

Entendre la forme d'un tambour

Depuis le XIX^e siècle, le problème général des vibrations d'une membrane semblait bien compris. Mais une nouvelle question a été posée par M. Kac dans les années 60 : « Peut-on entendre la forme d'un tambour ? » Il a fallu une trentaine d'années aux mathématiciens pour la résoudre. Nous avons matérialisé une membrane vibrante en utilisant un film de cristal liquide et vérifié, en étudiant son spectre de fréquences propres, les résultats prédits par les mathématiciens.

À la fin du siècle dernier, on pensait avoir résolu le problème des vibrations d'une membrane « parfaite », c'est-à-dire infiniment fine et soumise à une tension uniforme. D. Poisson a été le premier à étudier ce système physique, dans le but de comprendre les sons émis par les tambours. Le cas de la membrane circulaire, dont la résolution fait intervenir des fonctions de Bessel, a été résolu par Clebsch en 1862. En 1966 cependant, un nouveau problème a été abordé par le mathématicien Kac, problème qu'il a résumé par la question suivante : « Peut-on entendre la forme d'un tambour ? ». On considère une membrane vibrante tendue sur un contour. Ses modes de vibration sont des ondes transverses stationnaires, obéissant aux conditions aux limites de Dirichlet sur le contour (l'amplitude s'annule), ce qui donne lieu à un spectre discret de fréquences propres. Le son émis par le tambour correspond ainsi à la superposition des fréquences propres, avec pour chaque fréquence une amplitude qui dépend de la manière dont on a excité le tambour. Constatant que, *a priori*, des formes différentes conduisent à des spectres distincts, la question posée par Kac revient à se demander si la forme du tambour est déterminée de manière univoque par le spectre. Autrement dit, existe-t-il des tambours *isospectraux*, c'est-à-dire ayant

des formes différentes mais le même spectre de fréquences propres ?

Après plus de deux décennies de recherches en mathématiques, au cours desquelles des formes isospectrales incluses dans des espaces de plus de trois dimensions ont été trouvées, la première paire de tambours isospectraux à deux dimensions fut découverte en 1992.

La première vérification expérimentale de l'isospectralité des deux formes découvertes par les mathématiciens a été effectuée en utilisant des cavités micro-ondes très aplaties en guise de tambours. En effet, dans ces cavités, le champ électrique obéit bien à l'équation d'onde bidimensionnelle, avec la condition aux limites de Dirichlet aux bords.

Nous avons trouvé que les films smectiques suspendus constituent des réalisations parfaites de tambours au sens de Kac. En effet, semblables aux bulles de savon, ces films possèdent une tension intrinsèque homogène et isotrope. De plus, leur densité par unité de surface est aussi strictement homogène car ils sont composés d'un nombre entier de couches moléculaires. Grâce à ces deux qualités, leurs vibrations sont parfaitement décrites par l'équation d'onde à deux dimensions, à condition qu'ils soient placés sous vide de sorte que la masse de l'air mis en mouvement puisse être négligée. Et, finalement, ils sont bien plus robustes que les bulles de savon : sous vide, leur durée de vie est de plusieurs jours. L'étude des vibrations de ces films smectiques permet ainsi d'apporter une réponse expérimentale directe à la question de Kac.

VIBRATIONS D'UNE CORDE

Rappelons d'abord le problème unidimensionnel des vibrations d'une corde. On suppose qu'au repos la corde est horizontale, ce qui revient à négliger l'effet de la pesanteur. Considérons un élément de longueur de la corde, au repos en $(x, 0)$. À l'instant t où la corde vibre, l'élément de longueur se situe en $(x, z(x, t))$.

Lorsque la corde vibre transversalement, l'équation du mouvement de l'élément de longueur s'écrit, pour de faibles déplacements z :

$$T \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \rho_L \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \quad (1)$$

où T est la tension de la corde et ρ_L sa masse par unité de longueur.

Cette équation traduit simplement la loi de Newton. Le membre de droite est le terme d'inertie. Celui de gauche décrit la force de rappel, qui a tendance à ramener la corde vers sa position d'équilibre. L'origine physique de cette force de rappel est la tension T , qui tend à minimiser sa courbure proportionnelle à $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

L'équation (1) est une équation d'onde, qui caractérise l'existence d'une onde transverse de vibration dans la corde, avec une vitesse de propagation $c = \sqrt{\frac{T}{\rho_L}}$.

La fonction $z(x, t)$ doit également satisfaire une condition aux limites, qui traduit le fait que la corde est attachée par ses deux bouts ; par conséquent, $z(x, t) = 0$ à chaque

instant pour les points « au bord ». Cette condition est celle dite « de Dirichlet ».

On obtient alors une série discrète de fréquences propres, données par :

$$\omega_n = \pi n \frac{c}{L}$$

où n est un nombre entier.

Ces fréquences sont régulièrement espacées, et leur espacement est relié au seul paramètre géométrique qui caractérise la corde, c'est-à-dire sa longueur L .

VIBRATIONS D'UNE MEMBRANE

Le cas d'une membrane est plus compliqué : comme pour la corde, on obtient un spectre discret de fréquences ; le spectre des fréquences propres est relié à la forme géométrique de la membrane, et il est en général plus difficile de l'obtenir explicitement.

