

Chapitre 1

Introduction : morceaux choisis de physique mésoscopique

1.1 Introduction : physique mésoscopique

La physique mésoscopique est née au début des années 80 de la conjonction de deux progrès technologiques : 1) la miniaturisation des conducteurs électriques à des échelles microscopiques, 2) les progrès dans le refroidissement de ces structures et la sensibilité de la détection. ¹

1) *Du macroscopique au mésoscopique : du classique au quantique.* – En partant de l'échelle macroscopique, la réduction de la taille des conducteurs électriques est intéressante, du point de vue de la recherche fondamentale, car se manifeste la nature quantique des porteurs de charge (électrons ou lacunes d'électrons). La dualité onde/corpuscule s'y illustre de différentes manières. Par exemple, la nature corpusculaire des porteurs de charge est explicite dans le phénomène de blocage de Coulomb, qui caractérise la quantification de la charge isolée dans une boîte quantique faiblement couplée à des contacts. Elle est également démontrée par les mesures de bruit de grenaille à travers un conducteur cohérent. La nature ondulatoire des électrons a de nombreuses conséquences sur le processus de transport. On peut observer des phénomènes d'interférences quantiques en faisant passer un courant dans un anneau de taille microscopique (figure 2.1 p. 51) ; comme dans l'expérience des trous d'Young en optique, les deux bras de l'anneau définissent deux chemins pour l'onde électronique. La figure d'interférence est obtenue en faisant varier la phase relative, par exemple par application d'un champ magnétique (effet Aharonov-Bohm) : figure 5.14 p. 148. Un autre phénomène d'interférences quantiques est la localisation faible, petite correction au coefficient de transport classique venant des interférences entre trajectoires électroniques renversées lors de la diffusion par un potentiel désordonné (figure 4.4 p. 117). Ces phénomènes d'interférences induisent par exemple des violations des lois macroscopiques de l'électrocinétique comme la loi de composition des résistances de deux éléments mis en série ou en parallèle.

L'intérêt de la miniaturisation rencontre des limites en deçà desquelles on perd l'*universalité* pour rencontrer une physique fortement dépendante des détails microscopiques. La physique *mésoscopique* ² est bien une physique des échelles *intermédiaires* entre le macroscopique et l'Ångströmscopique ou le nanoscopique, *i.e.* l'échelle atomique ou moléculaire [40, 767].

2) *Le refroidissement.* – La physique mésoscopique ne procède pas seulement d'une réduction de la taille du conducteur mais requiert également un refroidissement efficace pour atteindre des

¹l'un ne va pas sans l'autre puisqu'en mesurant un système on le sonde en y déposant de l'énergie. En particulier le courant traversant un conducteur le chauffe par effet Joule, effet d'autant plus redoutable que le conducteur est petit.

²terminologie due à Van Kampen, selon Y. Imry [762]

températures de quelques Kelvin. L'observation d'effets d'interférences quantiques nécessite en effet d'abaisser la température afin de limiter les processus d'activation thermique. Il s'agit à la fois de limiter l'activation thermique des électrons eux-mêmes, qui les promouvrait dans des états de haute énergie et faciliterait le transport, mais aussi de l'activation des autres degrés de liberté interagissant avec les électrons limitant la *cohérence de phase*.

Nous voyons donc que l'accès au domaine mésoscopique requiert un **double confinement** : confinement **spatial** par la réduction de la taille, mais aussi un confinement **énergétique** par le refroidissement en limitant les énergies accessibles.

Pour terminer cette petite introduction, donnons quelques ordres de grandeur des échelles importantes mises en jeu dans les conducteurs mésoscopiques. Je me concentre sur les deux types de systèmes qui m'ont partiellement intéressés, à savoir des métaux, fils d'argent ou d'or, ou des métaux bidimensionnels réalisés par confinement d'un gaz d'électrons à l'interface de deux semiconducteurs GaAs/GaAl_xAs_{1-x} (chapitre 5).³

