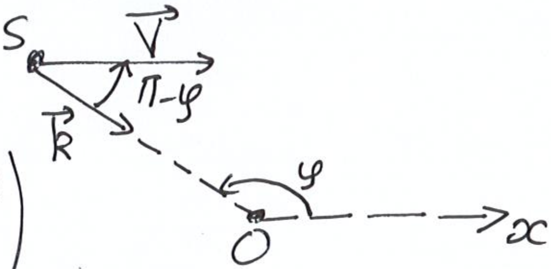
Elargissement d'une raie

on a la géométrie



$\varphi \in [0,\pi]$

$$\begin{pmatrix} \omega'/c \\ k'_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega/c \\ k_x \end{pmatrix}$$

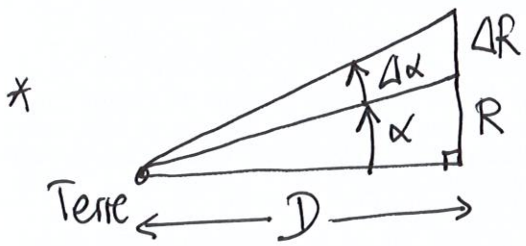
sur le dessin $k_x = |\vec k| \cos(\pi-\varphi) = -\frac{\omega}{c}\cos\varphi$ donc $\omega' = \gamma\omega(1+\beta\cos\varphi)$

c'est à dire $\nu = \dfrac{\nu'}{\gamma(1+\beta\cos\varphi)} \Rightarrow \lambda = \dfrac{c}{\nu} = \underbrace{\dfrac{c}{\nu'}}_{\lambda'}\gamma(1+\beta\cos\varphi)$

donc $\underset{\varphi=0}{\lambda_{max}} = \lambda'\gamma(1+\beta) = \lambda'\sqrt{\dfrac{1+\beta}{1-\beta}}$ et $\underset{\varphi=\pi}{\lambda_{min}} = \lambda'\gamma(1-\beta) = \lambda'\sqrt{\dfrac{1-\beta}{1+\beta}}$

- on a $r = \dfrac{\lambda_{max}-\lambda_{min}}{\lambda'} = \sqrt{\dfrac{1+\beta}{1-\beta}} - \sqrt{\dfrac{1-\beta}{1+\beta}} = \dfrac{2\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \Leftrightarrow \beta = \dfrac{r}{\sqrt{4+r^2}}$

dans la limite non relativiste $r \simeq 2\beta$



on écrit $\tan\alpha \simeq \alpha$ et $\tan(\alpha+\Delta\alpha) \simeq \alpha+\Delta\alpha$

donc $\Delta\alpha = \dfrac{\Delta R}{D}$ avec $\Delta R = V\Delta t$

soit $V = D\dfrac{\Delta\alpha}{\Delta t}$

autrement dit : $D = \dfrac{V}{\Delta\alpha/\Delta t} = \dfrac{cr}{\sqrt{4+r^2}}\dfrac{1}{\Delta\alpha/\Delta t}$

lorsque $\beta \ll 1$ cela donne :

$D \simeq \dfrac{cr}{2}\dfrac{\Delta t}{\Delta\alpha}$

- $r = \dfrac{\overbrace{1.1}^{0.0028}}{393.3} \ll 1$: on peut utiliser les expressions non relativistes.

alors $V \simeq rc/2 = 1.4\,10^{-3}c = 4.2\,10^{-3}\,10^{8}$ m/s $= 420$ km/s

$D \simeq \dfrac{r}{2}\dfrac{c\Delta t}{\Delta\alpha}$ comme $\Delta t = 1$ an, $c\Delta t = 1$ a.l.

et $\Delta\alpha = 0.20'' = 0.2 \times \dfrac{1^\circ}{3600} = \dfrac{0.2\times\pi}{180\times3600} = 9.7\,10^{-7}$ rad

alors $D = \dfrac{1.4\,10^{-3}}{9.7\,10^{-7}}$ a.l. $= 1440$ a.l.

Désintégration d'un méson D^0

$D^0 \to K^0 + \pi^0$ $\qquad \underset{\sim}{P}_D = \underset{\sim}{P}_K + \underset{\sim}{P}_\pi$

technique usuelle : on singularise la particule qui ne nous intéresse pas : $\left(\underset{\sim}{P}_K\right)^2 = \left(\underset{\sim}{P}_D - \underset{\sim}{P}_\pi\right)^2$

soit $m_K^2 c^2 = m_D^2 c^2 + m_\pi^2 c^2 - 2\, \underset{\sim}{P}_D \cdot \underset{\sim}{P}_\pi$

pseudo-produit scalaire évalué dans le réf. propre du D^0 :

$$2\, \underset{\sim}{P}_D \cdot \underset{\sim}{P}_\pi = 2(m_D c, \vec{0}) \cdot \left(\frac{\mathcal{E}_\pi}{c}, \vec{p}_\pi\right) = 2 m_D \mathcal{E}_\pi$$

donc $$\mathcal{E}_\pi = \frac{m_D^2 c^2 + m_\pi^2 c^2 - m_K^2 c^2}{2 m_D} = 0.867 \text{ GeV}$$

le γ correspondant est : $\gamma = \dfrac{\mathcal{E}_\pi}{m_\pi c^2} = 6{,}67$ et $\beta = \sqrt{1-\gamma^{-2}} = 0{,}989$

soit $v = 2.97\ 10^8$ m/s

- Dans le réf. propre du π^0 :