On s'intéresse ici aux vibrations d'une membrane infiniment fine, c'est-à-dire, en pratique, d'épaisseur très faible devant ses dimensions latérales. Cette membrane est tendue sur un contour (ou « cadre ») de forme déterminée, comme une peau de tambour. La tension de cette membrane, notée γ , est supposée isotrope et uniforme, conditions qui sont satisfaites dans nos expériences. Au repos, la membrane est supposée horizontale.

Considérons un élément de surface de celle-ci, au repos en $(x, y, 0)$. A l'instant t où la membrane vibre, l'élément de surface se situe en $(x, y, z(x, y, t))$. Lorsque la membrane vibre transversalement, l'équation du mouvement de l'élément de surface considéré est identique à celle obtenue pour la corde, toujours pour de faibles déplacements :

$$\gamma \Delta z = \rho_s \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \quad (2)$$

ici γ est la tension de la membrane, et ρ_s sa masse par unité de surface.

$c = \sqrt{\frac{\gamma}{\rho_s}}$ est la vitesse de propagation de l'onde dans la membrane.

La fonction $z(x, y, t)$ satisfait également la condition aux limites de Dirichlet, qui traduit le fait que la membrane est attachée au cadre.

Les solutions stationnaires de l'équation (2) sont de la forme :

$$z(x, y, t) = f(x, y) \sin(\omega t)$$

où les variables d'espace et de temps sont maintenant découplées. On obtient :

$$\Delta f(x, y) = -k^2 f(x, y) \quad (3)$$

avec $k = \omega/c$.

La résolution de cette équation aux valeurs propres, associée à la condition $f(x, y) = 0$ au bord, dépend de la forme du contour sur lequel la membrane est tendue.

Il n'existe que quelques formes particulières de cadres dont on sait calculer le spectre (un rectangle, un cercle, un triangle par exemple). Dans chaque cas, le spectre a une allure différente, et les fréquences propres ne sont plus régulièrement espacées comme c'était le cas pour la corde.

La question qui apparaît alors est la suivante : comment peut-on relier la forme du cadre à la forme du spectre de fréquences propres ? La question posée par M. Kac :

« Peut-on entendre la forme d'un tambour ? »

revient, dans ce contexte, à demander si l'on peut, à partir du spectre de fréquences propres, remonter à la forme du cadre.

RÉSOLUTION MATHÉMATIQUE DU PROBLÈME

Les mathématiciens se sont penchés sur ce problème : ils ont essayé de trouver, s'il en existe, des contours « isospectraux », c'est-à-dire ayant le même spectre de valeurs propres pour l'opérateur linéaire laplacien. Pour cela, ils ont commencé par redéfinir le problème en l'élargissant à une question plus générale :

« Peut-on entendre la forme d'une variété riemannienne ? »

Une *variété* est une surface courbe telle qu'un petit morceau de cette surface puisse être considéré comme faisant partie d'un espace euclidien. Un tore par exemple est une variété. Une *variété riemannienne* est une variété munie d'un procédé de mesure des distances et des angles : on peut alors parler d'équation d'onde sur cette variété riemannienne, et la question précédente a bien un sens. Il est clair par ailleurs que les tambours plans sont des cas simples de variétés riemanniennes. Pour répondre négativement à la question précédente, il faut trouver deux variétés riemanniennes différentes, mais ayant le même spectre pour le laplacien, c'est-à-dire *isospectrales*. La méthode utilisée pour exhiber deux telles variétés peut alors donner des idées pour trouver deux contours plans isospectraux.

Définissons pour cela le terme de « géodésique » sur une variété riemannienne : une *géodésique* est le plus court chemin entre deux points donnés. Ce sont les analogues des droites du plan euclidien. La trajectoire d'une particule libre confinée sur une variété riemannienne correspond à une géodésique. Si l'on restreint l'espace accessible à la particule à une partie bornée de la variété, la particule décrira une trajectoire périodique—une *géodésique périodique*. A quoi sert cette notion de géodésique pour notre problème ? Il se trouve que l'ensemble des longueurs des géodésiques périodiques, ou « spectre de longueurs », est relié au spectre du laplacien (pour certaines variétés en tout cas). Cela peut se comprendre intuitivement car on peut imaginer que les ondes se propagent le long des géodésiques (cf. C. Gordon). Les deux variétés riemanniennes isospectrales qui nous intéressent (cf. encadré 1) ont alors le même spectre de longueurs, ce qui est un autre point de vue sur notre problème.

En se basant sur l'idée précédente, J. Milnor, en 1964, a trouvé deux variétés isospectrales non isométriques (c'est-à-dire telles qu'on ne

puisse pas trouver d'isométrie qui transforme une variété en l'autre), constituées de deux tores à 16 dimensions. Il les a justement choisis en imposant que les deux listes respectives des longueurs des géodésiques périodiques soient les mêmes.

Après quelques étapes que nous passerons sous silence, T. Sunada a établi en 1984 un lien entre théorie des groupes et géométrie, grâce auquel on a pu par la suite construire des variétés isospectrales (cf. encadré 1).