	metal (Ag)	2DEG (GaAs/GaAlAs)
dimensionality d	3D	2D
effective mass m^*	1.1	0.067
geometry	square	square
wire length	$a = 640$ nm	$a = 1000$ nm
width	$W = 60$ nm	$W = 170$ nm *
thickness	$b = 50$ nm	frozen
electron density n_e	$2_s \frac{k_F^3}{6\pi^2} = 5.9 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3}$	$2_s \frac{k_F^2}{4\pi} = 4.4 \cdot 10^{15} \text{ m}^{-2}$
Fermi wavelength $k_F^{-1} = \lambda_F/(2\pi)$	0.083 nm	6 nm
Fermi velocity v_F	$1.39 \cdot 10^6$ m/s	$0.29 \cdot 10^6$ m/s
Fermi energy ϵ_F	4.8 eV	16 meV
DoS $\nu_d = 2\rho_0 \equiv \nu_d$	$18 \text{ eV}^{-1}\text{nm}^{-3}$	$0.28 \text{ eV}^{-1}\text{nm}^{-2}$
# of channels N_c	$\frac{k_F^2 W b}{4\pi} = 34600$	$\frac{k_F W}{\pi} = 9$
elastic m.f.p. ℓ_e	22 nm (*)	220 nm *
$k_F \ell_e$	265	37
diffusion constant $D = \frac{v_F \ell_e}{d}$	$0.01 \text{ m}^2/\text{s}$	$0.03 \text{ m}^2/\text{s}$
Thouless energy $E_{\text{Th}} = \hbar D/(4a)^2$	1 μeV	1.3 μeV
$g_{\text{wire}} = \alpha_d N_c \ell_e / a$	1590	3
spin-orbit : L_{so}	$\sim 0.5 \mu\text{m}$ (\ddagger)	negligible
$L_T = \sqrt{\hbar D/k_B T}$	$0.27 \times T^{-1/2}$	$0.46 \times T^{-1/2}$
$L_\varphi^{\text{ee}} = \sqrt{2} L_N$	$4.05 \times T^{-1/3}$	$0.84 \times T^{-1/3}$
T_* at which $L_T = L_\varphi^{\text{ee}}$	0.09 μK	27 mK
$L_\varphi^{\text{e-ph}}$	$12 \times T^{-3/2}$ (\ddagger)	

TABLE 1.1 : Orders of magnitude in two square networks made in different materials studied in Refs [576] and [241]. The lengths marked with a $\ll * \gg$ are extracted from WL fit. Temperature are expressed in K and lengths in μm . More information on T_* can be found in the appendix page 155. (*) : It is worth stressing that this short mean free path is mostly due to the boundaries in these thin films or wires. For example, the elastic mean free path in pure gold in bulk is $\ell_e^{\text{bulk}} \simeq 4 \mu\text{m}$. (\ddagger) : data from [787].

³ Useful quantities $1\text{K} = 86 \mu\text{eV}$, $\phi_0 = h/e = 41.4 \text{ Gauss} \cdot \mu\text{m}^2$ & $e^2 = 1.44 \text{ eV} \cdot \text{nm}$.

1.2 Cohérence de phase dans les conducteurs mésoscopiques : de la formule de Landauer à la boîte à outils büttikerienne

L'objectif de cette section est de faire une petite revue de quelques problèmes de la physique mésoscopique pour illustrer l'étendue du champ d'application de l'approche de diffusion. Je commencerai par discuter quelques grands classiques incontournables avant d'introduire quelques développements plus récents. Comme le titre du chapitre l'indique, je ne vise pas l'exhaustivité, loin de là, mais plutôt à illustrer l'intérêt d'une approche en discutant brièvement quelques problèmes variés.

1.2.1 Introduction

L'approche de la théorie de la diffusion ⁴ est un outil central de la physique mésoscopique. L'idée de relier la résistance d'un conducteur à des probabilités de réflexion et de transmission est due à Rolf Landauer. Le développement de ce qui porte aujourd'hui le nom de "formule de Landauer" est également associé aux noms de E. Abrahams, P. W. Anderson, M. Ya. Azbel, M. Büttiker, E. N. Economou, D. S. Fisher, Y. Imry, D. C. Langreth, P. A. Lee, R. Landauer, C. M. Soukoulis et D. J. Thouless. Par la suite l'approche de scattering a trouvé en Markus Büttiker un de ses plus efficaces développeurs, pour en avoir poussé le champ d'application à de nombreuses autres quantités physiques comme nous le verrons.

