lambda_n = \frac{2L}{n} \quad (2)$$

$L$  étant la longueur de la corde et  $n$  un entier non nul. Ainsi, la corde est recouverte par un nombre entier de

demi-longueurs d'onde, ce qui assure un déplacement transverse  $z$  nul aux extrémités de la corde. Les fréquences de vibration correspondantes sont alors

$$\omega_n = \frac{2n}{L} \sqrt{\frac{T}{\mu}} \quad (3)$$

Les fréquences propres sont les multiples entiers de la fréquence fondamentale  $\omega_1$ . On observe ces modes propres si la corde est écartée de sa position d'équilibre : la corde vibre à une fréquence propre jusqu'à ce que l'énergie qui lui est initialement communiquée se dissipe (une corde de guitare).

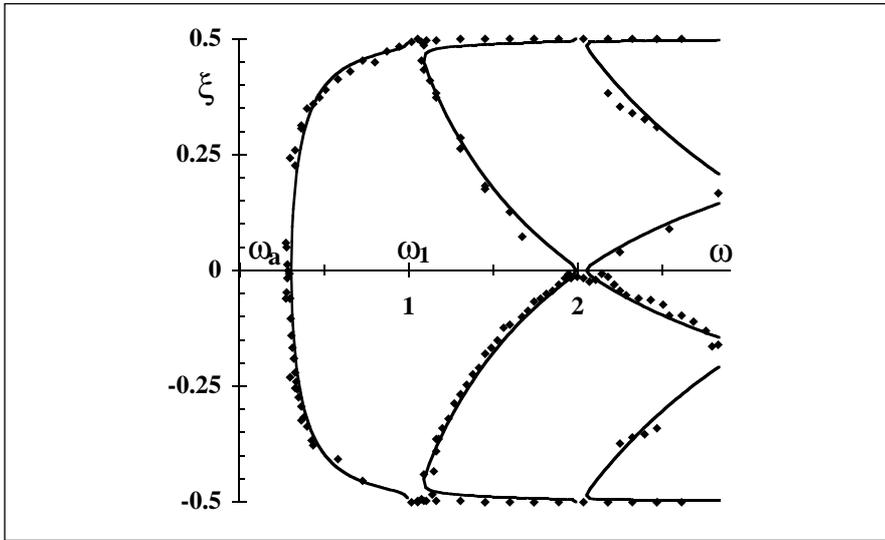
Si la corde est excitée, l'amplitude de vibration est petite, sauf si la fréquence de forçage  $\omega$  est proche de l'une des fréquences propres  $\omega_n$ . Quand  $\omega = \omega_n$ , il y a résonance : l'amplitude de vibration (le maximum de déplacement transverse  $z$ ) prédite par l'équation (1) devient infinie ; en pratique, l'amplitude de vibration est grande, étant limitée par

l'élasticité de la corde et par la dissipation d'énergie par rayonnement d'ondes sonores.

**CORDE AVEC UNE MASSELOTTE**

Perçons une masselotte et enfilons-la sur la corde tendue considérée dans le paragraphe précédent. Si la masselotte est fixée sur la corde, on obtient exactement la configuration étudiée par Helmholtz, qui possède aussi des fréquences propres (elles ne sont pas uniformément distribuées comme pour une corde de masse linéique uniforme). Nous nous intéressons maintenant à la situation où la masselotte peut coulisser.

Les détails de l'expérience sont exposés dans l'encadré 1. Le paramètre de contrôle est la fréquence de forçage  $\omega$  ; le paramètre d'ordre est la position stationnaire  $\xi$  de la masselotte, que nous mesurons (figure 1). A très basse fréquence, la vibration est imperceptible et la masselotte est immobile. Quand la



**Figure 1** - Corde vibrante avec masselotte : positions stationnaires de la masselotte  $\xi$  (adimensionnées par la longueur de la corde  $L = 30$  cm,  $\xi = 0$  représentant le milieu de la corde) en fonction de la fréquence de forçage (adimensionnée par la fréquence fondamentale de la corde  $\omega_1 = 130$  Hz) ; carrés : expérience, courbes : positions théoriques où le système est à résonance. La première transition continue se produit à la fréquence  $\omega_a$ .

fréquence  $\omega$  se rapproche d'une certaine fréquence  $\omega_a$ , la vibration devient observable (amplitude de vibration de la corde de l'ordre de 0,5 mm) et la masselotte se déplace lentement et s'arrête au milieu de la corde. Quand  $\omega = \omega_a$ , l'amplitude de vibration est grande (3 mm) ; la masselotte se trouve alors à un ventre de vibration (une position où l'amplitude de vibration de la corde est maximale). La comparaison avec les résultats de Helmholtz montre que  $\omega_a$  est exactement la première fréquence propre de l'ensemble corde/masselotte quand la masselotte est fixée au centre ; le système s'est donc spontanément mis à la résonance.

