Anneau de stockage

d'après la formule (B9) : $\vec{A}_n(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{ik_n r}}{r} \int d^3r' \, e^{-i\vec{k}_n\cdot\vec{r}'} \vec{J}_n(\vec{r}')$

où, d'après (B8) et (B1) :

$$\vec{J}_n(\vec{r}') = \frac{1}{T}\int_0^T \underbrace{q\vec{v}_1(t)\,\delta^{(3)}(\vec{r}' - \vec{r}_1(t))}_{\vec{J}(\vec{r}',t)}\, e^{in\omega t}$$

cela donne :

$$\boxed{\vec{A}_n(\vec{r}) = \frac{\mu_0 q}{4\pi T}\frac{e^{ik_n r}}{r}\int_0^T dt\, \vec{v}_1(t)\, e^{-i\vec{k}_n\cdot\vec{r}_1(t)}\, e^{in\omega t}}$$

- d'après le cours, la puissance rayonnée est $P = \int_{surf} d^2\sigma\, \vec{S}_0 \cdot \hat{r}$ en prenant comme surface une sphère de rayon r assez grand pour qu'on puisse se placer dans la zone de rayonnement où $\vec{S} = \frac{c}{\mu_0}\vec{B}^2\hat{r}$ cela donne :

$P = \frac{cr^2}{\mu_0}\int d^2\Omega\, |\vec{B}|^2$ et donc, après moyennage sur une période :

$$\boxed{\left\langle \frac{dP}{d\Omega}\right\rangle = \frac{cr^2}{\mu_0}\frac{1}{T}\int_0^T |\vec{B}(\vec{r},t)|^2 dt}$$

en utilisant Parseval-Plancherel (B10) cela donne :

$$\left\langle \frac{dP}{d\Omega}\right\rangle = \frac{cr^2}{\mu_0}\Big\{ \underbrace{|\vec{B}_0(\vec{r})|^2}_{\text{nul car } \vec{k}_0 \text{ et } \vec{A}_0(\vec{r}) \text{ sont nuls}} + 2\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{|\vec{B}_n(\vec{r})|^2}_{|\vec{k}_n \wedge \vec{A}_n(\vec{r})|^2 \text{ d'après (B9)}} \Big\}$$

on utilise le fait que $\vec{B}(\vec{r},t)$ étant réel $\vec{B}_{-n}(\vec{r}) = \vec{B}_n^*(\vec{r}) \Rightarrow |\vec{B}_{-n}|^2 = |\vec{B}_n|^2$

$$\vec{k}_n \wedge \vec{A}_n(\vec{r}) = \frac{\mu_0 q}{4\pi T} \frac{e^{ik_n r}}{r} \int_0^T dt\, \vec{k}_n \wedge \vec{v}_1(t)\, e^{-i\vec{k}_n \cdot \vec{r}_1(t)}\, e^{in\omega t}$$

lorsqu'on calcule $|\vec{k}_n \wedge \vec{A}_n(\vec{r})|^2$ on aura $|e^{ik_n r}| = 1$, cela donne =

$$\left\langle \frac{dP}{d\Omega} \right\rangle = 2\frac{cr^2}{\mu_0} \left(\frac{\mu_0 q}{4\pi r}\right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1}{T} \int_0^T dt\, \vec{k}_n \wedge \vec{v}_1(t)\, e^{-i\vec{k}_n \cdot \vec{r}_1(t)}\, e^{in\omega t} \right|^2$$

soit $\left\langle \frac{dP}{d\Omega} \right\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{dP_n}{d\Omega}$ où

$$\frac{dP_n}{d\Omega} = \frac{\mu_0 c q^2}{8\pi^2} |\vec{p}_n|^2 \quad \text{avec} \quad \vec{p}_n = \frac{1}{T} \int_0^T dt\, \vec{k}_n \wedge \vec{v}_1(t)\, e^{-i\vec{k}_n \cdot \vec{r}_1(t)}\, e^{in\omega t}$$

(vérification des dimensions = $[\mu_0] = MLQ^{-2}$

$[p_n] = T^{-1}$

et donc $\left[\frac{dP_n}{d\Omega}\right] = MLQ^{-2} L . T^{-1} . Q^2 T^{-2} = ML^2T^{-3}$

c'est bien une puissance !)