$\gamma_2 \leftarrow \pi^0 \rightarrow \gamma_1$ $\qquad \underset{\sim}{P}_{\gamma_1} = (p', \vec{p}\,') \qquad \underset{\sim}{P}_{\gamma_2} = (p', -\vec{p}\,')$

avec $p' = \mathcal{E}'_\gamma / c$

la conservation de la partie temporelle des 4-impulsions s'écrit : $\mathcal{E}'_\gamma = \frac{1}{2} m_\pi c^2$

si on revient dans le réf. propre du D^0 :

$$\begin{pmatrix} p \\ p_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma \\ \beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p' \\ \pm p' \end{pmatrix} \quad \text{donc } \mathcal{E}_\gamma = \mathcal{E}'_\gamma \cdot \gamma(1 \pm \beta)$$

$$\mathcal{E}_\gamma\Big|_{min} = \frac{m_\pi c^2}{2}\gamma(1-\beta) = \frac{m_\pi c^2}{2}\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} = 0{,}0049 \text{ GeV}$$

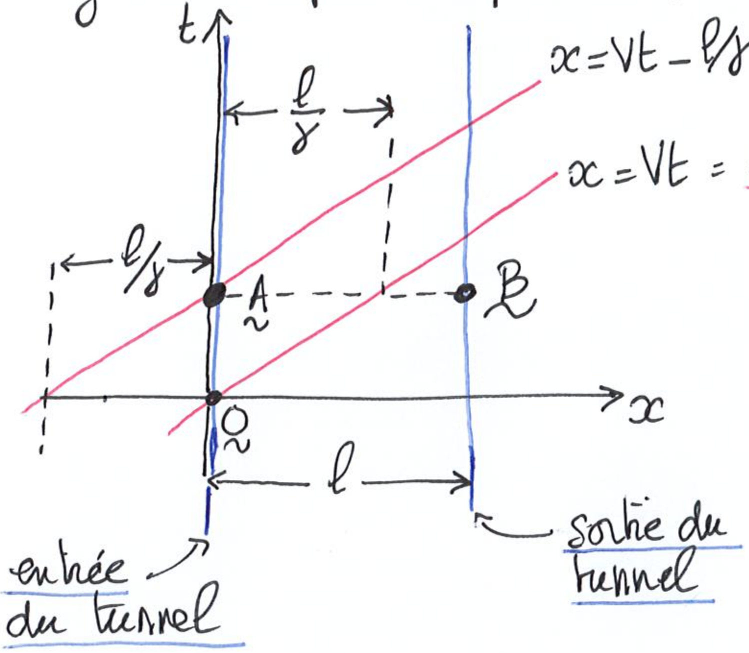
$$\mathcal{E}_\gamma\Big|_{max} = \frac{m_\pi c^2}{2}\gamma(1+\beta) = \frac{m_\pi c^2}{2}\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} = 0{,}862 \text{ GeV}$$

remarque : si $\vec{p}\,'$ avait été $/\!/ \vec{e}_y$ on aurait eu une autre formule. La config. considérée, avec $\vec{p}\,' /\!/ \vec{e}_x$, donne ~~na~~ naturellement les valeurs min et max de $\mathcal{E}_\gamma$.

Train et tunnel

1/ dans $\mathcal{R}$: le train a une longueur ℓ/γ, il pourra être contenu dans le tunnel
dans $\mathcal{R}'$: le tunnel a une longueur ℓ/γ : il ne pourra pas contenir tout le train