Commençons par des choses simples et rediscutons brièvement la formule de Landauer, qui permet d'exprimer la conductance d'un système quantique **cohérent**. L'idée proposée par Landauer [391] est de décrire un conducteur mésoscopique (cohérent) comme un diffuseur de l'onde électronique. Cette dernière est canalisée dans les contacts, décrits dans l'approche comme des guides d'onde dans lesquels les électrons sont injectés. On manipule des états stationnaires de diffusion. Une base naturelle, et utile pour la suite, est formée des états décrivant une onde incidente par un des canaux (et donc diffractée dans tous les autres). Notons $\psi_E^{(\alpha)}(x)$ la fonction d'onde d'énergie E correspondant à l'injection par le canal/contact α (figure 1.2).

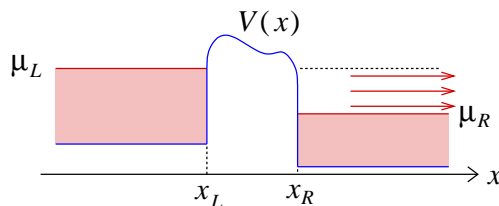


FIGURE 1.1 : *Transport à travers une barrière de potentiel. Les états à gauche de la barrière sont occupés jusqu'à l'énergie μ_L et à droite jusqu'à μ_R . Le courant des états gauches de l'intervalle $[\mu_R, \mu_L]$ n'étant pas compensé par celui des états droits, il y a un courant net vers la droite.*

Dans ce cadre, l'approche de Landauer-Büttiker formule une hypothèse forte sur la manière dont sont occupés les états électroniques dans une situation *hors équilibre* où du courant circule d'un contact l'autre. L'équilibre thermodynamique des différents contacts n'est pas perturbé et chaque contact est décrit par une fonction de distribution de Fermi-Dirac $f_\alpha(E) = f_{\text{eq}}(E - \mu_\alpha)$, où $f_{\text{eq}}(E)$ est la fonction de distribution d'équilibre et μ_α le potentiel chimique du contact α (ajusté en appliquant une différence de potentiel au contact). L'hypothèse à la base du modèle ⁵ est que

⁴ J'utiliserai parfois l'anglicisme "scattering" pour pallier à une imprécision de la langue française qui utilise le mot "diffusion" pour désigner aussi bien la notion de "scattering" (qu'on traduit aussi par "collision") que la notion de "diffusion" (au sens de la diffusion brownienne).

⁵ L'approche de Landauer-Büttiker ne peut être qu'un modèle phénoménologique puisqu'elle utilise comme ingrédient de base pour décrire une situation hors-équilibre un résultat obtenu dans une situation à l'équilibre

l'occupation des états $\psi_E^{(\alpha)}(x)$ incidents du contact α est donnée par la fonction de Fermi-Dirac d'équilibre $f_\alpha(E)$.

Ce qui rend cette hypothèse non triviale est que les états stationnaires $\psi_E^{(\alpha)}(x)$ sont délocalisés dans *tous* les contacts. Il conviendra de discuter moyennant quelle(s) condition(s) les électrons dans les états $\psi_E^{(\alpha)}(x)$ (donc associés au potentiel chimique μ_α) arrivant dans le contact β n'en perturbent pas l'équilibre thermodynamique, en particulier le potentiel chimique μ_β .

1.2.2 Transport – Formule de Landauer-Büttiker

Conducteur 1D à deux contacts (formule de Landauer)

Pour introduire l'approche de diffusion nous considérons le cas le plus simple : la situation unidimensionnelle de la diffusion d'un électron par un potentiel $V(x)$, variant dans l'intervalle $[x_L, x_R]$ et constant ailleurs, $V(x < x_L) = V_L$ et $V(x > x_R) = V_R$ (figure 1.1). Il s'agit de la situation à deux canaux de conduction puisque l'onde électronique peut être injectée soit par la gauche (canal G) soit par la droite (canal D). Les propriétés du système sont codées dans les états stationnaires de diffusion $\psi_E^{(\alpha)}(x)$, décrivant un état incident de la gauche ($\alpha = L$) ou de la droite ($\alpha = R$). La normalisation des états est choisie de façon à satisfaire

$$\langle \psi_E^{(\alpha)} | \psi_{E'}^{(\beta)} \rangle = \delta_{\alpha\beta} \delta(E - E') \quad (1.1)$$

