Electromagnétisme de Born

$$\mathcal{L}_B = b^2\left[1-\sqrt{1-2\mathcal{L}_0/b^2}\right]$$

il est clair que lorsque $|\mathcal{L}_0| \ll b^2$ on a $\mathcal{L}_B \simeq \mathcal{L}_0$. = c'est l'électro mag. usuel

$\mathcal{L}_B$, comme $\mathcal{L}_0$ et b^2, a la dimension d'une densité d'énergie. Bien que $\mathcal{L}_0$ soit différente de la densité d'énergie usuelle $u(\vec{r},t)$, ces 2 quantités ont le m̂ ordre de grandeur :

$$\begin{cases} \mathcal{L}_0 = -\dfrac{1}{2\mu_0}\left(B^2 - E^2/c^2\right) \\ u = \dfrac{1}{2\mu_0}\left(B^2 + E^2/c^2\right) \end{cases}$$

il est donc légitime de considérer que la condition $u \ll b^2$ suffit à définir le régime dans lequel la théorie de Born se réduit à l'électrodyn. usuelle

▽△ Euler-Lagrange : $\partial_\alpha\left[\dfrac{\partial(\mathcal{L}_B+\mathcal{L}_{int})}{\partial(\partial_\alpha A_\beta)}\right] = \underbrace{\dfrac{\partial(\mathcal{L}_B+\mathcal{L}_{int})}{\partial A_\beta}}_{} \longrightarrow -J^\beta$

et

$$\frac{\partial \mathcal{L}_B}{\partial(\partial_\alpha A_\beta)} = \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}_B}{\partial \mathcal{L}_0}}_{\frac{1}{\sqrt{1-2\mathcal{L}_0/b^2}}} \cdot \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial F_{\mu\nu}}}_{-\frac{1}{2\mu_0}F^{\mu\nu}} \cdot \underbrace{\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial(\partial_\alpha A_\beta)}}_{\delta^\alpha_\mu \delta^\beta_\nu - \delta^\alpha_\nu \delta^\beta_\mu}$$

il vient donc $\dfrac{\partial \mathcal{L}_B}{\partial(\partial_\alpha A_\beta)} = -\dfrac{1}{\mu_0}\dfrac{F^{\alpha\beta}}{\sqrt{1-2\mathcal{L}_0/b^2}}$

puis Euler-Lagrange s'écrit :

$$\boxed{\partial_\alpha\left(\frac{F^{\alpha\beta}}{\sqrt{1-2\mathcal{L}_0/b^2}}\right) = \mu_0 J^\beta}$$

on a bien-sûr toujours $\partial_\alpha {}^*F^{\alpha\beta}=0$. Donc seules les éqs. de Maxwell-Gauss et Maxwell-Ampère sont modifiées par la théorie de Born

EB2

Tenseur énergie-impulsion canonique :

$$\Theta_\mu{}^\nu = \frac{\partial \mathcal{L}_B}{\partial(\partial_\nu A_\beta)} \partial_\mu A_\beta - \delta_\mu^\nu \mathcal{L}_B = -\frac{1}{\mu_0} \frac{F^{\nu\beta}\partial_\mu A_\beta}{\sqrt{1-2\mathcal{L}_0/b^2}} - \delta_\mu^\nu \mathcal{L}_B$$

on définit $\Psi^{\mu\nu\sigma} = \frac{1}{\mu_0}\frac{A^\mu F^{\nu\sigma}}{\sqrt{1-2\mathcal{L}_0/b^2}} = -\frac{1}{\mu_0}\frac{A^\mu F^{\sigma\nu}}{\sqrt{1-2\mathcal{L}_0/b^2}}$

en l'absence de charge on a : $\partial_\sigma \Psi^{\mu\nu\sigma} = -\frac{1}{\mu_0}\frac{F^{\sigma\nu}\partial_\sigma A^\mu}{\sqrt{1-2\mathcal{L}_0/b^2}}$

