EXAMEN d'ÉLECTRODYNAMIQUE CLASSIQUE et QUANTIQUE

Durée : 3 heures

Les calculatrices, les polycopiés et les notes de cours et de travaux dirigés sont autorisés.
Ne restez pas bloqués sur une question: admettez la réponse et passez à la suite.
Barème approximatif : A = 9 points ; B = 11 points.

Formulaire

• Le champ vectoriel $\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}\,)$ solution de l'équation

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{\mathcal{E}} = \delta^{(3)}(\vec{r}\,) \qquad \text{est} \qquad \vec{\mathcal{E}}(\vec{r}\,) = \frac{1}{4\pi r^2}\,\vec{e}_r\ , \ \text{ où } \ r = |\vec{r}\,| \ \text{ et } \ \vec{e}_r = \frac{\vec{r}}{r}\ . \tag{F1}$$

• On donne

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{d}u \left(\sqrt{u^4+1} - u^2\right) = 1.23605... \tag{F2}$$

A Électrodynamique nonlinéaire de Born

En 1933, Born essaya de résoudre certains problèmes associés à l'apparition d'infinis en électrodynamique en proposant une théorie nonlinéaire. La densité lagrangienne associée est, pour le champ libre (c'est à dire en l'absence de charge et de courant):

$$\mathscr{L}_{\mathrm{B}} = b^2 \left[1 - \sqrt{1 - 2\,\mathscr{L}_0/b^2}\,\right]\ . \tag{A1}$$

Dans cette expression b est une constante réelle et $\mathscr{L}_0 = -\frac{1}{4\mu_0}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ est la densité lagrangienne usuelle (où $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ est le tenseur de Faraday).

1/ Quelle est la dimension d'une densité lagrangienne ? Justifier rapidement que lorsque la densité d'énergie du champ est petite devant une valeur donnée (que l'on exprimera en fonction des données du problème) la théorie de Born se réduit à l'électrodynamique usuelle.

2/ Le couplage avec la matière est décrit par le terme d'interaction usuel $\mathscr{L}_{\mathrm{int}} = -A_\mu J^\mu$, où $J^\mu(\vec{r}, t)$ est le quadri-courant. Écrire les équations d'Euler-Lagrange associées à $\mathscr{L} = \mathscr{L}_{\mathrm{B}} + \mathscr{L}_{\mathrm{int}}$. Quelles sont les équations de Maxwell modifiées par la théorie de Born ?

3/ Calculer le tenseur énergie-impulsion canonique associé à $\mathscr{L}_{\mathrm{B}}$, puis donner l'expression de sa version symétrisée en fonction du tenseur de Faraday, de $\mathscr{L}_0$ et de $\mathscr{L}_{\mathrm{B}}$.

4/ On s'intéresse désormais au champ créé par une charge ponctuelle q immobile à l'origine des coordonnées. C'est un problème électrostatique et on prendra donc $\vec{A} \equiv 0$ dans tout ce qui suit.

(a) Montrer que le champ électrique $\vec{E}(\vec{r}\,)$ est solution de

$$\vec{\nabla}\cdot\left(\frac{\vec{E}}{\sqrt{1-\varepsilon_0 E^2/b^2}}\right) = \frac{q}{\varepsilon_0}\,\delta^{(3)}(\vec{r}\,)\ , \ \text{ où } \ E = |\vec{E}\,|\ . \tag{A2}$$

(b) Résoudre (A2). Tracer l'allure de $E(r)$ et comparer au résultat de l'électrostatique usuelle[1].

(c) On veut calculer l'énergie du champ créé par la charge ponctuelle. Exprimer la densité d'énergie du champ en fonction de $E(r)$ et de b.

(d) Calculer alors explicitement l'énergie du champ créé par la charge ponctuelle q. Comparer avec le résultat de l'électrostatique usuelle.

B Bose Nova

Le but de ce problème est d'étudier sous quelle condition un condensat de Bose-Einstein peut s'effondrer sur lui-même sous l'effet de l'attraction entre les particules qui le composent. On travaille en dimension n ($n = 1$, 2 ou 3), la position d'un point courant de l'espace sera repérée par un vecteur $\vec{x}$ à n composantes et on notera l'élément de "volume" $\mathrm{d}^n x$. La fonction d'onde (complexe) du condensat est notée $\psi(\vec{x},t)$. Le système est décrit par la densité lagrangienne

$$\mathscr{L}(\psi,\partial_t\psi,\partial_j\psi,\psi^*,\partial_t\psi^*,\partial_j\psi^*) = \frac{\mathrm{i}\hbar}{2}(\psi^*\partial_t\psi - \psi\partial_t\psi^*) - \frac{\hbar^2}{2m}\partial_j\psi\partial_j\psi^* + \frac{g}{2}(\psi\,\psi^*)^2 \,. \tag{B1}$$

Dans cette expression le terme en $|\psi|^4$ décrit l'interaction entre les particules du condensat. La constante g est positive ce qui correspond à une interaction attractive. $\partial_t = \partial/\partial t$, $\partial_j = \partial/\partial x_j$ où x_j désigne la $j^{\text{ième}}$ composante de $\vec{x}$ ($j \in \{1,..,n\}$) et on a une somme implicite sur les indices spatiaux répétés[2].

On supposera que le champ ψ et toutes ses dérivées s'annulent "rapidement" à l'infini de sorte que pour tout champ vectoriel $\vec{V}(\vec{x},t)$ pouvant s'exprimer en terme de ψ, le théorème de Gauss-Ostrogradski conduit à:

$$\int \mathrm{d}^n x\,\partial_j V_j = 0\,, \tag{B2}$$

où l'intégrale porte sur tout l'espace $\mathbb{R}^n$ ($n = 1$, 2 ou 3).