Avec une masselotte fixée, une augmentation de la fréquence au-dessus de  $\omega_a$  désaccorderait le système : l'amplitude de vibration redeviendrait petite. Ici, la masselotte se déplace à droite ou à gauche, vers une position bien déterminée, alors que l'amplitude de vibration reste grande. Cette rupture de symétrie gauche-droite est associée à une transition continue (une transition de phase du deuxième ordre ou une bifurcation fourche, figure 1). Quand la fréquence d'excitation s'approche

de  $\omega_1$ , l'amplitude de vibration de la corde reste grande, mais la masselotte ne se trouve plus à un ventre (voir le schéma théorique correspondant, figure 2). Quand  $\omega = \omega_1$ , la fréquence fondamentale de la corde seule, la masselotte se trouve à l'une des deux extrémités de la corde, c'est-à-dire à un nœud ; la corde vibre comme s'il n'y avait pas de masselotte. Le système continue à s'adapter pour être à résonance. Plusieurs autres transitions similaires ont lieu au-dessus de  $\omega_1$  (figure 1).

Passons à la modélisation. La présence de la masselotte de masse  $m$  en  $x = \xi$  conduit à modifier l'équation d'onde (1) en

$$(\mu + m\delta(x - \xi)) \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = T \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + F \cos(2\pi\omega t) \quad (4)$$

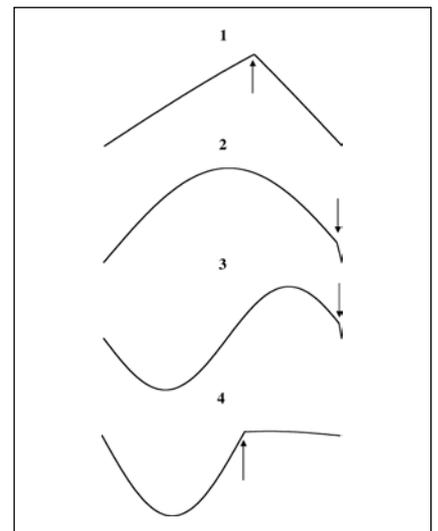
où  $\delta$  est la distribution de Dirac qui traduit la présence d'une masse ponctuelle. Cette équation décrit le mouvement vertical de la corde. Le théorème de l'énergie cinétique appliqué à la masselotte, moyennant l'hypothèse que le déplacement de la masselotte est bien plus lent que la vibration, conduit à l'équation qui détermine sa position horizontale

$$m \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = - \frac{\partial V_{\text{eff}}}{\partial \xi} \quad (5)$$

avec  $V_{\text{eff}} = -2\pi^2 m \omega^2 (z(\xi))^2$

La masselotte se déplace comme si elle était dans un potentiel effectif  $V_{\text{eff}}$ . Sa position stationnaire est alors celle qui minimise  $V_{\text{eff}}$  et qui maximise l'amplitude de vibration  $z(\xi)$  au niveau de la masselotte. Cela n'implique pas que la masselotte est à un ventre, car sa position change la forme de la corde (figure 2). Elle peut même se trouver accidentellement à un nœud, par exemple à  $\omega_1$  ! En général, la masselotte est éjectée vers des positions où  $z(\xi)$  est grand par la force centrifuge provenant de la vibration. Une telle force centrifuge s'observe aisément si l'on fait pivoter autour de son extrémité une tige sur laquelle on a enfilé un anneau : l'anneau est éjecté vers l'autre extrémité.

En utilisant les équations (4-5), on montre que les positions stationnaires de la masselotte sont telles



**Figure 2** - Formes théoriques de l'amplitude de vibration de la corde quand la masselotte est à sa position d'équilibre (marquée par une flèche). Il y a une discontinuité de pente à la position de la masselotte, car à cet endroit, la masse linéique du système est infinie (si l'on suppose la masselotte ponctuelle). 1 :  $\omega/\omega_1 = 0,31$ , juste au-dessus de la première bifurcation, la masselotte est à un ventre ; 2 :  $\omega/\omega_1 = 0,95$ , juste en dessous de la fréquence fondamentale, la position stationnaire est près d'un nœud ; 3, 4 : deux positions possibles pour  $\omega/\omega_1 = 1,9$ .

que le système est à résonance avec le forçage. Ces positions coïncident avec les positions expérimentales (figure 1). Ce résultat s'interprète de la façon suivante. Imaginons la masselotte à une position où il y a résonance – son amplitude de vibration est alors grande – et déplaçons-la un peu : la fréquence propre du système masse+corde est changée et diffère de la fréquence de forçage ; il n'y a plus résonance et la vibration devient imperceptible. Ainsi, l'amplitude de vibration au niveau de la masselotte est maximisée – à part quand la masselotte se trouve exactement à un nœud, ce qui se produit aux fréquences bien particulières  $\omega_n$  – quand sa position est telle que le système est à résonance avec la force appliquée.