(ce qui signifie que la mesure associée à ces états est simplement $\sum_\alpha \int dE \dots$). Le comportement asymptotique de l'état gauche est :

$$\psi_E^{(L)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar v_L}} \left(e^{ik_L(x-x_L)} + r e^{-ik_L(x-x_L)} \right) \quad \text{pour } x < x_L \quad (1.2)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar v_R}} t e^{ik_R(x-x_R)} \quad \text{pour } x > x_R \quad (1.3)$$

où $v_\alpha(E) = \frac{\hbar k_\alpha(E)}{m}$ est la vitesse de groupe dans le contact $\alpha \in \{L, R\}$; $k_\alpha(E) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m(E - V_\alpha)}$. Le choix d'introduire la constante de normalisation $1/\sqrt{\hbar v}$ dans la fonction d'onde conduit à la proportionnalité entre les modules carrés des coefficients r et t et les *courants de probabilité*. L'introduction de la petite complication consistant à introduire différentes vitesses de groupes à gauche et à droite n'est pas gratuite mais vise à insister sur le fait que la matrice de scattering au cœur de l'approche de Landauer-Büttiker regroupe les *amplitudes de probabilité de réflexion et de transmission* (et non les coefficients des ondes planes apparaissant dans la fonction d'onde) dans la matrice unitaire :

$$\mathcal{S} = \begin{pmatrix} r & t' \\ t & r' \end{pmatrix} \quad (1.4)$$

où r' et t' sont les amplitudes correspondant à l'état droit ⁶ $\psi_E^{(L)}(x)$ (la matrice \mathcal{S} est appelée la matrice de scattering ("on-shell"); elle possède une dépendance en énergie implicite dans les amplitudes de réflexion/transmission). Calculons la contribution au courant de probabilité des états de $[E, E + dE]$: pour $x \rightarrow -\infty$, la densité de courant ⁷ associée aux états gauche

(les distributions de Fermi-Dirac).

⁶ Dans le cas strictement 1D, la propriété $t = t'$ se déduit de l'uniformité du Wronskien des deux solutions. Ce ne serait pas vrai pour des guides en dimension $d > 1$ pour lesquels un seul canal est ouvert. Toutefois on a toujours égalité des modules $|t| = |t'|$.

⁷ $J_E^{(L)}$ est une densité de courant (par unité de surface, 1 en 1D) et par unité d'énergie puisque le spectre est continu.

est $J_E^{(L)} = \frac{\hbar}{m} \text{Im}[\psi_E^{(L)}(x)^* \frac{d}{dx} \psi_E^{(L)}(x)] = \frac{\hbar}{m} \frac{1}{2\pi\hbar v_L} k_L (1 - |r|^2) = \frac{1}{2\pi\hbar} (1 - |r|^2)$. Puisqu'il s'agit du courant associé à un état stationnaire, celui-ci est uniforme. Finalement

$$J_E^{(L)} = \frac{1}{\hbar} |t|^2 \quad (1.5)$$

Pour l'instant nous n'avons fait qu'introduire l'information sur le problème à un électron. Nous l'utilisons maintenant pour calculer le courant d'un gaz d'électrons dans la situation hors équilibre. Nous faisons maintenant appel à l'hypothèse centrale de l'approche de Landauer-Büttiker : les états $\psi_E^{(L)}$ sont occupés selon la fonction de distribution $f_L(E)$ et apportent une contribution au courant électrique total $I_L = 2_s e \int dE f_L(E) J_E^{(L)} = 2_s \frac{e}{\hbar} \int dE f_L(E) |t(E)|^2$, où le facteur 2_s est ajouté pour tenir compte de la dégénérescence de spin. De même la contribution au courant des états droits est $I_R = 2_s e \int dE f_R(E) J_E^{(R)} = -2_s \frac{e}{\hbar} \int dE f_R(E) |t(E)|^2$. Finalement le courant total traversant le système est $I = I_L + I_R$:

$$I = 2_s \frac{e}{\hbar} \int dE [f_L(E) - f_R(E)] |t(E)|^2 \quad (1.6)$$

À température nulle et pour $\mu_L - \mu_R = eV > 0$, le courant des états $\psi_E^{(L)}$ de l'intervalle $[\mu_R, \mu_L]$ n'est pas compensé par un courant gauche (figure 1.1). Dans le régime linéaire nous obtenons

$$I \underset{V \rightarrow 0}{\simeq} G V \quad \text{avec} \quad G = \frac{2_s e^2}{\hbar} \int dE \left(-\frac{\partial f_{\text{eq}}}{\partial E} \right) |t(E)|^2 \quad (1.7)$$