1/ Pour gagner du temps on admettra (mais la démonstration n'est pas difficile) que les équations d'Euler-Lagrange se mettent sous la forme

$$\partial_t\left[\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_t\psi^*)}\right] + \partial_j\left[\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_j\psi^*)}\right] = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\psi^*}\,, \tag{B3}$$

et d'une équation similaire obtenue en remplaçant ψ par ψ^* dans (B3).

(a) Écrire la forme explicite des équations d'Euler-Lagrange. Commenter les différents termes.

(b) On définit $\rho(\vec{x},t) = \psi\psi^*$ et $J_j(\vec{x},t) = \frac{\mathrm{i}\hbar}{2m}(\psi\partial_j\psi^* - \psi^*\partial_j\psi)$. Montrer que $\partial_t\rho + \partial_j J_j = 0$. Commenter. Discuter en particulier la dépendance temporelle de la quantité $N = \int \mathrm{d}^n x\,\rho(\vec{x},t)$. La fonction d'onde est normalisée de sorte que N soit le nombre de particules dans le condensat.

2/ On définit les champs $u(\vec{x},t)$ (scalaire) et $\vec{S}(\vec{x},t)$ (vectoriel) par

$$u = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_t\psi)}\partial_t\psi + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_t\psi^*)}\partial_t\psi^* - \mathscr{L}\,, \quad \text{et} \quad S_j = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_j\psi)}\partial_t\psi + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_j\psi^*)}\partial_t\psi^* \tag{B4}$$

[1] On pourra faire apparaître la longueur caractéristique $r_0 = (q/(4\pi b\sqrt{\varepsilon_0}))^{1/2}$.

[2] On ne fait pas de distinction covariant/contravariant: tous les indices sont à la même altitude.

Donner les expressions explicites de u et S_j. En vous inspirant du cours (partie sur le tenseur impulsion-énergie), ou bien en utilisant la forme explicite des équations d'Euler-Lagrange, démontrer que l'on a :

$$\partial_t u + \partial_j S_j = 0 \ . \tag{B5}$$

Qu'en concluez vous sur la dépendance temporelle de la quantité $\mathscr{E} = \int \mathrm{d}^n x \, u(\vec{x}, t)$?

3/ On définit le tenseur $\sigma_{jk}(\vec{x}, t)$ et le vecteur $\vec{g}(\vec{x}, t)$ par

$$\sigma_{jk} = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_k \psi)} \, \partial_j \psi + \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_k \psi^*)} \, \partial_j \psi^* - \delta_{jk} \, \mathscr{L} \ , \quad \text{et} \quad g_j = - \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_t \psi)} \, \partial_j \psi - \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_t \psi^*)} \, \partial_j \psi^* \ . \tag{B6}$$

(a) Donner la forme explicite de $\sigma_{jk}(\vec{x}, t)$ et montrer que $\vec{g}(\vec{x}, t) = m \, \vec{J}(\vec{x}, t)$.

(b) Pour ne pas s'ennuyer à refaire une démonstration presque identique à celle qui conduit à l'équation (B5), on admettra que

$$\partial_t g_j = \partial_k \sigma_{jk} \ . \tag{B7}$$

Donner une interprétation physique de ce résultat.

4/ On définit le centre de masse du condensat comme le point $\vec{X}(t)$ de coordonnées

$$X_j(t) = N^{-1} \int x_j \, \rho \, \mathrm{d}^n x \ , \qquad (j \in \{1, \cdots, n\}). \tag{B8}$$

Soit $V_j = \mathrm{d}X_j / \mathrm{d}t$. Montrer que V_j ne dépend pas du temps. Commenter. Dans ce qui suit on se place dans un référence où $\vec{V} = \vec{0}$ (ce qui est toujours possible puisque $\vec{V}$ est constante) dont on choisit l'origine de sorte que $\vec{X} = \vec{0}$.

5/ Le rayon effectif de la distribution de particules du condensat est la quantité $R(t)$ définie par

$$R^2 = \frac{1}{N} \int \mathrm{d}^n x \, |\vec{x}\,|^2 \rho(\vec{x}, t) \ . \tag{B9}$$

(a) Montrer que

$$N \, \frac{\mathrm{d}R^2}{\mathrm{d}t} = \frac{2}{m} \int \mathrm{d}^n x \, \vec{x} \cdot \vec{g} \ \ . \tag{B10}$$

On suppose désormais que la fonction d'onde initiale $\psi(\vec{x}, 0)$ est réelle. Que vaut la dérivée (B10) à l'instant initial ?

(b) Déduire de ce qui précède que[3]

$$N \, \frac{\mathrm{d}^2 R^2}{\mathrm{d}t^2} = - \frac{2}{m} \int \mathrm{d}^n x \, \sigma_{jj} = \frac{4}{m} \int \mathrm{d}^n x \left\{ \frac{\hbar^2}{2m} \partial_j \psi \partial_j \psi^* - \frac{n}{2} \, \frac{g}{2} (\psi \psi^*)^2 \right\} \ . \tag{B11}$$

(c) On se place en dimension $n = 2$. Donner l'expression de $R(t)$ en fonction des données du problème. En déduire la condition nécessaire et suffisante pour observer un effondrement en un temps fini.

[3]Si vous n'avez pas le temps de faire tous les calculs, admettez que $\int \mathrm{d}^n x \, \mathscr{L} = -(g/2) \int \mathrm{d}^n x \, |\psi|^4$.