3/ cas de N particules avec $\vec{r}_\nu(t) = \vec{r}_1\left(t + \frac{\phi_\nu}{\omega}\right)$ et $\vec{v}_\nu(t) = \vec{v}_1\left(t + \frac{\phi_\nu}{\omega}\right)$

dans ce cas, en suivant la même procédure que précédemment on obtient =

$$\vec{A}_n(\vec{r}) = \frac{\mu_0 q}{4\pi T} \frac{e^{ik_n r}}{r} \sum_{\nu=1}^{N} \underbrace{\int_0^T dt\, \vec{v}_\nu(t)\, e^{-i\vec{k}_n \cdot \vec{r}_\nu(t)}\, e^{in\omega t}}$$

on pose $t' = t + \frac{\phi_\nu}{\omega}$ $\left(\begin{array}{l}\vec{v}_\nu(t) = \vec{v}_1(t') \\ \vec{r}_\nu(t) = \vec{r}_1(t')\end{array}\right)$

cela donne

$$\int_{\phi_\nu/\omega}^{T+\phi_\nu/\omega} dt'\, \vec{v}_1(t')\, e^{-i\vec{k}_n \cdot \vec{r}_1(t')}\, e^{in\omega t'} \times e^{-in\phi_\nu}$$

ici, comme l'intégrant est périodique et que l'on intègre sur une période, on peut remplacer les bornes d'intégration par $\int_0^T$

AS3

cela donne :

$$A_n(\vec r) = \underbrace{\frac{\mu_0 q}{4\pi T}\,\frac{e^{ik_n r}}{r}\int_0^T dt\,\vec v_1(t)\, e^{-i\vec k_n\cdot\vec r_1(t)}\, e^{in\omega t}}_{\text{résultat (B2) pour 1 seule charge}} \times \left(\sum_{\nu=1}^{N} e^{-in\phi_\nu}\right)$$

ensuite lorsqu'on calcule la puissance moyennée exprimée comme l'intégrale temporelle de $|\vec B|^2$ et qu'on utilise la formule de Parseval Plancherel on obtient :

$$\boxed{\left\langle \frac{d\mathcal{P}}{d\Omega}\right\rangle = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{dP_n}{d\Omega}\times\left|\sum_{\nu=1}^{N} e^{-in\phi_\nu}\right|^2\right)}$$

c'est la formule (B5) de l'énoncé.

4/ particules distribuées uniformément : $\phi_\nu = 2\pi\frac{\nu-1}{N}$

alors :

$$\sum_{\nu=1}^{N} e^{in\phi_\nu} = \sum_{\nu=1}^{N} e^{2i\pi n\frac{\nu-1}{N}} = \sum_{\nu=0}^{N-1} e^{2i\pi n\frac{\nu}{N}} = \sum_{\nu=0}^{N-1}\alpha^\nu$$

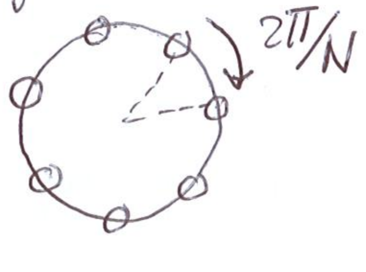
avec $\alpha = e^{2i\pi n/N}$

or, pour $\alpha\in\mathbb{C}^*$ $\sum_{\nu=0}^{N-1}\alpha^\nu = \begin{cases} N \text{ si } \alpha = 1 \\ (1-\alpha^N)/(1-\alpha) \text{ si } \alpha\neq 1\end{cases}$

$$\text{donc } \sum_{\nu=1}^{N} e^{in\phi_\nu} = \begin{cases} N \text{ si } n/N \text{ entier } (\to \text{car dans ce cas } \alpha = 1) \\ 0 \text{ sinon } \to (\text{car } \alpha^N = 1)\end{cases}$$

$$\text{cela donne donc } \left\langle \frac{d\mathcal{P}}{d\Omega}\right\rangle = N^2\left(\frac{dP_N}{d\Omega} + \frac{dP_{2N}}{d\Omega} + \frac{dP_{3N}}{d\Omega} + \cdots\right)$$

cela correspond à un système dont la fréquence fondamentale est $N\omega$ et la période est T/N : c'est normal pour que le système se retrouve dans la même position il ne faut pas faire un tour complet mais seulement $2\pi/N$:



et le facteur N^2 dans (B6) vient de la contribution $\frac{1}{T}$ à $\vec{P_n}$. (AS4)