Si la transmission varie peu à l'échelle de $k_B T$ on obtient plus simplement $G \simeq \frac{2_s e^2}{\hbar} |t(E_F)|^2$ où E_F est l'énergie de Fermi. La conséquence de l'éq. (1.6) la plus surprenante est l'existence d'une résistance finie $1/G = \frac{\hbar}{2_s e^2}$, et donc de dissipation, dans le cas d'une barrière transmettant parfaitement l'onde ($T = 1$). Nous rediscuterons plus bas comment ce résultat est habituellement interprété et ce qui se cache dans l'hypothèse sur l'occupation des états de scattering.

Le cas multicanal et multiterminal (formule de Büttiker)

La notion de canal de conduction d'un fil mésoscopique est analogue à celle de mode propre d'un guide d'onde en électromagnétisme. Considérons l'équation de Schrödinger pour un Hamiltonien $H = -\frac{1}{2m} \Delta + W(y)$ où $W(y)$ est un potentiel confinant. L'hamiltonien décrit un fil non désordonné homogène. Nous notons $\{\varepsilon_n, \chi_n(y)\}$ le spectre de $-\frac{1}{2m} \frac{d^2}{dy^2} + W(y)$. Une base d'états propres de l'hamiltonien est $\phi_{k,n}(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx} \chi_n(y)$ où $k \in \mathbb{R}$; l'énergie de l'état est $E_{k,n} = \frac{k^2}{2m} + \varepsilon_n$. Choisissons plutôt d'indicer les états selon d'autres nombres quantiques : le vecteur d'onde k est remplacé par l'énergie E à laquelle on doit alors adjoindre un indice discret $\alpha = L, R$ spécifiant l'origine de l'onde (le signe de k ici). Les états ont maintenant la forme

$$\psi_E^{(\alpha,n)}(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi v_n}} e^{ik_n x} \chi_n(y) \quad (1.8)$$

où $v_n(E) = \frac{k_n(E)}{m} \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\frac{2(E - \varepsilon_n)}{m}}$ est la vitesse de groupe du canal.⁸ Puisque seuls les états d'énergie $E < \varepsilon_F$ sont occupés, nous voyons que seul un nombre fini N_c de modes interviennent dans le transport : $\varepsilon_{N_c} < \varepsilon_F < \varepsilon_{N_c+1}$.

⁸ Les états $\phi_{k,n}$ sont associés à une mesure $\sum_n \int dk$, *i.e.* la normalisation des états est choisie de telle sorte que $\langle \phi_{k,n} | \phi_{k',n'} \rangle = \delta_{n,n'} \delta(k - k')$. De même la normalisation des états $\psi_E^{(\alpha,n)}$ est choisie de telle sorte à leur associer une mesure $\sum_{\alpha,n} \int dE$.

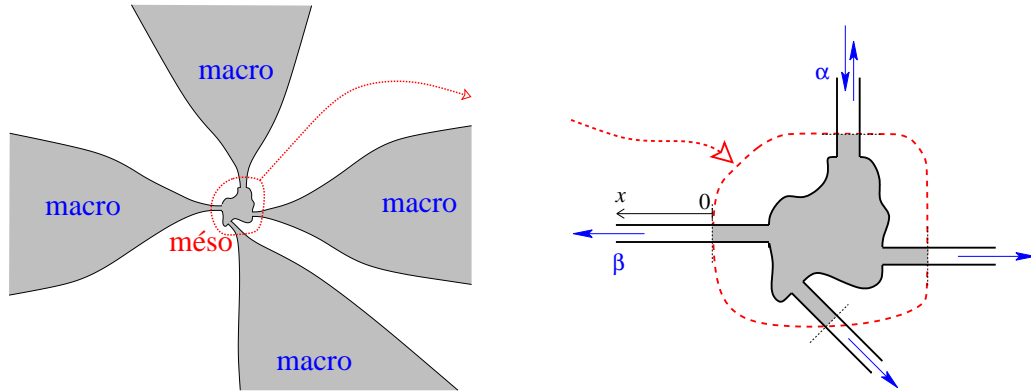


FIGURE 1.2 : À gauche : L'hypothèse que les états $\psi_E^{(\alpha)}$ sont occupés avec une distribution d'équilibre $f_\alpha(E) = f_{\text{eq}}(E - \mu_\alpha)$ suppose que l'approche s'applique à une situation où le système mésoscopique est en contact avec des conducteurs macroscopiques par lesquels le courant est injecté. Les contacts sont adiabatiques de telle sorte que la réflexion de l'onde ne se produise que dans le conducteur mésoscopique. À droite : Représentation de l'état stationnaire $\psi_E^{(\alpha)}$ décrivant l'injection de courant au contact α du conducteur. Les lignes en pointillés délimitent la région de scattering (choix en partie arbitraire), Éq. (1.9).

