**M1 et Magistère 2$^{\text{ème}}$ année** 22 janvier 2021

---

**EXAMEN d'ÉLECTRODYNAMIQUE CLASSIQUE et QUANTIQUE**

*Durée : 3 heures*

*Les calculatrices, les polycopiés et les notes de cours et de travaux dirigés sont autorisés.*
*Ne restez pas bloqués sur une question: si vous ne savez pas répondre, admettez le résultat et passez à la suite.*
*Barème approximatif : A = 5 points ; B = 15 points.*

# A Lagrangien alternatif pour l'électromagnétisme

On considère la densité lagrangienne

$$\mathscr{L} = \frac{1}{4\mu_0} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} - \frac{1}{2\mu_0} F^{\alpha\beta} \left(\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha\right) - A_\alpha J^\alpha \ ,$$

pour laquelle les variables dynamiques indépendantes sont les 20 composantes des champs $A_\alpha(\vec{r}, t)$ et $F_{\alpha\beta}(\vec{r}, t)$ (donc pas de relation *a priori* entre elles, contrairement au cas de l'électrodynamique usuelle). Dans cette expression $J_\alpha(\vec{r}, t)$ est le quadri-courant de particules, considéré comme fixé.

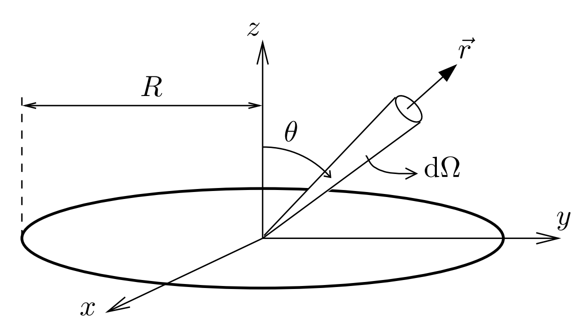
• Déterminer, selon cette théorie, les équations qui régissent la dynamique des champs $F_{\alpha\beta}$ et $A_\alpha$ en utilisant (sans démonstration) la forme générale des équations d'Euler-Lagrange donnée en cours.

• Donnez l'expression du tenseur énergie-impulsion canonique des champs. Symétrisez-le. Conclusion ?

# B Rayonnement d'un anneau de stockage

On considère un anneau circulaire de rayon $R$, placé sur le plan $xOy$ comme indiqué sur la figure.

Cet anneau est parcouru par des électrons qui ont été préalablement accélérés. Un champ magnétique (non représenté sur la figure) oblige les électrons à décrire une trajectoire circulaire de rayon $R$ et de fréquence $\omega$. L'anneau n'est pas rempli de manière continue mais de manière pulsée: les électrons sont stockés "par paquets". Une modélisation simple consiste à remplacer chaque paquet par une unique particule de charge $q$ (la même pour tous les paquets).




Le problème est divisé en deux parties. Dans la première, on étudiera d'abord le rayonnement cyclotron d'une unique particule de charge $q$, puis celui de de $N$ particules en mouvement circulaire uniforme. Dans la deuxième et dernière partie on vérifiera que la puissance rayonnée s'annule lorsque $N \to \infty$ (ce qui correspond au cas d'un anneau parcouru par un courant continu).

## B.1 Rayonnement d'un ensemble de $N$ particules

La géométrie du problème est indiquée sur la figure. Considérons d'abord le cas d'une seule particule de charge $q$. On dénotera sa position par $\vec{r}_1(t)$, le vecteur densité de courant est donné par :

$$\vec{J}(\vec{r},t) = q\,\vec{v}_1(t)\,\delta^{(3)}\left(\vec{r}-\vec{r}_1(t)\right)\ , \quad \text{où} \quad \vec{v}_1 = \frac{\mathrm{d}\vec{r}_1}{\mathrm{d}t}\ . \tag{B1}$$

**1/** En s'appuyant sur la solution du problème de rayonnement donnée dans l'annexe, vérifier que les composantes de Fourier $\vec{A}_n(\vec{r})$ ($n\in\mathbb{Z}$) du potentiel vecteur sont données par ($\vec{k}_n = \hat{r}\ n\omega/c$)

$$\vec{A}_n(\vec{r}) = \frac{\mu_0\, q}{4\pi\, T}\,\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_n r}}{r}\int_0^T \vec{v}_1(t)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\omega t}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\vec{k}_n.\vec{r}_1(t)}\,\mathrm{d}t\ . \tag{B2}$$

