Examen de Physique statistique

Mardi 18 Mai 2010

1ère Session ; durée de l'épreuve : **3 heures.**

L'utilisation de documents, téléphones portables,...est interdite. Calculatrices autorisées.

Recommandations :

Lisez attentivement l'énoncé et rédigez *succintement* et *clairement* votre réponse.
Vérifiez vos calculs (analyse dimensionnelle,...) ; N'oubliez pas de vous **relire**.
Pensez aux informations en annexe.

Question de cours (durée conseillée : 30min)

On considère un système $\mathscr{S}$, en situation canonique, réunion de deux sous-systèmes **macroscopiques** $\mathscr{S}_1$ et $\mathscr{S}_2$, constitués de particules de même nature. Ces deux sous-systèmes peuvent échanger des particules par l'intermédiaire de leur paroi qui est fixe mais perméable aux particules.

1. Rappeler, sans démonstration, le théorème qui permet d'étudier l'évolution spontanée d'un système en situation canonique, après relâchement d'une contrainte.
2. Pourquoi peut-on écrire l'énergie libre de $\mathscr{S}$, pour une valeur donnée de N_1, sous la forme :
$$F(T, N; N_1) = F_1(T, N_1) + F_2(T, N - N_1) \tag{1}$$
Que représente, en particulier, N dans cette formule ?
3. Quelle relation permet alors de calculer la valeur la plus probable de N_1, que l'on notera $\tilde{N}_1$?
4. Représenter schématiquement comment varie $F(T, N; N_1)$ autour de $\tilde{N}_1$.
5. Dans cette question, on suppose qu'à l'instant initial N_1 est différent de $\tilde{N}_1$, mais suffisamment proche pour pouvoir considérer $\delta N_1 = \tilde{N}_1 - N_1$ comme un infiniment petit.
   (a) Donner l'expression de la variation d'énergie libre de $\mathscr{S}$, δF en fonction de δN_1 et des potentiels chimiques canoniques **initiaux** μ_1^c et μ_2^c des deux sous-systèmes.
   (b) Montrer que les particules vont passer majoritairement du sous-système qui a le potentiel chimique le plus élevé vers l'autre. (On peut également utiliser un raisonnement graphique).

Rappel : Définition du potentiel chimique canonique : $\mu^c \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial F}{\partial N}$.

La résistance de Sharvin (durée conseillée : 2h30min)

On considère, dans ce problème, deux gaz $\mathscr{S}_1$ et $\mathscr{S}_2$ séparés par une paroi percée d'un trou de surface $\mathcal{A}$. Les deux gaz sont maintenus à **même température** T, mais à des **potentiels chimiques différents** μ_1 **et** μ_2. Dans le cas présent, il s'agit des électrons libres d'un même métal et on réalise la différence de potentiel chimique en appliquant une différence de potentiel électrique (*cf.* figure 1) :

$$\mu_1 - \mu_2 = eV \,, \tag{2}$$

où e est la valeur absolue de la charge de l'électron. Comme on le sait, les électrons d'un métal forment un gaz **dégénéré**. La présente étude sera menée dans le cadre semi-classique de la théorie cinétique : la translation des électrons sera traitée classiquement mais on utilisera la distribution de Fermi-Dirac pour spécifier le nombre moyen d'électrons occupant une cellule élémentaire de l'espace des phases.

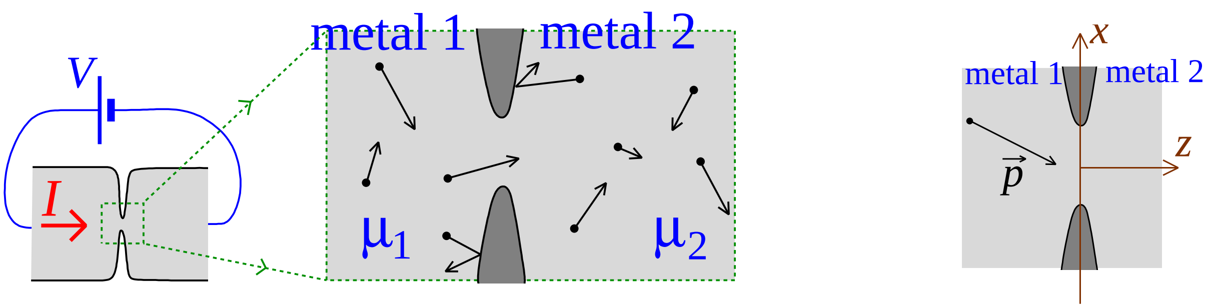

FIGURE 1 – *Gaz d'électrons dans un métal. Un trou, à travers lequel les électrons peuvent passer, sépare le métal en deux régions.*