Si nous considérons maintenant une situation où le fil est soumis à un potentiel, les ondes planes incidentes par le fil sont transmises ou réfléchies et les états propres ont la forme asymptotique d'une superposition de telles ondes planes. Par commodité nous associons à chaque guide d'onde son propre système de coordonnées, où la direction des x croissants s'éloigne de la zone de diffusion. L'origine de l'axe est choisie sur le bord de la région de diffusion, comme dans la définition (1.2,1.3) (cette remarque est importante pour la discussion de la règle de Krein-Friedel ci-dessous). L'état stationnaire correspondant à l'injection de l'onde dans le canal n du contact α s'écrit dans le contact β :

$$\psi_E^{(\alpha,n)}(\vec{r} \in \text{contact}\beta) = \delta_{\alpha,\beta} \frac{e^{-ik_{\alpha n}x}}{\sqrt{2\pi v_{\alpha n}}} \chi_{\alpha n}(y) + \sum_{m=1}^{N_\beta} \frac{e^{ik_{\beta m}x}}{\sqrt{2\pi v_{\beta m}}} \chi_{\beta m}(y) \mathcal{S}_{\beta m, \alpha n}, \quad (1.9)$$

où nous avons indiqué les fonctions d'onde transverses et la vitesse de groupe par l'indice de contact pour décrire la situation où les guides d'onde ont des largeurs variables. La somme sur m porte sur les N_β canaux ouverts du fil. $\mathcal{S}_{\beta m, \alpha n}$ désigne l'amplitude de probabilité pour être transmis du canal n du contact α au canal m du contact β . Nous regroupons les $N_\alpha \times N_\beta$ amplitudes dans une matrice notée $\mathcal{S}_{\alpha\beta}$. Le choix de normalisation est analogue à celui de (1.2,1.3).

La diffusion d'un canal à l'autre peut être due à un potentiel extérieur supplémentaire. Elle peut également provenir d'un changement de géométrie dans la situation parfaitement balistique. Par exemple un rétrécissement ou élargissement du guide (*cf.* annexe p. 46) ou un coude [234]. Enfin notons que l'écriture de l'état stationnaire de diffusion est maintenant parfaitement adaptée à une situation multiterminal (figure 1.2).

La généralisation de la formule (1.6) au cas multicanal a été développée par Fisher & Lee [250], puis au cas d'un conducteur mésoscopique multiterminal par Büttiker [132, 117] (une excellente revue est celle de Büttiker de 1988 [120]). Elle consiste assez naturellement à remplacer l'amplitude de probabilité de transmission t par la matrice $\mathcal{S}_{\alpha\beta}$ caractérisant la transmission du contact β au contact α . Le module $|t|^2$ est remplacé par un coefficient de transmission $T_{\alpha\beta} = \text{Tr}\{\mathcal{S}_{\alpha\beta}^\dagger \mathcal{S}_{\alpha\beta}\}$, où la trace porte sur les canaux ouverts à la conduction. L'éq. (1.6) se généralise

donc comme

$$I_\alpha = \frac{2_s e}{h} \sum_\beta \int dE \operatorname{Tr} \{ \delta_{\alpha\beta} - \mathcal{S}_{\alpha\beta}^\dagger(E) \mathcal{S}_{\alpha\beta}(E) \} f_\beta(E) \quad (1.10)$$

(le facteur 2_s tient compte du spin). Dans le régime linéaire,

$$I_\alpha = \sum_\beta G_{\alpha\beta} V_\beta, \quad (1.11)$$

les éléments de la matrice des conductances sont donnés par la formule, appelée formule de Landauer-Büttiker,

$$G_{\alpha\beta} = \frac{2_s e^2}{h} \int dE \left(-\frac{\partial f_{\text{eq}}}{\partial E} \right) \operatorname{Tr} \{ \delta_{\alpha\beta} - \mathcal{S}_{\alpha\beta}^\dagger(E) \mathcal{S}_{\alpha\beta}(E) \} \quad (1.12)$$

L'unitarité de la matrice \mathcal{S} assure les deux conditions $\sum_\alpha G_{\alpha\beta} = \sum_\beta G_{\alpha\beta} = 0$ traduisant respectivement la conservation du courant et la nullité des courants à l'équilibre (lorsque tous les potentiels appliqués sont égaux).