**2/** Démontrer *qu'après moyennage sur une période*, dans la zone de rayonnement la puissance rayonnée par unité d'angle solide s'écrit (en notant $\langle\cdots\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T \mathrm{d}t\cdots$) :

$$\left\langle\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\Omega}\right\rangle = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{d}P_n}{\mathrm{d}\Omega} \qquad \text{avec} \qquad \frac{\mathrm{d}P_n}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{\mu_0 c q^2}{8\pi^2}\,\vec{p}_n.\vec{p}_n^{\,*}\ , \tag{B3}$$

où $\mathrm{d}P_n/\mathrm{d}\Omega$ est une puissance rayonnée à la fréquence $\omega_n = n\omega$ et

$$\vec{p}_n(\hat{r}) = \frac{1}{T}\int_0^T \vec{k}_n\wedge\vec{v}_1(t)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\omega t}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\vec{k}_n.\vec{r}_1(t)}\,\mathrm{d}t\ . \tag{B4}$$

**3/** Considérons maintenant un ensemble de $N$ particules qui tournent dans l'anneau, toutes avec la même vitesse angulaire $\omega$. On notera $\phi_\nu$ la position angulaire de la $\nu$-ième particule à l'instant $t=0$ et on prendra $\phi_1 = 0$. Le vecteur densité de courant est donné par :

$$\vec{J}(\vec{r},t) = \sum_{\nu=1}^{N} q\,\vec{v}_\nu(t)\,\delta^{(3)}(\vec{r}-\vec{r}_\nu(t))\ ,\ \text{où} \quad \vec{r}_\nu(t) = \vec{r}_1(t+\phi_\nu/\omega) \quad \text{et} \quad \vec{v}_\nu(t) = \frac{\mathrm{d}\vec{r}_\nu}{\mathrm{d}t}\ .$$

Réexaminer l'expression de la puissance rayonnée par le système de particules. Démontrer, en utilisant un changement de variable dans les intégrales temporelles, que la puissance rayonnée par unité d'angle solide s'écrit ici :

$$\left\langle\frac{\mathrm{d}\mathscr{P}}{\mathrm{d}\Omega}\right\rangle = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{d}\mathscr{P}_n}{\mathrm{d}\Omega} \quad \text{avec} \quad \frac{\mathrm{d}\mathscr{P}_n}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{\mathrm{d}P_n}{\mathrm{d}\Omega}\times F_n(N)\ , \tag{B5}$$

où $\mathrm{d}P_n/\mathrm{d}\Omega$ est l'expression (B3) déjà obtenue pour la particule 1 et $F_n(N)$ un "facteur de structure" donné par :

$$F_n(N) = \left|\sum_{\nu=1}^{N}\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\phi_\nu}\right|^2\ .$$

**4/** On considère désormais le cas où les $N$ particules sont uniformément distribuées sur le cercle (c'est à dire $\phi_\nu = 2\pi(\nu-1)/N$). Démontrer que :

$$\left\langle\frac{\mathrm{d}\mathscr{P}}{\mathrm{d}\Omega}\right\rangle = N^2\left[\frac{\mathrm{d}P_N}{\mathrm{d}\Omega}+\frac{\mathrm{d}P_{2N}}{\mathrm{d}\Omega}+...\right]\ , \tag{B6}$$

c'est à dire que le rayonnement correspond à un système dont la fréquence fondamentale est $N\omega$. Donner une explication physique simple de ce phénomène.

## B.2 Le cas où $N \to \infty$

Nous allons par la suite étudier l'équation (B6) en nous limitant (pour simplifier les calculs) au cas non relativiste (c'est à dire $\beta = v/c = \omega R/c \ll 1$). La symétrie axiale du problème nous permet de choisir le vecteur $\vec{k}_n$ dans le plan $xOz$. Pour simplifier davantage les calculs nous nous limiterons à étudier la puissance rayonnée dans le plan de l'anneau, à $\theta = \pi/2$. Le vecteur de propagation est alors donné par $\vec{k}_n = (n\omega/c)\,\hat{x}$ et la trajectoire de la particule 1 est :

$$\vec{r}_1(t) = R\cos(\omega t)\,\hat{x} + R\sin(\omega t)\,\hat{y}\ .$$

**1/** Examiner l'expression (B4) qui en résulte pour $\vec{p}_n$. Vérifier que dans la limite $\beta \ll 1$ le développement limité de $\vec{p}_n$ en fonction de $\beta$ démarre avec la puissance $\beta^n$ et calculer explicitement ce terme dominant[1].