Ainsi, l'ajout d'un degré de liberté supplémentaire à une corde vibrante lui donne un caractère auto-adaptatif : le système s'adapte au forçage pour être à résonance. Quelle est donc la généralité de ce résultat ?

**FILM SMECTIQUE AVEC BILLE**

Rappelons les résultats obtenus antérieurement par Brazovskaia et Pieranski sur un système différent. Il est possible de produire un film smectique rectangulaire (encadré 2), *i.e.* une fine couche de cristal liquide smectique. Ce film se comporte comme une membrane de tambour tendue ; il possède des fréquences propres comme une corde (*Images de la Physique* 1998),

$$\omega_{n,m} = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho h}} \sqrt{\frac{n^2}{L^2} + \frac{m^2}{l^2}} \quad (6)$$

$n$  et  $m$  étant des entiers non nuls,  $\sigma$  la tension du film,  $\rho$  sa masse volumique,  $h$  son épaisseur et  $L \times l$  ses dimensions.

Si le film est soumis à un forçage périodique, il ne répond de manière notable que si la fréquence d'excitation  $\omega$  est proche de l'une des fréquences propres  $\omega_{n,m}$ . Brazovskaia et Pieranski ont posé une petite bille

sur le film et l'ont forcée à vibrer ; la méthode de forçage employée est efficace autour de la plus petite fréquence propre. Quand la fréquence d'excitation varie de  $\omega_{1,1}$  à  $\omega_{2,1}$ , la position stationnaire de la bille se déplace sur la diagonale du film d'un côté du rectangle vers son centre, de sorte que le système reste à résonance avec le forçage.

Cet exemple montre encore qu'un degré de liberté supplémentaire donne au système vibrant un caractère auto-adaptatif. Que peut-on dire quand il y a plusieurs degrés de liberté supplémentaires ?

**CORDE AVEC UN GRAND NOMBRE DE MASSELOTES**

La façon la plus naturelle d'obtenir plusieurs degrés de liberté est d'enfiler plusieurs masselottes sur une corde tendue. Toutefois, des expériences avec deux masselottes montrent que si elles se rencontrent, elles restent ensemble et ne se séparent

**Encadré 2**

**FILMS DE SAVON ET FILMS SMECTIQUES**

**Films de savon :** un film de savon s'obtient en plongeant un cadre dans de l'eau savonneuse. A l'équilibre, son épaisseur est uniforme (de l'ordre du  $\mu m$ ) ; hors équilibre, son épaisseur peut varier spatialement. Le film est caractérisé par sa tension de surface  $\sigma$  de l'ordre de 20 mN/m (il est tendu comme la membrane d'un tambour). Le film est « élastique » ; l'élasticité du film s'oppose aux variations d'épaisseur : elle ramène le film vers un état d'équilibre où l'épaisseur est uniforme.

**Films smectiques :** un cristal liquide est constitué de molécules en forme de bâtonnets. Lorsque ces molécules s'organisent en couches (d'épaisseur typique 5 nm), la structure obtenue est un smectique, appelé smectique A si les bâtonnets sont perpendiculaires aux couches ; il n'y a cependant pas d'ordre au sein d'une couche. Comme pour l'eau savonneuse, il est possible de produire un film smectique. Celui-ci est constitué de plusieurs couches (de l'ordre de la centaine) ; en général, son épaisseur ne varie pas spatialement car elle est fixée par le nombre de couches.