En 1986, le mathématicien P. Buser a utilisé une nouvelle méthode, la « transplantation », pour démontrer l'isospectralité de variétés riemanniennes bidimensionnelles dans un espace à trois dimensions. C. Gordon, D. Webb et S. Wolpert ont ensuite construit, à partir des exemples de Buser, les premiers domaines plans isospectraux (cf. figure 1), que nous appellerons par la suite « flèche » et « cocotte », à cause de leur forme. P. Bérard a utilisé l'idée de Buser pour donner une nouvelle preuve du théorème de Sunada, dans laquelle il définit explicitement la transplantation des fonctions d'onde. Par la suite, beaucoup d'autres domaines plans isospectraux ont été découverts.

La méthode de transplantation est basée sur l'idée suivante : on considère une fonction propre φ de l'un des contours, correspondant à une fréquence donnée. On la découpe en sept morceaux $\{A, B, \dots, G\}$ correspondant à chacun des triangles constituant le contour (cf. figure de l'en-

cadré 1). On « transplante » cette fonction sur le deuxième contour, en formant, sur chacun des triangles de ce contour, une superposition linéaire de certaines sous-fonctions parmi $\{A, B, \dots, G\}$. La linéarité de l'équation aux valeurs propres implique que chaque sous-fonction du deuxième contour ainsi formée vérifie l'équation d'onde à la même fréquence. On a alors prouvé l'isospectralité des deux contours si la nouvelle fonction $\psi = \{A', B', \dots, G'\}$ a les propriétés requises de continuité pour être une fonction propre, et si la condition de Dirichlet au bord est satisfaite.

EXPÉRIENCES

La première vérification expérimentale de l'isospectralité de « flèche » et « cocotte » a été réalisée par S. Sridhar et A. Kudrolli en 1994. Leur expérience utilisait des cavités micro-ondes, dans lesquelles la composante verticale du champ électrique est décrite par l'équation d'onde (3) et par la condition aux limites de Dirichlet. Pour pouvoir effectuer l'analogie avec une membrane, ils ont utilisé des cavités très aplaties, conservant ainsi l'aspect bidimensionnel du problème.

L'expérience que nous avons réalisée utilise un film de cristal liquide en phase smectique A (cf. encadré 2), tendu sur un cadre dont la forme peut être changée très facilement. L'intérêt d'utiliser un système liquide comme membrane réside dans l'homogénéité et l'isotropie de la tension γ , ce qui serait difficile à assurer avec une feuille de plastique par exemple. Une bulle de savon conviendrait également, mais comme elle contient de l'eau, celle-ci s'évaporerait et le film casserait assez vite. Un film de cristal liquide smectique est par contre assez stable en pratique : sa durée de vie moyenne est de plusieurs jours.

Dans notre expérience, les dispositifs d'excitation et de détection des vibrations du film sont tous les deux ponctuels (cf. encadré 3). Nous en

verrons les conséquences un peu plus loin. En pratique, on commence par choisir les deux points d'excitation et de détection. Puis on fait varier la fréquence de l'excitation, et on enregistre l'amplitude et la phase de la réponse pour chaque fréquence. Les fréquences propres de vibration du film se signalent par un pic d'amplitude et par une variation de la phase de 180° , exactement comme pour la fréquence de résonance d'un oscillateur harmonique unidimensionnel. Sur la figure 2, on a représenté un résultat expérimental typique obtenu pour le cadre « cocotte ». Sur cet exemple, le cinquième mode apparaît, mais il est très écrasé. Il y a deux causes possibles : soit l'électrode d'excitation était située au-dessus d'un nœud pour le cinquième mode, soit le laser de détection était placé au-dessus d'un ventre. On voit donc qu'il est nécessaire, afin d'obtenir tous les pics, de mesurer plusieurs spectres correspondant à des positions différentes du laser de détection ou de l'électrode d'excitation. Ensuite, pour avoir tous les pics sur le même graphe, on effectue une moyenne des différents spectres précédemment obtenus. On peut observer une trentaine de modes environ avec ce dispositif.

Les pics ont une largeur finie, due aux phénomènes de dissipation. Tout d'abord, il existe une friction entre les couches constituant le film pendant ses déformations. Ensuite, il y a une dissipation visqueuse liée aux écoulements dans les vapeurs résiduelles dans la cellule, qui résultent de l'évaporation du film. L'importance relative de ces deux contributions dépend de l'épaisseur du film. Pour des épaisseurs plus faibles que $1 \mu\text{m}$, ce qui est le cas dans nos expériences, la dissipation dans le gaz est prédominante. Si on avait réalisé les expériences dans l'air, la largeur des pics aurait été beaucoup plus importante.

Sur la figure 3, on a représenté trois courbes, correspondant chacune à un cadre différent. Chaque courbe représente l'amplitude de vibration

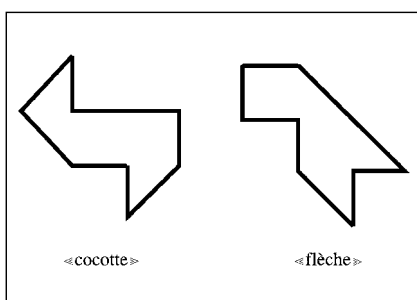


Figure 1 - Les deux contours isospectraux « cocotte » et « flèche ».