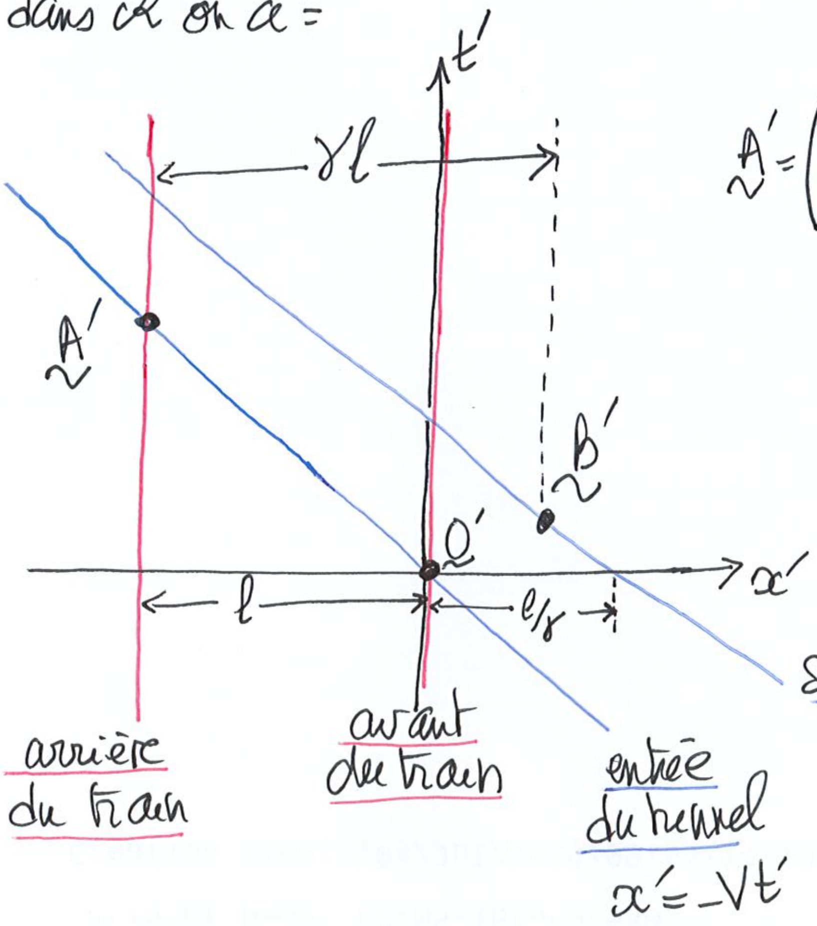
2/ diagramme espace-temps dans $\mathcal{R}$:



j'ai choisi comme origine l'évènement O : intersection de la ligne d'univers de l'avant du train avec celle de l'entrée du tunnel

$$\underset{\sim}{A} = \begin{pmatrix} t_A = \frac{\ell}{\gamma V} \\ x_A = 0 \end{pmatrix} \qquad \underset{\sim}{B} = \begin{pmatrix} t_B = t_A = \frac{\ell}{\gamma V} \\ x_B = \ell \end{pmatrix}$$

3/ dans $\mathcal{R}'$ on a :



$$\underset{\sim}{A'} = \begin{pmatrix} t'_A = \ell/V \\ x'_A = -\ell \end{pmatrix} \qquad \underset{\sim}{B'} = \begin{pmatrix} t'_B = \frac{\ell}{V}(1 - \gamma\beta^2) \\ x'_B = -\ell + \gamma\ell \end{pmatrix}$$

dans $\mathcal{R}'$ on a l'impression que l'opérateur triche $t'_B < t'_A$. Cela lui permet de s'assurer que la collision est évitée dans $\mathcal{R}'$ aussi =

$$\left(\begin{array}{c}\text{ouverture de}\\ \text{la porte de sortie}\end{array}\right) \rightarrow t'_B < t'\left(\begin{array}{c}\text{tête du train}\\ \text{sort du tunnel}\end{array}\right) = \frac{\ell}{\gamma V}$$

TT2

d'ailleurs pour des grandes vitesses on a même $t'_B < 0$ = on ouvre la porte avant que la tête du train n'entre dans le tunnel!

remarque = pour tracer les lignes d'univers de l'entrée et de la sortie du tunnel dans $\mathcal{R}'$, soit on fait appel à son intuition, soit on fait le calcul =

* dans $\mathcal{R}$, l'entrée E a une ligne d'univers $\begin{pmatrix} t_E \\ x_E = 0 \end{pmatrix}$. On obtient alors dans $\mathcal{R}'$ =
$$\begin{cases} t'_E = \gamma t_E \\ x'_E = -\beta\gamma c t_E = -V t'_E \end{cases}$$
* Idem pour la sortie S du tunnel. Elle a dans $\mathcal{R}$ $\begin{pmatrix} t_S \\ x_S = \ell \end{pmatrix}$ et dans $\mathcal{R}'$
$$\begin{cases} t'_S = \gamma(t_S - \beta \ell/c) \\ x'_S = \gamma(-\beta c t_S + \ell) = -V\gamma t_S + \ell\gamma \\ \qquad = -V\left(t'_S + \gamma\beta \frac{\ell}{c}\right) + \gamma\ell = -V t'_S + \ell/\gamma \end{cases}$$

dernier point = les 2 analyses (soit dans $\mathcal{R}$, soit dans $\mathcal{R}'$) montrent qu'on peut faire rentrer dans un tunnel de longueur propre ℓ un train de longueur propre $\gamma\ell$.