- Par exemple dans le cas à deux contacts L et R sans diffuseur, $\mathcal{S}_{RR} = \mathcal{S}_{LL} = 0$ & $\mathcal{S}_{RL} = \mathcal{S}_{LR} = e^{i\Theta}$ où Θ est une matrice $N_c \times N_c$ encodant les déphasages, la formule donne $G_{LL} = G_{RR} = -G_{LR} = -G_{RL} \equiv G = \frac{2_s e^2}{h} N_c$.
- Toujours dans le cas deux terminaux mais avec des canaux imparfaitement transmis, la formule de température nulle, $G = \frac{2_s e^2}{h} \operatorname{Tr} \{ \mathcal{S}_{LR}^\dagger \mathcal{S}_{LR} \}$ nous donne la célèbre formule

$$G = \frac{2_s e^2}{h} \sum_{n=1}^{N_c} T_n \quad (1.13)$$

où les T_n sont les valeurs propres de la matrice $\mathcal{S}_{LR}^\dagger \mathcal{S}_{LR}$. Les T_n sont les probabilités de transmission associées aux modes propres de transmission.

Équilibration dans les contacts et résistance de Sharvin

Bien qu'assez naturelle à première vue, l'hypothèse de Landauer-Büttiker sur l'occupation des états est loin d'être évidente. Elle suppose en particulier une équilibration dans les contacts. Précisons : les états $\psi_E^{(\alpha)}(x)$ sont des états de diffusion, donc étendus dans tout l'espace. Si $\mu_L > \mu_R$ les états $\psi_E^{(L)}$ étendus dans le contact sont occupés par des électrons d'énergies $E > \mu_R$. L'approche admet que ceci ne perturbe pas l'équilibre thermodynamique du contact droit, *i.e.* que la présence d'électrons de potentiel chimique μ_L dans le contact R n'en affecte pas le potentiel chimique. Décrire les contacts, qui jouent le rôle de réservoirs d'électrons, comme des fils strictement unidimensionnels est donc une facilité de la modélisation et *l'hypothèse de Landauer-Büttiker semble physiquement justifiée pour des contacts très grands comparés au système* (de plus des processus inélastiques sont supposés à l'œuvre dans les contacts pour assurer la relaxation vers l'équilibre thermodynamique); le lecteur intéressé trouvera une discussion détaillée dans l'ouvrage de Datta [750]. On comprend alors mieux l'existence d'une résistance finie lorsque la probabilité de transmission est $|t|^2 = 1$: un fil mésoscopique à N_c canaux de conduction est caractérisé par une conductance finie $G = \frac{2_s e^2}{h} N_c$ trouvant son origine dans la résistance à faire passer une onde (ou un fluide) d'un "grand" conducteur par un "trou" mésoscopique. De plus la nature du contact entre le conducteur mésoscopique et le conducteur macroscopique est telle que la diffusion des ondes traversant le conducteur a lieu essentiellement dans le conducteur mésoscopique : ce qui semble justifié si les contacts macroscopiques sont

branchés *adiabatiquement*, comme représenté sur la figure 1.2. On parle de résistance de “contact” entre le conducteur macroscopique et le conducteur mésoscopique. Cette résistance est parfois appelée “résistance de Sharvin” puisque ce dernier en a donné une image hydrodynamique très intuitive [596] : considérons deux fluides d’électrons séparés par une barrière percée d’un petit trou d’aire A par lequel les fluides échangent de la matière. Si une différence de potentiel V est appliquée entre le contact gauche et le droit, à cause du principe de Pauli, seuls les électrons d’énergie proche de l’énergie de Fermi du contact gauche peuvent aller dans le contact droit. En passant d’un contact à l’autre, les électrons voient leur énergie cinétique augmenter/diminuer de $\delta E_c = \pm eV$ ce qui correspond à une variation de leur vitesse de $\delta v \simeq \pm eV/p_F$ où p_F est l’impulsion de Fermi. On obtient finalement un courant $I \sim e\delta v n A = e^2 V n A/p_F$, où n est la densité d’électrons. En dimension d , la densité d’électrons dans un métal est donnée par $n^{(d)} \sim (p_F/\hbar)^d$. Finalement la conductance du contact est