LE THÉORÈME DE SUNADA

Dans cet encadré, on cherche à visualiser simplement le contenu du théorème de Sunada. Ce théorème a constitué une étape décisive pour répondre à la question posée par Kac, en permettant de construire des variétés isospectrales à partir desquelles des contours plans isospectraux ont pu être découverts. Il s'énonce de la manière suivante : soit G un groupe fini discret agissant sur une variété compacte riemannienne M par des isométries. Soit F et C deux sous-groupes de G « presque conjugués ». Alors, les deux variétés quotients F/M et C/M sont isospectrales.

Considérons la variété que les mathématiciens appellent « le plan hyperbolique ». C'est un espace infini non euclidien, de courbure gaussienne constante et négative : chaque point ressemble localement à une selle de cheval. On ne peut pas le représenter tel quel dans notre espace euclidien tridimensionnel. Parmi plusieurs modèles de représentation du plan hyperbolique, nous allons ici nous restreindre à celui de Poincaré. Le plan hyperbolique est représenté par le disque unité, dans le plan euclidien à deux dimensions. Ses géodésiques sont des portions de cercle à l'intérieur du disque, coupant le bord du disque à angle droit. Sur la figure a, toutes les lignes sont des géodésiques, le bord du disque n'étant pas matérialisé.

Le plan euclidien peut être « pavé » par exemple par des rectangles. On passe d'un rectangle quelconque à un autre grâce à une translation du type $m\vec{a} + n\vec{b}$, m et n étant des entiers. On voit apparaître un groupe de translations discrètes, lié au pavage. Ce groupe est engendré par deux translations particulières, \vec{a} et \vec{b} .

Le plan hyperbolique, contrairement au plan euclidien, peut être pavé de nombreuses manières à l'aide de triangles. Considérons par exemple le pavage par des triangles d'angles $\pi/4$, $\pi/3$, $\pi/3$, dont chaque côté est d'une couleur différente (bleue, rouge ou verte). L'angle de $\pi/4$ se trouve au sommet des 2 côtés bleu et rouge. Remarquons que, dans cet espace particulier, la somme des angles d'un triangle n'est pas nécessairement π . On voit sur le dessin (figure a) que le plan hyperbolique est entièrement recouvert par ces triangles tous identiques, qui se déduisent les uns des autres par des réflexions le long des bords des triangles. Par exemple, les triangles numérotés 1 et 2 s'échangent par la réflexion notée γ , le long du côté commun (en bleu sur le dessin). On voit ici

apparaître un groupe discret infini, que nous noterons G_0 : le groupe des déplacements du plan hyperbolique engendré par les trois réflexions α , β et γ , le long des bords d'un des triangles (le triangle 1).

On montre qu'on peut aussi paver le plan hyperbolique à l'aide de quadrilatères constitués de sept des triangles précédents, et ce, de deux manières seulement. La figure b1 correspond au pavage par les quadrilatères semblables à celui hachuré sur le dessin, formé des triangles A, B, C, D, E, F et G . De même pour la figure b2, où le plan hyperbolique est pavé cette fois par les quadrilatères semblables à celui formé de A', B', C', D', E', F et G' . Dans les deux cas, le pavage par ces quadrilatères est rendu visible par les portions de géodésiques représentées en traits plus épais. Par cette opération, on a défini deux sous-groupes de G_0 , correspondant respectivement aux réflexions le long des côtés des quadrilatères seulement (on a effacé en quelque sorte les lignes en trait fin à l'intérieur de tous les quadrilatères). Nous noterons ces deux sous-groupes C (pour « cocotte », figure b1), et F (pour « flèche », figure b2). Le quadrilatère $ABCDEF$ correspond au quotient C/M_0 , $A'B'C'D'E'F'G'$ à F/M_0 .

Quel est l'intérêt de se placer dans le plan hyperbolique ? Il se trouve que les deux quadrilatères $ABCDEF$ et $A'B'C'D'E'F'G'$ sont construits suivant le même procédé d'assemblage que « cocotte » et « flèche » respectivement. Les deux quadrilatères du plan hyperbolique sont formés chacun respectivement d'une suite de réflexions très particulière. En effet, on passe de A à B en appliquant à A la réflexion le long de son bord rouge (de type α) ; puis de B à C en appliquant à B la réflexion le long du bord vert de celui-ci, etc. Si l'on regarde maintenant « cocotte », on constate qu'on passe de A à B en appliquant à A la réflexion le long de son bord rouge, etc. On peut ainsi vérifier que « cocotte » (resp. « flèche ») est construit en utilisant la même suite de réflexions que le quadrilatère de la figure b1 (resp. b2). D'ailleurs, la forme du triangle de départ du plan euclidien importe peu : en fait, on peut prendre un triangle quelconque du plan euclidien et lui appliquer les deux mêmes suites de réflexions que pour « flèche » et « cocotte » ; les deux contours obtenus restent isospectraux. Ce résultat a été prévu théoriquement par les mathématiciens, et vérifié expérimentalement par nous-mêmes.

moyennée, en fonction de la fréquence excitatrice normalisée par la fréquence du mode fondamental. On voit que les cadres « flèche » et « cocotte » ont, comme prévu, les mêmes fréquences propres de vibra-

tion. La différence mesurée entre leurs fréquences respectives est inférieure à 0.7 %. On ne peut donc pas distinguer les spectres des tambours de forme « flèche » et « cocotte ».