**2/** Démontrer ensuite que si $N \gg 1$, alors[2], à l'ordre dominant en $\beta$

$$\left\langle \frac{\mathrm{d}\mathscr{P}}{\mathrm{d}\Omega} \right\rangle_{\theta=\pi/2} \simeq \mathscr{P}_1\, N^3 \left(\frac{e\beta}{2}\right)^{2N}\ , \tag{B7}$$

où l'on exprimera le coefficient $\mathscr{P}_1$ en fonction des données du problème. On vérifiera l'homogénéité de la formule[3].

Discuter enfin la limite $N \to \infty$.

Remarque : le fait que la puissance rayonnée par une distribution homogène dans l'anneau s'annule est vrai quels que soient $\beta$ et la direction d'émission $\theta$. On peut obtenir[4] une expression exacte pour la puissance rayonnée à la fréquence $n\omega$ qui s'exprime à l'aide de fonctions de Bessel. Cette expression exacte s'annule lorsque $N \to \infty$. Et c'est tant mieux, puisqu'une spire parcourue par un courant continu ne rayonne pas.

---

[1] Pour ce faire on utilisera le développement en série du terme impliquant $\beta$ dans l'intégrale apparaissant dans la définition de $\vec{p}_n$.

[2] Pour aboutir à ce résultat on utilisera l'expression approchée de $(N-1)!$ donnée en annexe.

[3] Indication: $[\mu_0]$ = [masse] × [longueur] × [charge]$^{-2}$.

[4] Voir par exemple l'ouvrage "Classical electrodynamics" par J. D. Jackson.

## Annexe

**1/ Problème de rayonnement**: On suit presque exactement la démarche de la section 3 du chapitre II du cours, mais ici on considère des phénomènes exactement périodiques et il est donc approprié de faire un développement en série de Fourier plutôt que d'utiliser des transformées de Fourier. On note $T$ la période de rotation d'un paquet, et $\omega = 2\pi/T$ la pulsation correspondante. Tous les champs sont décomposés en série de Fourier sur les harmoniques de la pulsation principale $\omega$, ainsi on écrit par exemple:

$$\vec{B}(\vec{r},t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \vec{B}_n(\vec{r})\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\omega t} \ , \quad \text{où} \quad \vec{B}_n(\vec{r}) = \frac{1}{T}\int_0^T \mathrm{d}t\, \vec{B}(\vec{r},t)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\omega t} \ . \tag{B8}$$

Toutes les quantités dépendantes du temps admettent un développement similaire. Les formules (II.15) et (II.16) du cours s'écrivent donc ici (on définit $\vec{k}_n = \frac{n\omega}{c}\hat{r}$ où $\hat{r} = \vec{r}/r$ et $n \in \mathbb{Z}$) :

$$\vec{B}_n(\vec{r}) = \mathrm{i}\vec{k}_n \wedge \vec{A}_n(\vec{r}) \ , \quad \vec{E}_n(\vec{r}) = c\, \vec{B}_n(\vec{r}) \wedge \hat{r} \ , \quad \text{où} \quad \vec{A}_n(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_n r}}{r} \int \mathrm{d}^3 r'\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\vec{k}_n\cdot\vec{r}\,'}\, \vec{J}_n(\vec{r}\,') \ . \tag{B9}$$

Pour mémoire, ces expressions ne sont valables que dans la zone de rayonnement, et c'est dans cette région que nous allons travailler durant tout le problème.

• Pour un champ réel qui admet le développement (B8) on a un théorème de Parseval-Plancherel:

$$\frac{1}{T}\int_0^T \mathrm{d}t\, \vec{B}^2(\vec{r},t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|\vec{B}_n(\vec{r})\right|^2 \ , \tag{B10}$$

où le module au carré d'un vecteur complexe est $|\vec{B}_n|^2 = \vec{B}_n \cdot \vec{B}_n^*$: c'est simplement la somme du carré des modules de ses composantes cartésiennes.

**2/ Intégrales utiles**: Pour $m \in \mathbb{Z}$, $\int_0^{2\pi} \mathrm{d}u \exp(\mathrm{i}mu) = 2\pi\delta_{m,0}$. Donc, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $r \in \mathbb{N}$,

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{d}u\; e^{\mathrm{i}nu} (\cos u)^r = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}u\; e^{\mathrm{i}nu} \left(\frac{e^{\mathrm{i}u} + e^{-\mathrm{i}u}}{2}\right)^r = \begin{cases} 0 & \text{si } r < n \ , \\ 2\pi/2^n & \text{si } r = n \ . \end{cases} \tag{B11}$$

**3/ Formule de Stirling**: si $N \gg 1$ alors $(N-1)! \simeq (N/e)^N \sqrt{2\pi/N}$ .