$\boxed{B.2}$ calculons dans le cas qui nous intéresse la valeur du vecteur $\vec{P_n}$: ici

$$\begin{cases} \vec{k}_n \wedge \vec{v}_1(t) = \dfrac{nR\omega^2}{c}\cos(\omega t)\,\hat{z} \\ \vec{k}_n \cdot \vec{r}_1(t) = \dfrac{nR\omega}{c}\cos(\omega t) \end{cases}$$

donc
$$\vec{P_n} = \frac{nR\omega^2}{cT}\hat{z}\int_0^T dt \cos(\omega t)\, e^{-in\frac{R\omega}{c}\cos(\omega t)}\, e^{in\omega t}$$
$$= \frac{n\beta}{T}\hat{z}\int_0^{2\pi} du \cos u \; e^{-in\times\beta\times\cos u}\; e^{inu} \quad \text{où } \beta = \frac{R\omega}{c}$$

pour faire un devel. limité en fonction de β il faut écrire :

$$e^{-in\beta\cos u} = \sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-in\beta)^r}{r!}\cos^r u$$

et alors

$$\boxed{\begin{aligned} &\vec{P_n} = \hat{z}\,\frac{n\beta}{T}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-in\beta)^r}{r!} I_r \\ &\text{avec} \quad I_r = \underbrace{\int_0^{2\pi} du \cos^{r+1}u\; e^{inu}} = \underbrace{\frac{1}{2^{r+1}}\int_0^{2\pi} du\,(e^{iu}+e^{-iu})^{r+1} e^{inu}} \end{aligned}}$$

donc I_r est une combinaison linéaire d'intégrales de la forme $\int_0^{2\pi} du\, e^{imu}$ où $m \in [-r-1+n; r+1+n]$

ces intégrales sont nulle si $m \neq 0$.

la première fois où m peut s'annuler c'est lorsque $r = n-1$

et alors :
$$I_{n-1} = \frac{1}{2^n}\int_0^{2\pi} du\,(e^{iu}+e^{-iu})^n e^{inu} = \frac{2\pi}{2^n}$$

obtenu en développant $(e^{iu}+e^{-iu})^n$ selon le binôme de Newton. La seule contribution de ce développement qui conduit à une intégrale non nulle est e^{-inu}

cela donne $\vec{P}_n = \hat{z}\left[\frac{n\beta}{T}\,\frac{(-in\beta)^{n-1}}{(n-1)!}\,\frac{2\pi}{2^n} + \mathcal{O}(\beta^{n+1})\right] \propto \hat{z}\,\beta^n$

en utilisant la formule de Stirling on peut montrer que $(n-1)! \simeq \left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{\frac{2\pi}{n}}$ si $n \gg 1$ et dans ce cas :

$$\vec{P}_n \simeq \hat{z}\,\frac{n\beta}{T}\,\frac{(-in\beta)^{n-1}}{n^n}\,e^n\sqrt{\frac{n}{2\pi}}\,\frac{2\pi}{2^n} = \hat{z}\,\frac{i}{T}\left(\frac{-i\beta e}{2}\right)^n\sqrt{2\pi n}$$

remarque : la version usuelle de la formule de Stirling est $n! \simeq \left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{2\pi n}$ donc $(n-1)! \simeq \left(\frac{n-1}{e}\right)^{n-1}\sqrt{2\pi(n-1)}$

soit $(n-1)! \simeq \left(\frac{n}{e}\right)^n \times \underbrace{\frac{1}{e}\left(\frac{n-1}{n}\right)^n}_{\text{tend vers } 1} \times \sqrt{\frac{2\pi}{n}}\,\underbrace{\sqrt{\frac{n}{n-1}}}_{\text{tend vers } 1} \simeq \left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{\frac{2\pi}{n}}$ (*)

2/ donc si $N \gg 1$ d'après (B6) $\left\langle\frac{d\mathcal{P}}{d\Omega}\right\rangle_{\theta=\frac{\pi}{2}} \simeq N^2\,\frac{dP_N}{d\Omega}\Big|_{\theta=\pi/2}$

avec $\frac{dP_N}{d\Omega}\Big|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = \frac{\mu_0 c q^2}{8\pi^2}\,|\vec{P}_N|^2 \simeq \frac{\mu_0 c q^2}{8\pi^2}\left[\frac{1}{T^2}\left(\frac{\beta e}{2}\right)^{2N} \times 2\pi N\right]$

cela donne $$\boxed{\left\langle\frac{d\mathcal{P}}{d\Omega}\right\rangle_{\theta=\pi/2} = \frac{N^3}{T^2}\,\frac{\mu_0 c q^2}{4\pi}\left(\frac{\beta e}{2}\right)^{2N}}$$

comme $\beta \ll 1$ $\frac{\beta e}{2} \ll 1$ et $N^3\left(\frac{\beta e}{2}\right)^{2N} \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$

(*) il y a beaucoup + simple ! $n! \simeq \left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{2\pi n}$
et $(n-1)! = \frac{n!}{n} \simeq \left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{\frac{2\pi}{n}}$