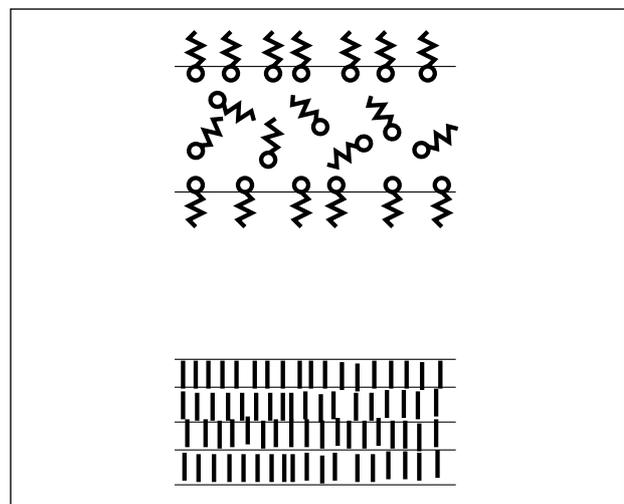
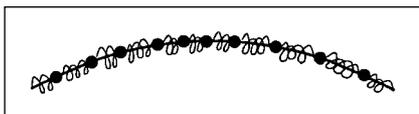


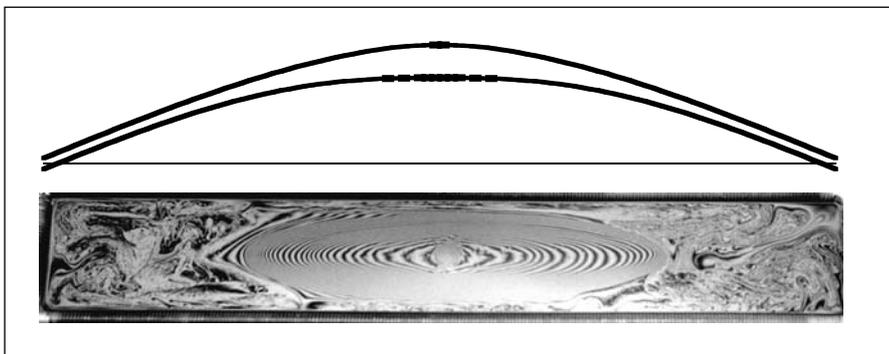
Figure - Haut : un film de savon (les échelles ne sont pas respectées ; la taille des molécules de savon est exagérée). Bas : un film smectique.

pas spontanément ; le système se comporte alors comme s'il n'y avait qu'une seule masselotte. Pour remédier à cet inconvénient, considérons une corde tendue portant plusieurs masselottes et plaçons un ressort entre deux masselottes consécutives (figure 3). Les ressorts empêchent l'aggrégation des masselottes.



**Figure 3** - Système vibrant à plusieurs degrés de liberté : une corde sur laquelle coulisent des masselottes séparées par des ressorts.

La réalisation pratique de ce système est en fait très difficile. Toutefois, pour un grand nombre de masselottes, il est équivalent à un film de savon forcé à vibrer, comme nous l'expliquons ci-dessous.



**Figure 4** - Film de savon en vibration. Bas : photo prise du dessus du cadre du film éclairé en lumière monochromatique ; on observe des franges d'épaisseur égale qui montrent que le film est plus épais au ventre de vibration (un seul ventre central dans ce cas) ; le rapport entre l'épaisseur à un ventre et à un nœud peut aller jusqu'à 1 000. Haut : schéma d'une coupe verticale montrant la surépaisseur au ventre.

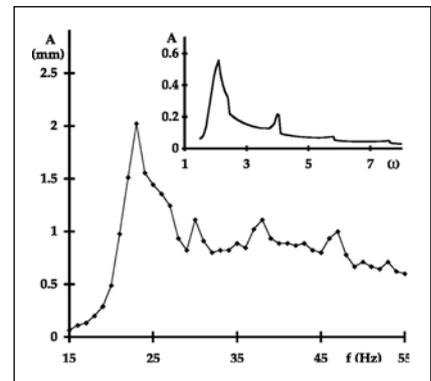
## FILM DE SAVON

Si l'on plonge un cadre rectangulaire dans de l'eau savonneuse et qu'on le ressort, on obtient un film de savon que l'on peut faire vibrer avec une onde sonore (encadré 1). A l'inverse d'un film smectique pour lequel l'épaisseur est constante, l'épaisseur d'un film de savon peut varier spatialement (encadré 2). En effet, quand on observe le film vibrant en lumière monochromatique

(figure 4), des franges d'épaisseur montrent que le film est bien plus épais aux ventres de vibration qu'aux nœuds, d'un facteur allant jusqu'à 1 000 ! Si l'on revient à la corde portant un grand nombre de masselottes, un endroit où le film est épais correspond à une accumulation de masselottes, *i.e.* à une concentration de masse. Les deux systèmes sont très similaires. L'épaisseur du film et la densité de masselottes, la tension de surface et la tension de la corde, l'élasticité du film (qui s'oppose aux variations d'épaisseur, encadré 2) et les ressorts sur la corde (qui empêchent l'accumulation de masselottes) jouent respectivement les mêmes rôles.