A. Étude de la distribution d'équilibre

Considérons tout d'abord N électrons libres non relativistes, de masse individuelle m, dans une enceinte de volume $\mathscr{V}$ (on notera $n = N/\mathscr{V}$ la densité électronique), de température T et de potentiel chimique μ. On définit le facteur de Fermi par la fonction

$$f(\varepsilon) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\mathrm{e}^{\beta\varepsilon} + 1} \,. \tag{3}$$

1. Montrer que le nombre moyen d'électrons dans le volume élémentaire de l'espace des phases est donné par :

$$w(\vec{r}, \vec{p})\, \mathrm{d}^3 r \mathrm{d}^3 p = 2\, f\left(\frac{\vec{p}^{\,2}}{2m} - \mu\right) \frac{\mathrm{d}^3 r \mathrm{d}^3 p}{h^3} \tag{4}$$

2. La fonction de distribution est normalisée selon :

$$\int_{\mathscr{V}} \mathrm{d}^3 r \int \mathrm{d}^3 p\, w(\vec{r}, \vec{p}) = N \tag{5}$$

   (a) Que signifie cette relation ?

   (b) Soit ε l'énergie cinétique d'un électron. Retrouver, à partir de cette condition de normalisation, l'expression de la densité d'états $\rho(\varepsilon)$ que l'on écrira sous la forme $\rho(\varepsilon) = \mathscr{V}\, B\, \sqrt{\varepsilon}$. Donner l'expression de B en fonction de m et de la constante de Planck, h.

3. Dans cette question on fait l'approximation de température nulle. Dans ce cas le potentiel chimique μ est égal à l'énergie de Fermi ε_F.

   (a) Représenter soigneusement le facteur de Fermi $f(\varepsilon - \mu)$ à ce degré d'approximation.

   (b) Soit k_F le vecteur de Fermi défini par $\varepsilon_F = \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m}$. Exprimer k_F en fonction de la densité électronique n.

B. Courant électrique à travers le trou

L'objet de cette partie de l'exercice est de montrer que si l'on maintient une différence de potentiel chimique entre les deux gaz d'électrons, il en résulte un courant I à travers le trou, dépendant de la différence de potentiel V. La relation courant-tension nous permet d'introduire la résistance électrique du trou de surface $\mathcal{A}$ dont le calcul est l'objet du problème. Le trou est supposé suffisamment petit pour qu'il ne perturbe pas l'équilibre thermodynamique des deux gaz de part et d'autre. On suppose que le trou est dans le plan xOy et que Oz définit la normale sortante du gaz $\mathscr{S}_1$ (*cf.* figure 1). Dans un premier temps on ne fait pas d'hypothèse sur la température.

1. On considère d'abord les électrons sortant de l'enceinte n°1 pendant un intervalle de temps $\mathrm{d}t$, **tout en ayant une impulsion $\vec{p}$ à d^3p près** (*cf.* partie droite de la figure 1). Dans quel volume se trouvaient-ils nécessairement ? (Un schéma serait bienvenu).

2. En déduire l'expression du nombre δN_1 d'électrons qui vont sortir de l'enceinte n°1 pendant le temps $\mathrm{d}t$, avec une impulsion quelconque. (On exprimera δN_1 sous la forme d'une intégrale de $w(\vec{r}, \vec{p})$).

3. En déduire que le courant électrique qui traverse le trou s'écrit :

$$I = e\,\mathcal{A}\,C \int_{p_z>0} \mathrm{d}^3p\, \frac{p_z}{m} \left[f\left(\frac{\vec{p}^{\,2}}{2m} - \mu_1\right) - f\left(\frac{\vec{p}^{\,2}}{2m} - \mu_2\right)\right] \tag{6}$$

   où C est une constante dont on donnera l'expression à partir des résultats de la partie A.

4. Pour calculer ce courant, il convient de passer en coordonnées sphériques puis d'intégrer sur tout le **demi-espace extérieur à l'enceinte n°1**.

   (a) Rappeler sans démonstration l'expression de d^3p et p_z en coordonnées sphériques.

   (b) Montrer que I est donné par :

$$I = 2\pi\, e\,\mathcal{A}\, m\, C \int_0^\infty \mathrm{d}\varepsilon\, \varepsilon\, \left[f(\varepsilon - \mu_1) - f(\varepsilon - \mu_2)\right] \tag{7}$$

5. On fait à ce stade l'approximation de température nulle pour calculer l'intégrale.

   (a) Calculer explicitement I. Exprimer le résultat en fonction de μ_1, μ_2, e, $\mathcal{A}$, m et h.