$$G_{\text{Sharvin}} \sim \frac{e^2 n A}{p_F} \sim \frac{e^2}{h} N_c \quad (1.14)$$

où l’on a utilisé que $N_c = n^{(d-1)} A$ (terme de Weyl). La quantification de la conductance a été vérifiée expérimentalement dans la célèbre expérience de van Wees *et al* [665, 664] réalisée sur une constriction gravée dans un gaz d’électrons bidimensionnel (2DEG) (*cf.* annexe p. 46). On peut observer les palliers de conductance sur l’insert de la partie gauche de la figure 1.4 (fil 1D obtenu avec la technique Cleaved Edge Overgrowth) et sur la figure 1.7, gauche (QPC).

Analyse semiclassique du transport à travers un trou balistique.— Le calcul plus précis de théorie cinétique est le suivant. Soit $f(\epsilon) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{e^{\beta\epsilon} + 1}$. Le courant à travers le trou est

$$I = 2_s e A N_\beta \int_{p_z > 0} d\vec{p} \frac{p_z}{m} \left[f\left(\frac{\vec{p}^2}{2m} - \mu_L\right) - f\left(\frac{\vec{p}^2}{2m} - \mu_R\right) \right] \quad (1.15)$$

où $N_\beta = \frac{2n}{(2m)^{d/2} S_d} \left[\int_0^\infty d\epsilon \epsilon^{d/2-1} f(\epsilon - \mu) \right]^{-1}$ est une constante de normalisation, $S_d = V_d d$ est la surface de la sphère unité, V_d son volume et $n = 2_s \frac{V_d}{(2\pi)^d} (p_F/\hbar)^d$ la densité électronique où 2_s est la dégénérescence de spin. À $T = 0$ on a $N_\infty = n/V_d p_F^d$. Plaçons-nous dans le régime linéaire à $T = 0$: la conductance est donnée par $G_{\text{Sharvin}} = \frac{2_s e^2 n A}{V_d p_F^d} \int_{p_z > 0} d\vec{p} \frac{p_z}{m} \delta\left(\frac{\vec{p}^2}{2m} - \epsilon_F\right)$. En utilisant $d\vec{p} = p^{d-1} dp d\Omega_d$ avec $d\Omega_d = \sin^{d-2} \theta_1 d\theta_1 \sin^{d-3} \theta_2 d\theta_2 \cdots \sin \theta_{d-2} d\theta_{d-2} d\theta_{d-1}$, on aboutit finalement à

$$G_{\text{Sharvin}} = 2_s e^2 \frac{n A}{\alpha_d p_F} = \frac{2_s e^2}{h} N_c \quad (1.16)$$

comme il se doit. On a introduit

$$\alpha_d \stackrel{\text{def}}{=} \frac{2}{d \langle |x_d| \rangle_{|\vec{x}|=1}} = V_d/V_{d-1} \quad \text{où} \quad \frac{1}{2} \langle |x_d| \rangle_{|\vec{x}|=1} = \int_{x_d > 0} \frac{d^d \vec{x}}{S_d} x_d \delta(|\vec{x}| - 1). \quad (1.17)$$

Trou diffusif.— La résistance du « trou diffusif », i.e. tel que $\ell_e \ll w$ où w est la dimension transverse et ℓ_e le libre parcours moyen, était connue depuis la fin du XIXième siècle (J. C. Maxwell). La conductance d’un trou circulaire de diamètre w est donnée par $G_{\text{Maxwell}} = w\sigma_0 \sim \frac{e^2}{h} N_c \frac{\ell_e}{w}$; *cf.* [494] pour une référence récente et une étude de la transition entre G_{Sharvin} et G_{Maxwell} . Il est intéressant de remarquer que le crossover entre ces deux résultats n’est pas sans rappeler celui entre le fil long balistique (conductance G_{Sharvin}) et le fil long diffusif (conductance $G_{\text{Drude}} \sim \frac{e^2}{h} N_c \frac{\ell_e}{L}$ où $L \gg \ell_e$ est la longueur du fil).