La troisième courbe est obtenue pour un cadre que nous avons appelé « cocotte déformée », et qui est obtenu à partir de « cocotte » en plaçant à l'envers un des triangles du contour. Cette déformation, qui peut

Dans le plan hyperbolique, on peut montrer que deux variétés sont isospectrales pour le laplacien si leurs deux spectres de longueurs des géodésiques périodiques à l'intérieur de ces deux variétés sont les mêmes. Notre but est de voir géométriquement le lien entre le théorème de Sunada et l'isospectralité des longueurs des géodésiques périodiques de nos deux quadrilatères du plan hyperbolique. Il nous reste pour cela à visualiser la propriété incluse dans le théorème de Sunada, qui est à la base de l'isospectralité des deux quadrilatères. Le théorème stipule que les deux sous-groupes C et F doivent être « presque conjugués », ce qui entraîne l'isospectralité des deux quadrilatères du plan hyperbolique. Soit une réflexion γ_C appartenant au sous-groupe C (il s'agit d'une réflexion le long d'un des côtés de l'un des quadrilatères du pavage de la figure b1), ainsi qu'une réflexion γ_F appartenant à F (figure b2). Alors il existe un élément a appartenant à G_0 , dépendant de γ_C , tel que $\gamma_F = a * \gamma_C * a^{-1}$.

Si a ne dépendait pas de γ_C , les deux sous-groupes seraient complètement conjugués et on obtiendrait des contours isospectraux, mais identiques, ce qui présente peu d'intérêt.

Considérons une géodésique périodique dans le quadrilatère de la figure b1, correspondant à la trajectoire périodique $MNPNM$. Notre but est de trouver une trajectoire périodique de même longueur dans le quadrilatère de la figure b2, et de voir comment la propriété de « presque-conjugaison » de C et F permet de relier cette deuxième trajectoire à la première. Intuitivement, on trouve que la deuxième trajectoire cherchée est $M'N'P'N'M'$. Comment passer de l'une à l'autre ? Si l'on « déplie » la trajectoire $MNPNM$ en lui appliquant la réflexion γ_C indiquée sur le dessin de la figure b1, on obtient une trajectoire « ouverte » $MNPN_0 M_0$ correspondant à une portion de géodésique du plan hyperbolique lui-même (et non plus du quadrilatère hachuré seulement). De même, si l'on déplie $M'N'P'N'M'$ en lui appliquant γ_F définie par la figure b2, on obtient la trajectoire ouverte $M'N'P'N'_0 M'_0$. Posons $a = \gamma_C * \delta$ (où δ est définie sur la figure b2).

Si l'on applique « a » à $MNPN_0 M_0$, on trouve exactement $M'N'P'N'_0 M'_0$. Voyons maintenant si a correspond bien à la définition mathématique de la presque-conjugaison. Il faut vérifier qu'on a : $\gamma_F = a \gamma_C a^{-1}$, en essayant sur n'importe quel objet du plan hyperbolique (un triangle par exemple). On peut également s'assurer, ce que nous ne ferons pas ici, que « a » dépend de la trajectoire, c'est-à-dire que les deux sous-groupes F et C sont seulement « presque » conjugués.

Ainsi, on a vu le lien entre deux trajectoires périodiques de chacun des contours. γ_C (resp. γ_F) sert à déplier la trajectoire du quadrilatère correspondant à « cocotte » (resp. « flèche »).

Pour passer d'une trajectoire dépliée à l'autre, on applique a , qui est précisément l'élément qui conjugue γ_C et γ_F .

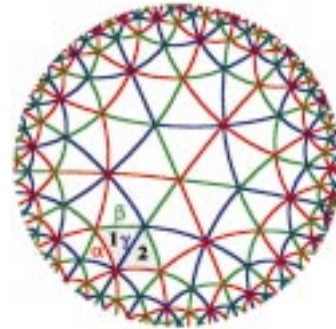


Figure a - Tous les triangles, d'angles $\pi/4$, $\pi/3$ et $\pi/3$ se déduisent les uns des autres grâce à des réflexions par rapport à leurs côtés.

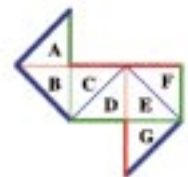
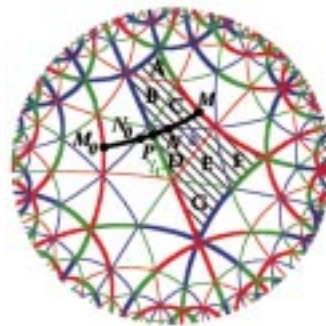


Figure b1 - Un pavage particulier du plan hyperbolique, à l'aide des quadrilatères du type $ABCDEFG$, à comparer avec « cocotte » (ci-dessus).