car d'après Euler-Lagrange

$$\partial_\sigma\left(\frac{F^{\sigma\nu}}{\sqrt{\cdots}}\right)=0$$

donc on a $T_\mu{}^\nu = \Theta_\mu{}^\nu + \partial_\sigma \Psi^{\mu\nu\sigma} = -\frac{1}{\mu_0}\frac{F^{\nu\beta}\partial_\mu A_\beta}{\sqrt{\cdots}} - \delta_\mu^\nu \mathcal{L}_B + \frac{1}{\mu_0}\frac{F^{\nu\sigma}\partial_\sigma A_\mu}{\sqrt{\cdots}}$

cela donne

$$\boxed{T_\mu{}^\nu(\vec{r},t) = -\frac{1}{\mu_0}\frac{F^{\nu\beta}F_{\mu\beta}}{\sqrt{1-2\mathcal{L}_0/b^2}} - \delta_\mu^\nu \mathcal{L}_B}$$

Electrostatique : $A^\mu = \left(\frac{\Phi}{c}, \vec{0}\right)$ $\quad J^\mu = (c\rho, \vec{0})$

$$F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = 2(B^2 - E^2/c^2) = -2E^2/c^2$$

et la composante $\beta=0$ d'Euler-Lagrange s'écrit : $\partial_i \frac{F^{i0}}{\sqrt{1-\frac{\varepsilon_0 E^2}{b^2}}} = \mu_0 c\rho$

où $F^{i0} = E^i/c$ cela s'écrit donc

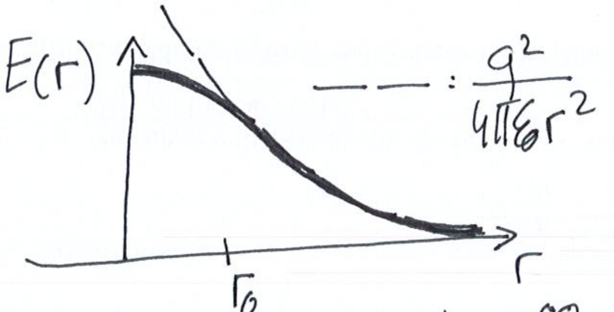
$$\vec{\nabla}\cdot\left(\frac{\vec{E}}{\sqrt{1-\varepsilon_0 E^2/b^2}}\right) = \rho/\varepsilon_0 = \frac{q}{\varepsilon_0}\delta^{(3)}(\vec{r})$$

on sait que la solution de $\vec{\nabla}\cdot\vec{\mathcal{E}} = \frac{q}{\varepsilon_0}\delta^{(3)}(\vec{r})$ est $\vec{\mathcal{E}} = \frac{q\vec{e}_r}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$ donc ici on peut écrire $\vec{E} = E(r)\vec{e}_r$ avec :

$$\frac{E}{\sqrt{1-\varepsilon_0 E^2/b^2}} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \quad \text{soit} \quad E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{\varepsilon_0}{b^2}\left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\right)^2}} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\sqrt{r^4+r_0^4}}$$

en définissant $r_0^4 = \frac{q^2}{(4\pi b)^2\varepsilon_0}$

$E(r)$ a l'allure suivante :



■ Densité d'énergie : $u(\vec{r},t) = T^{00} = -\frac{1}{\mu_0}\frac{F^{0\beta}F_{0\beta}}{\sqrt{1-2\mathcal{L}_0/b^2}} - \mathcal{L}_B$

cas électrostatique : $\mathcal{L}_0 = \frac{\varepsilon_0}{2}E^2$ et $\mathcal{L}_B = b^2\left[1-\sqrt{1-\varepsilon_0 E^2/b^2}\right]$

alors que $F^{0\beta}F_{0\beta} = -(F^{01})^2 - (F^{02})^2 - (F^{03})^2 = -\vec{E}^2/c^2$