Étant donné la possibilité de variations d'épaisseur, le comportement du film doit être différent de celui de la membrane d'un tambour. Effectivement, alors que la membra-

ne ne répond au forçage qu'à des fréquences proches de ses fréquences propres, l'amplitude de vibration du film de savon (figure 5) est grande et varie peu avec la fréquence d'excitation. En régime stationnaire, le profil d'épaisseur est déterminé par l'équilibre entre la force centrifuge résultant de la vibration et l'élasticité du film. La force centrifuge tend à accumuler la matière aux ventres de vibration, donc à y rendre le film plus épais ; comme pour la corde portant



**Figure 5** - Amplitude expérimentale de vibration du film de savon en fonction de la fréquence de forçage. Insert : résultats théoriques (les unités sont arbitraires). Si l'épaisseur était constante, le film de savon se comporterait comme un tambour ou un film smectique (la vibration n'est perceptible que pour une fréquence d'excitation proche d'une fréquence propre), et le rapport entre maxima et minima d'amplitude de vibration serait énorme.

une masselotte, elle ajuste la répartition de matière pour rapprocher le système de la résonance. La force élastique s'oppose aux variations d'épaisseur et, par conséquent, à une trop grande accumulation de matière ; elle écarte le système de la résonance. Le compromis détermine l'amplitude de la réponse à la force appliquée. Ainsi, l'ajout d'un degré de liberté supplémentaire – l'épaisseur – à une membrane lui donne un caractère auto-adaptatif : le film ajuste sa distribution d'épaisseur pour répondre tout le temps au forçage.

## CONCLUSION

Nous avons montré que l'ajout à un système vibrant de degrés de liberté (une masse mobile sur une corde ou un film smectique, l'épaisseur d'un film de savon) lui donne un caractère auto-adaptatif : il répond à presque toute fréquence de forçage en ajustant ces degrés de liberté.

Les ingrédients qui semblent essentiels à l'observation de ce phénomène sont le forçage d'ondes dans un domaine borné (une cavité) et le couplage entre un élément mobile et les ondes. L'auto-adaptation pourrait donc aussi être observée pour des ca-

vités optiques, acoustiques ou micro-ondes. On remplacerait les ondes mécaniques par des ondes lumineuses ou acoustiques, ou par des micro-ondes. Le degré de liberté supplémentaire serait la position d'une impureté, *i.e.* un morceau de matériau où la célérité des ondes diffère de leur célérité dans le reste de la cavité. Le couplage mécanique entre la masselotte et la corde serait remplacé par la pression de radiation exercée par l'onde sur l'impureté.

Par ailleurs, l'équation de Schrödinger stationnaire pour une particule dans une cavité s'identifie mathématiquement à l'équation d'ondes stationnaires dans une cavité (*Images de la Physique* 1998). Par exemple, la détermination des énergies propres de la particule quantique est équivalente au calcul des

fréquences propres d'une corde tendue. Cette identité amène à se poser la question suivante : pourrait-on observer des effets quantiques similaires à l'auto-adaptation ?

Enfin, on pourrait réfléchir à la conception d'instruments de musique comportant des éléments mobiles, tels qu'une masselotte enfilée sur une corde. L'auto-adaptation de la position de la masselotte serait un moyen de changer la fréquence de vibration de la corde, et donc de moduler la hauteur des sons émis par l'instrument.

#### POUR EN SAVOIR PLUS

*Théorie des vibrations :*

**Morse (P.)**, « Vibration and Sound », *Mc Graw Hill*, 1936.

*Films smectiques :*

**Pieranski (P.) et al.**, « *Physica A* » **194**, 264, 1993.

**Even (C.) et Pieranski (P.)**, « *Images de la physique* », *CNRS*, 92, 1998.

*Films de savon :*

**Couder (Y.), Chomaz (J.-M.) et Rabaud (M.)**, « *Physica D* » **37**, 384, 1989.

*Auto-adaptation :*

**Brazovskaia (M.) et Pieranski (P.)**, « *Phys. Rev. Lett.* » **80**, 5595, 1998.

**Boudaoud (A.), Couder (Y.) et Ben Amar (M.)**, « *Eur. Phys. J. B* » **9**, 159, 1999.

**Boudaoud (A.), Couder (Y.) et Ben Amar (M.)**, « *Phys. Rev. Lett.* » **82**, 3847, 1999.

Article proposé par :

Arezki Boudaoud, tél. 01 44 32 34 46, boudaoud@lps.ens.fr

Ont également participé à ce travail Yves Couder et Martine Ben Amar, du Laboratoire de physique statistique.