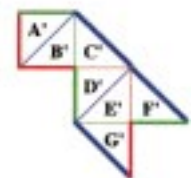
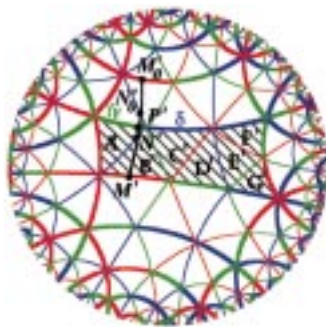


Figure b2 - Un autre pavage particulier du plan hyperbolique, à l'aide des quadrilatères du type $A'B'C'D'E'F'G'$, à comparer avec « flèche » ci-dessus.

sembler mineure à première vue, suffit à briser l'isospectralité. En effet, on remarque un écart notable avec les spectres de « flèche » et « cocotte » pour certains pics. Notamment, le neuvième mode disparaît

complètement, et ce n'est pas dû à un artefact expérimental. Ce mode a une structure très particulière (cf. figure 4) : il est formé à partir du mode fondamental d'un triangle, auquel on applique les réflexions servant à

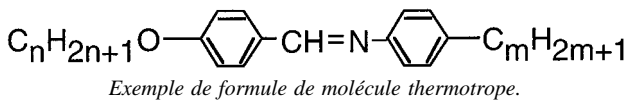
construire les contours (cf. encadré 1). C'est un mode dit « triangulaire ». Bien sûr, ce mode ne peut exister si l'un des triangles est collé à l'envers. Il est même repoussé à côté du huitième mode, qui devient quasi

LES FILMS DE CRISTAUX LIQUIDES SMECTIQUES

CRISTAUX LIQUIDES THERMOTROPES

Les cristaux liquides ont été découverts en 1889 par le biologiste F. Reinitzer. Ils présentent une ou plusieurs phases thermodynamiquement stables, intermédiaires entre la phase liquide isotrope et la phase cristalline ordonnée. Ces phases particulières ont été appelées « mésophases » par G. Friedel. Pour les cristaux liquides dits « thermotropes », les mésophases apparaissent quand on fait varier la température.

Les molécules constituant un cristal liquide sont toujours anisotropes ; celles que nous utilisons dans l'expérience ont une forme allongée : on les représentera par un bâtonnet.



Quand on abaisse progressivement la température à partir de la phase liquide isotrope (figure a), on rencontre d'abord la mésophase nématique (figure b). Cette phase est caractérisée par le fait qu'il n'existe pas d'ordre de position à grande distance, mais un ordre d'orientation : l'axe des molécules est en moyenne parallèle à une direction privilégiée \vec{n} .



Figure a - Phase isotrope ; Figure b - Phase nématique.

A température décroissante, on rencontre ensuite des phases smectiques. Dans ces phases, en plus de l'ordre orientationnel, il existe un ordre de position unidimensionnel, caractérisé par un empilement des molécules en couches parallèles. Il peut exister un grand nombre de phases smectiques, identifiées par des lettres (A, B, C...), et qui se distinguent les unes des autres par l'arrangement des molécules à l'intérieur d'une couche, ou par la manière dont ces couches sont empilées. Dans un smectique A, les molécules sont libres de se déplacer à l'intérieur d'une couche (tout en restant parallèles entre elles), la direction \vec{n} étant perpendiculaire aux couches (figure c).

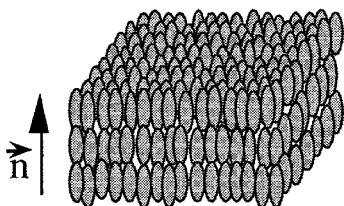


Figure c - La phase smectique A (Sm A).

FILMS SMECTIQUES

La phase smectique, grâce à sa structure en couches, est la seule phase dans laquelle peuvent exister des films libres stables. Ces films, à cause de leur épaisseur faible (quelques centaines de nm environ) devant la dimension caractéristique du cadre (quelques mm), seront considérés comme des objets bidimensionnels (figure d).

Un film libre tendu sur un contour est thermodynamiquement métastable, mais on peut le conserver longtemps en pratique. Il est constitué de couches de molécules, ces couches étant parallèles aux deux surfaces libres. De plus, sur les bords du film, il existe un ménisque (dû au mouillage du film sur le cadre), de volume grand devant celui du film. Ce ménisque joue ainsi vis-à-vis du film un rôle de réservoir de molécules, de potentiel chimique fixé. Son extension latérale est négligeable devant celle du reste du film.

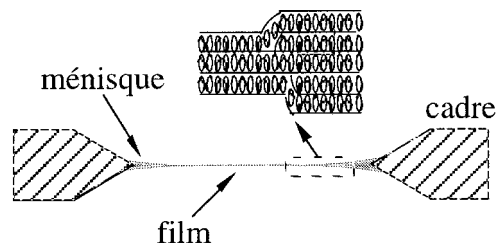


Figure d - Film smectique tendu sur un contour.

L'existence même du film prouve qu'il existe dans celui-ci une certaine tension qui le caractérise, et qui en fait un système physique assez différent, de ce point de vue, du matériau smectique tridimensionnel. Grâce au caractère liquide du film, on comprend que cette tension soit homogène dans le film, et isotrope, comme annoncé initialement. De plus, ces films sont faciles à obtenir et très robustes (une fois mis sous vide). Toutes ces propriétés font d'un film smectique la matérialisation physique – et très maniable – d'une membrane idéale, et c'est cette propriété particulière dont nous nous sommes servis dans nos expériences.