donc $u(\vec{r}) \overset{\text{ici}}{=} \frac{\varepsilon_0 E^2}{\sqrt{1-\varepsilon_0 E^2/b^2}} - b^2\left[1-\sqrt{1-\varepsilon_0 E^2/b^2}\right] = \frac{b^2}{\sqrt{1-\varepsilon_0 E^2/b^2}} - b^2$

soit $u(\vec{r}) = b^2\left\{\frac{1}{\sqrt{1-\frac{r_0^4}{r^4+r_0^4}}} - 1\right\} = b^2\frac{\sqrt{r^4+r_0^4}-r^2}{r^2}$

et l'énergie électrostatique $\mathcal{E}_{chp} = \int u\, d^3r = 4\pi b^2\int_0^\infty\left(\sqrt{r^4+r_0^4}-r^2\right)dr$

changement de variable $r = r_0 u$ — cela donne :

$$\mathcal{E}_{chp} = \underbrace{4\pi r_0^3 b^2}_{\text{autre écriture } = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 r_0}}\underbrace{\int_0^\infty\left(\sqrt{u^4+1}-u^2\right)du}_{\alpha = 1.23605\ldots}$$

Base Nova

$$\mathcal{L} = \frac{i\hbar}{2}(\psi^*\partial_t\psi - \psi\partial_t\psi^*) - \frac{\hbar^2}{2m}\partial_j\psi\partial_j\psi^* + \frac{g}{2}(\psi\psi^*)^2.$$

Euler-Lagrange : $\partial_t \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_t\psi^*)} + \partial_j \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_j\psi^*)} = \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi^*}$

soit $-\frac{i\hbar}{2}\partial_t\psi - \frac{\hbar^2}{2m}\partial_j\partial_j\psi = \frac{i\hbar}{2}\partial_t\psi + g\psi^2\psi^*$

qui se met sous la forme : $\boxed{-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi - g|\psi|^2\psi = i\hbar\partial_t\psi}$ (1)
(éq. de Gross-Pitaevskii)

L'autre éq., obtenue en faisant $\psi^* \leftrightarrow \psi$ dans Euler-Lagrange est la complexe conjuguée de celle-ci (c'est bien normal puisque $\mathcal{L}$ est réel).

En prenant $\psi^*(1) - \psi(1)^*$ on obtient :

$$\underbrace{-\frac{\hbar^2}{2m}\underbrace{(\psi^*\partial_j\partial_j\psi - \psi\partial_j\partial_j\psi^*)}_{\partial_j(\psi^*\partial_j\psi - \psi\partial_j\psi^*)}}_{-i\hbar\,\partial_j J_j} = i\hbar(\psi^*\partial_t\psi + \psi\partial_t\psi^*) = i\hbar\,\partial_t\rho$$

on a donc bien $\boxed{\partial_t\rho + \partial_j J_j = 0}$ (2)

on peut écrire :

$$\partial_t\mathcal{L} = \underbrace{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi}}_{\partial_t\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_t\psi)}\right] + \partial_k\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_k\psi)}\right]}\partial_t\psi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_t\psi)}\partial_t\partial_t\psi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_k\psi)}\partial_t\partial_k\psi + (\psi\leftrightarrow\psi^*)$$

avec Euler-Lagrange.

on peut mettre cela sous la forme plus condensée :

$$\partial_t\mathcal{L} = \partial_t\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_t\psi)}\partial_t\psi + (\psi\leftrightarrow\psi^*)\right] + \partial_k\underbrace{\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_k\psi)}\partial_t\psi + (\psi\leftrightarrow\psi^*)\right]}_{S_k}$$

soit $\boxed{\partial_t u + \partial_k S_k = 0}$ (3)

avec $u = \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_t\psi)}\partial_t\psi + (\psi\leftrightarrow\psi^*) - \mathcal{L}$

les formes explicites de u et S sont : [BN2]

$$S_j = -\frac{\hbar^2}{2m}\partial_j\psi^*\partial_t\psi + (\psi\leftrightarrow\psi^*) \qquad u = \frac{\hbar^2}{2m}\partial_j\psi\partial_j\psi^* - \frac{g}{2}(\psi\psi^*)^2$$
$$= \frac{\hbar^2}{2m}|\vec{\nabla}\psi|^2 - \frac{g}{2}|\psi|^4$$