   (b) On se place dans le régime linéaire, c'est-à-dire que l'on suppose :

$$\mu_1 - \mu_2 = eV \to 0 \tag{8}$$

   Montrer que dans ces conditions on peut écrire $I = G_S V$, où G_S est la conductance (l'**inverse** de la résistance $G \equiv 1/R$) du trou. Calculer G_S. Exprimer le résultat en fonction de $\mathcal{A}$, m, e, h et $\varepsilon_F \equiv \mu_1$. Exprimer ensuite votre résultat en fonction de e, h, $\mathcal{A}$ et du vecteur d'onde de Fermi k_F. Vérifier l'homogénéité (en particulier que h/e^2 a la dimension d'une résistance électrique).

(c) Montrer enfin que l'on peut faire disparaître la constante de Planck de l'expression de la conductance de Sharvin G_S et l'écrire en fonction de e, n, m, $\mathcal{A}$ et de la vitesse de Fermi v_F des électrons, sous la forme[1] :

$$G_S \propto \frac{ne^2\mathcal{A}}{mv_F} \tag{9}$$

On précisera la constante sans dimension qui manque dans cette expression.

6. **Application numérique :** On considère un trou carré de dimension 10 nm×10nm (1nm= 10^{-9} m) dans de l'Argent. On donne $n = 60\,\mathrm{nm}^{-3}$.

   (a) Calculer le vecteur de Fermi k_F. Calculer l'énergie de Fermi ε_F, qu'on exprimera en eV. Donner la valeur de la température de Fermi (en K).

   (b) En déduire la valeur de la vitesse de Fermi des électrons.

   (c) Calculer la longueur d'onde de Fermi λ_F des électrons.

   (d) Calculer la **résistance** de Sharvin du trou, dont on précisera bien l'unité.

7. [**Bonus**] Quelle relation (impliquant la dimension du trou) doit être vérifiée pour justifier un traitement classique de la translation ? Est-elle vérifiée ici ?

8. [**Bonus**] La figure 2 donne le schéma de principe d'une expérience portant sur la mesure de la conductance d'un "trou" séparant deux gaz d'électrons **bidimensionnels** (à une interface GaAs/GaAlAs), en fonction de la largeur W de la fente. Comment doit-on modifier le résultat obtenu à la question 5.b (G_S en fonction de e, h, k_F et $\mathcal{A}$) pour l'adapter à la dimensionnalité de cette expérience ? Pouvez-vous, sur cette base, expliquer le résultat expérimental ? [**Plus difficile :**] Pouvez-vous comprendre l'origine des plateaux ?

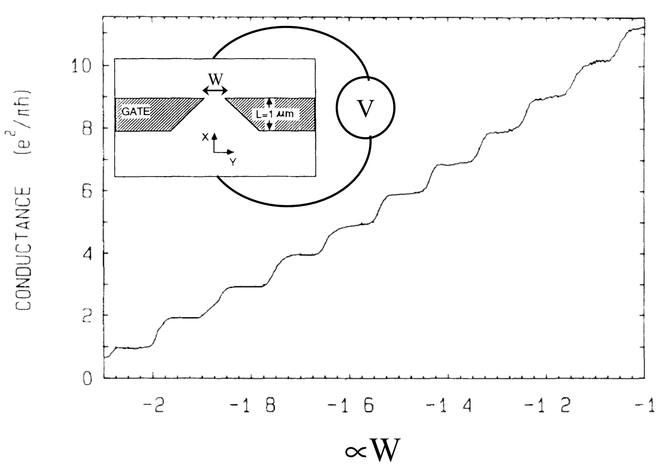

FIGURE 2 – *B. J. van Wees et al.,* Quantized conductance of point contacts in a two-dimensional electron gas, *Phys. Rev. Lett.* **60***(9), 848 (1988).*

Annexe :

Constante de Planck : $h = 6,62\ 10^{-34}$ J.s et $\hbar = 1,055\ 10^{-34}$ J.s
Charge de l'électron (en valeur absolue) : $e = 1,602\ 10^{-19}$ C
Masse de l'électron : $m = 0,9\ 10^{-30}$ kg
Constante de Boltzmann : $k_B = 1,38\ 10^{-23}$ J.K^{-1}

[1] Yu. V. Sharvin, "*A possible method for studying Fermi surfaces*", JETP Lett. **21**, 655 (1965).