Depuis une vingtaine d'années, les films smectiques sont utilisés expérimentalement pour étudier notamment les textures de certaines phases smectiques, la nature de l'ordre de position au sein d'une couche, les fluctuations de l'ordre d'orientation dans un système bidimensionnel et les transitions de phase (en particulier, l'influence de la dimensionnalité sur celles-ci).

Encadré 3

DISPOSITIF EXPÉRIMENTAL

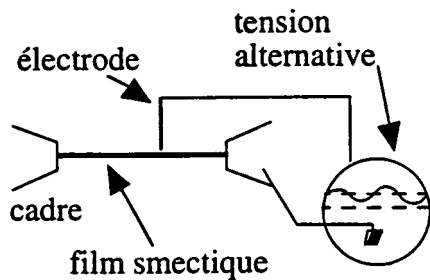


Figure a - Dispositif d'excitation du film.

un faisceau laser sur le film, la direction d'incidence étant perpendiculaire au plan du film au repos. Si le faisceau tombe sur un ventre, c'est-à-dire un point particulier de l'onde stationnaire pour lequel l'amplitude du déplacement vertical est la plus grande, le faisceau ne sera pas dévié. Par contre, s'il tombe sur un nœud de l'onde stationnaire, c'est-à-dire un point du film qui reste immobile au cours du temps, la déviation du faisceau par rapport à sa direction d'incidence sera maximale. Le faisceau réfléchi est ensuite dirigé sur une photodiode qui mesure le déplacement du faisceau en fonction du temps.

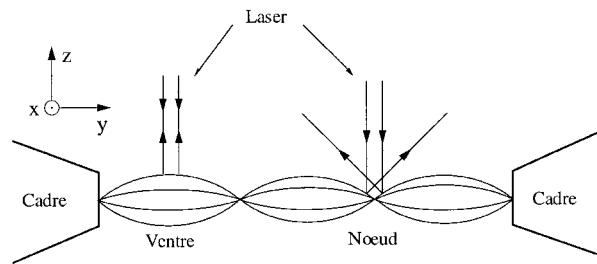


Figure b - Détection des vibrations du film.

Une fois le film tendu sur le cadre, on le fait vibrer grâce à une électrode positionnée au-dessus du film, à laquelle on applique une tension variable. Cette tension a une composante continue, qui sert à amener des charges à la surface du film, et une composante sinusoïdale, qui déplace verticalement ces charges, ce qui entraîne la vibration de tout le film. Le cadre est relié à la masse du générateur.

La figure b représente schématiquement un exemple de la forme que peut prendre le film au cours de ses vibrations. Le principe de détection des vibrations est le suivant : on envoie

dégénéré. Le même phénomène se produit pour les autres modes trian-

gulaires (obtenus à partir des autres modes du triangle).

Nos projets expérimentaux futurs sont de vérifier l'isospectralité d'autres cadres, et de nous intéresser à la forme des modes de vibration, la fonction d'onde, que nous n'avons pas du tout considérée ici.

L'intérêt de cette étude vient, en grande partie, de ce que l'équation d'onde de la membrane a la même forme que l'équation de Schrödinger d'une particule libre dans un « billard » bidimensionnel de même forme que le cadre. Le carré des fréquences propres est proportionnel aux énergies propres de la particule quantique de masse m :

$$\frac{\omega^2}{c^2} = \frac{2 m E}{\hbar^2}$$

Or, la nature du spectre de tels billards quantiques dépend de façon cruciale de leur forme et, en particulier, de la nature régulière ou chaoti-

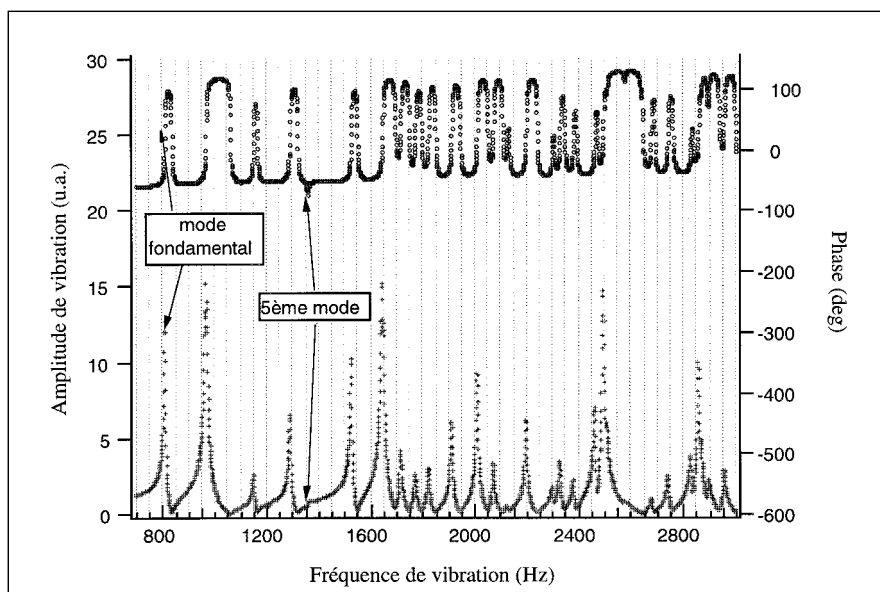


Figure 2 - Amplitude (en bas) et phase (en haut) de vibration d'un film smectique tendu sur le cadre « cocotte ». Chaque fréquence propre correspond à un pic d'amplitude et à une variation de la phase de 180°.