- les eqs. (2) et (3) montrent que les quantités $\mathcal{N} = \int d^d r\, \rho(\vec{r},t)$ et $\mathcal{E} = \int d^d r\, u(\vec{r},t)$ sont indépendantes du temps. Faisons la démonstration pour $\mathcal{N}$ par exemple :

$$\frac{d\mathcal{N}}{dt} = \int d^n x\, \rho_t = -\int d^n x\, \partial_j J_j$$ avec Gauss-Ostrogradskii cette intégrale s'écrit comme un flux sortant, et comme J_j décroit suffisamment vite à l'∞, ce flux est nul.

- $$\sigma_{jk} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_k\psi)}\partial_j\psi + (\psi\leftrightarrow\psi^*) - \delta_{jk}\mathcal{L}$$
$$= -\frac{\hbar^2}{2m}\partial_k\psi^*\partial_j\psi + (\psi\leftrightarrow\psi^*) - \delta_{jk}\mathcal{L}$$

on a effectivement $\partial_t g_j = \partial_k\sigma_{jk}$

démonstration (non demandée) :

$$\partial_j\mathcal{L} = \underbrace{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi}}\partial_j\psi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_t\psi)}\partial_j\partial_t\psi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_k\psi)}\partial_j\partial_k\psi + (\psi\leftrightarrow\psi^*)$$

$$\hookrightarrow \partial_t\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_t\psi)}\right] + \partial_k\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_k\psi)}\right]$$ avec Euler-Lagrange.

donc

$$\partial_j\mathcal{L} = \partial_t\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_t\psi)}\partial_j\psi\right] + \partial_k\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_k\psi)}\partial_j\psi\right] + (\psi\leftrightarrow\psi^*)$$

soit

$$-\partial_t\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_t\psi)}\partial_j\psi + (\psi\leftrightarrow\psi^*)\right] = \partial_k\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_k\psi)}\partial_j\psi + (\psi\leftrightarrow\psi^*) - \delta_{jk}\mathcal{L}\right]$$

$$\partial_t g_j = \partial_k\sigma_{ik}$$

où $g_j = -\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_t\psi)}\partial_j\psi - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_t\psi^*)}\partial_j\psi^* = -\frac{i\hbar}{2}\psi^*\partial_j\psi + \frac{i\hbar}{2}\psi\partial_j\psi^* \stackrel{*}{=} m J_j$

- $X_j = \frac{1}{N}\int d^n x \, x_j \rho \qquad \frac{dX_j}{dt} = \frac{1}{N}\int d^n x \, x_j \partial_t \rho$

$$= -\frac{1}{N}\int d^n x \, x_j \partial_k J_k \quad \left(\begin{array}{c}\text{puis on utilise}\\ \text{Gauss-Ostrog.}\end{array}\right)$$

$$= +\frac{1}{N}\int d^n x \, J_k \underbrace{\partial_k x_j}_{\delta_{jk}}$$

donc $V_j = \frac{dX_j}{dt} = \frac{1}{N}\int d^n x J_j = \frac{1}{Nm}\int d^n x \, g_j$

$$\frac{dV_j}{dt} = +\frac{1}{Nm}\int d^n x \, \partial_k \sigma_{jk} = 0 \text{ avec Gauss-Ostrog.}$$

La vitesse du centre de masse est constante = normal, il n'y a pas de potentiel extérieur. Par un changem^t de réf. inertiel on peut prendre $\vec{V} = \vec{0}$. La position du centre de masse est fixe = on la prend comme origine des coordonnées.

- $R^2 = \frac{1}{N}\int d^n x \, |\vec{x}|^2 \rho \qquad \frac{dR^2}{dt} = -\frac{1}{N}\int d^n x \, |\vec{x}|^2 \partial_j J_j$

$$= \frac{1}{N}\int d^n x \, J_j \, \partial_j |\vec{x}|^2 = \frac{2}{N}\int d^n x \, J_j x_j$$

donc $\boxed{\frac{dR^2}{dt} = \frac{2}{mN}\int d^n x \, x_j g_j}$ si $\psi(\vec{x},0)$ est réel il est clair que $\vec{g}(\vec{x},0) = 0$ et donc $\left.\frac{dR^2}{dt}\right|_{t=0} = 0$

$$\frac{d^2R^2}{dt^2} = +\frac{2}{mN}\int d^n x \, x_j \partial_k \sigma_{jk} = -\frac{2}{mN}\int d^n x \, \sigma_{jk} \underbrace{\partial_k x_j}_{\delta_{jk}} = \frac{-2}{mN}\int d^n x \, \sigma_{jj}$$

et $\sigma_{jk} = -\frac{\hbar^2}{2m}\partial_k \psi^* \partial_j \psi - \frac{\hbar^2}{2m}\partial_k \psi \partial_j \psi^* - \delta_{jk}\mathcal{L}$

donc $\sigma_{jj} = -\frac{\hbar^2}{m}\partial_j \psi^* \partial_j \psi - n\mathcal{L}$

calcul de $\int d^n x \, \mathcal{L} = \int d^n x \left\{ \frac{i\hbar}{2}\psi^* \partial_t \psi - \frac{i\hbar}{2}\psi \partial_t \psi^* - \frac{\hbar^2}{2m}\partial_j \psi \partial_j \psi^* + \frac{g}{2}|\psi|^4 \right\}$

avec Gross-Pitaevskii on a :

$i\hbar \partial_t \psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\partial_j \partial_j \psi - g|\psi|^2 \psi$ et $-i\hbar \partial_t \psi^* = -\frac{\hbar^2}{2m}\partial_j \partial_j \psi^* - g|\psi|^2 \psi^*$

donc

$$\frac{1}{2}\int d^n x\, \psi^* i\hbar\partial_t\psi = \frac{1}{2}\int d^n x\left(\frac{\hbar^2}{2m}\partial_j\psi\partial_j\psi^* - g|\psi|^4\right)$$

ici j'ai fait une intég. par parties en utilisant Gauss-Ostrogradskii

$$\frac{1}{2}\int d^n x\, \psi(-i\hbar\partial_t\psi^*) = \frac{1}{2}\int d^n x\left(\frac{\hbar^2}{2m}\partial_j\psi\partial_j\psi^* - g|\psi|^4\right)$$

et, en regroupant tous les termes il vient $\boxed{\int d^n x\, \mathcal{L} = -\frac{g}{2}\int d^n x|\psi|^4}$

il vient donc $$\int d^n x\, \sigma_{jj} = -2\underbrace{\int d^n x\left(\frac{\hbar^2}{2m}\partial_j\psi\partial_j\psi^* - \frac{ng}{4}|\psi|^4\right)}_{\text{si } n=2 \text{ (ce qu'on supposera désormais) on reconnaît } u(\vec{x},t)}$$

il vient donc en dimension 2 : $\boxed{\frac{d^2R^2}{dt^2} = \frac{4\mathcal{E}}{Nm}}$ c'est une constante.

comme on s'est placé dans une configuration pour laquelle $\left.\frac{dR^2}{dt}\right|_{t=0} = 0$

on obtient : $\boxed{R^2(t) = \frac{2\mathcal{E}}{Nm}t^2 + R_0^2}$

collapse si et seulement si $\mathcal{E} < 0$ - on voit donc que le collapse est impossible si $g<0$ (répulsion entre les particules). Si $g>0$ on peut avoir $\mathcal{E}<0$ dans le cas où l'énergie potentielle prend le dessus sur l'énergie cinétique quantique.

$$\frac{\hbar^2}{2m}\int|\vec{\nabla}\psi|^2 \qquad -\frac{g}{2}\int|\psi|^4$$