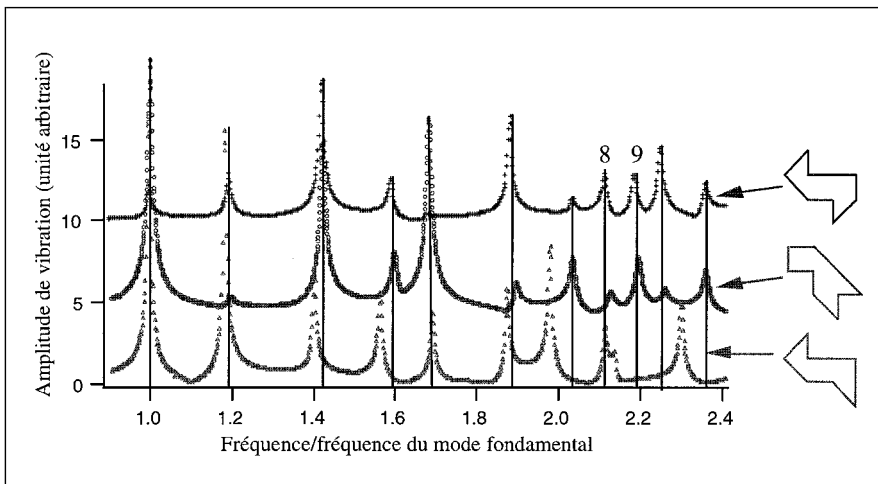


Figure 3 - Trois séries de pics d'amplitude de vibration, correspondant respectivement aux cadres « cocotte », « flèche » et « cocotte déformée ». En abscisse, on a porté la fréquence de vibration du film, normalisée par celle du mode fondamental de ce film. En effet, les fréquences auxquelles le film vibre dépendent de ses caractéristiques physiques, notamment de son épaisseur. Ne maîtrisant pas a priori l'épaisseur des films, on normalise en divisant par la fréquence du fondamental (reliée à l'épaisseur du film). Les traits verticaux correspondent aux fréquences propres normalisées de « flèche » et « cocotte ».

que des trajectoires classiques sur le même billard. Cette relation entre la structure du problème quantique et la nature du problème classique associé a été popularisée sous le terme de « chaos quantique ».

Les tambours considérés ici constituent donc une réalisation expérimentale indirecte de ces billards quantiques, sur lesquels beaucoup de travaux théoriques existent mais encore assez peu d'expériences.

POUR EN SAVOIR PLUS

Pieranski (P.) et al., *Phys. A* **194**, 364, 1993.

Rayleigh (J.W.), « The theory of sound », Dover Publishing Inc., 1945.

Kac (M.) « Can one hear the shape of a drum ? », *Am. Math. Monthly* **73**, 1, 1966.

Gordon (C.) & Webb (D.) « You can't hear the shape of a drum », *American Scientist*, janv.-févr. 1966.

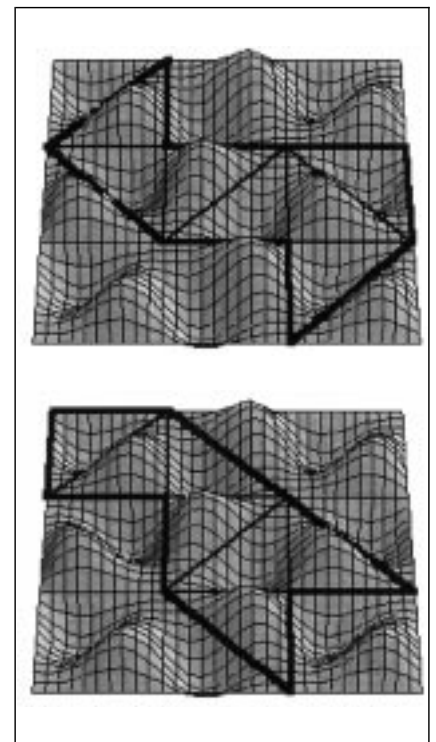


Figure 4 - Allure du neuvième mode de vibration pour les deux contours « cocotte » et « flèche ». Ce mode dit « triangulaire » est construit à partir du fondamental d'un triangle, suivant le même procédé que les deux contours eux-mêmes. C'est le premier mode connu analytiquement, les suivants étant les autres modes triangulaires, construits à partir des harmoniques successifs du triangle.

Sridhar (S.) and Kudrolli (A.), *Phys. Rev. Letters* **72**, 2175, 1994.

Brazovskaia (M.), Even (C.) et Pieranski (P.), « Les tambours liquides », *Pour la Science*, avril 1997.