Effet Compton

on a $\boxed{\underset{\sim}{P}'_e = \underset{\sim}{P}_\gamma + \underset{\sim}{P}_e - \underset{\sim}{P}'_\gamma}$ en prenant la pseudo-norme :

$$m^2c^2 = m^2c^2 + \underbrace{2\underset{\sim}{P}_e\cdot(\underset{\sim}{P}_\gamma - \underset{\sim}{P}'_\gamma)}_{2mc(\mathcal{E}_\gamma - \mathcal{E}'_\gamma)\times\frac{1}{c}} - \underbrace{2\underset{\sim}{P}_\gamma\cdot\underset{\sim}{P}'_\gamma}_{\frac{2}{c^2}\mathcal{E}_\gamma\mathcal{E}'_\gamma(1-\cos\theta)}$$

cela conduit à (cf. cours) $\mathcal{E}'_\gamma = \dfrac{\mathcal{E}_\gamma}{1+\alpha(1-\cos\theta)}$ où $\alpha = \mathcal{E}_\gamma / mc^2$

on a également d'après la formule encadrée ci-dessus $\mathcal{E}'_e = \mathcal{E}_\gamma + mc^2 - \mathcal{E}'_\gamma$

donc $\boxed{T'_e = \mathcal{E}'_e - mc^2 = \mathcal{E}_\gamma \dfrac{\alpha(1-\cos\theta)}{1+\alpha(1-\cos\theta)}}$

valeurs extrémales : $T'_e = 0$ obtenue pour $\theta = 0$ = pas de collision

$T'_e = \dfrac{2\alpha}{1+2\alpha}\mathcal{E}_\gamma$ obtenue pour $\theta = \pi$ = collision frontale

(2) on écrit la conservation du vecteur impulsion dans $\mathcal{R}$: $\vec{p}_\gamma - \vec{p}'_\gamma = \vec{p}'_e$

$$\begin{cases} \dfrac{\mathcal{E}_\gamma}{c} - \dfrac{\mathcal{E}'_\gamma}{c}\cos\theta = |\vec{p}'_e|\cos\varphi \quad (\text{selon } Ox) \\ -\dfrac{\mathcal{E}'_\gamma}{c}\sin\theta = |\vec{p}'_e|\sin\varphi \quad (\text{selon } Oy) \end{cases}$$

calcul facile

en faisant le rapport on obtient : $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{\mathcal{E}'_\gamma\sin\theta}{\mathcal{E}'_\gamma\cos\theta - \mathcal{E}_\gamma} = \dfrac{1}{1+\alpha}\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta - 1}$

avec un peu de trigonométrie : $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{-1}{1+\alpha}\operatorname{cotg}\dfrac{\theta}{2}$ (je trouve $\varphi = -59.5^\circ$ si $\theta = 60^\circ$)

(3) on a $\underset{\sim}{P}_{tot} = \underset{\sim}{P}_\gamma + \underset{\sim}{P}_e = \begin{pmatrix} \mathcal{E}_\gamma/c + mc \\ \mathcal{E}_\gamma/c\ \vec{e}_x \end{pmatrix}$ (dans $\mathcal{R}$). $\mathcal{R}^*$ est défini comme le référentiel dans lequel la partie spatiale de $\underset{\sim}{P}_{tot}$ est nulle. En faisant une transf. de Lorentz de $\mathcal{R}$ vers $\mathcal{R}^*$ on aura :

$$\underset{\sim}{P}^*_{tot} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix}\begin{pmatrix} mc(1+\alpha) \\ mc\alpha \end{pmatrix}$$

: pour avoir $\vec{p}^*_{tot} = 0$ il faut $\beta = \dfrac{\alpha}{1+\alpha} = 0.0192$

$\Rightarrow$ on a $\underset{\sim}{P}_e^* = \Lambda \underset{\sim}{P}_e$ où $\underset{\sim}{P}_e = \begin{pmatrix} mc \\ 0 \end{pmatrix}$ soit $\mathcal{E}_e^* = m\gamma c^2$

ici $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \dfrac{1+\alpha}{\sqrt{1+2\alpha}} = 1{,}00018$ donc $\mathcal{E}_e^* \simeq 511$ keV

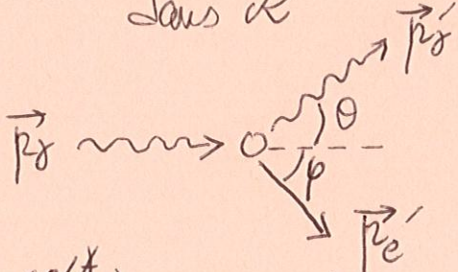
$\Rightarrow \underset{\sim}{P}_\gamma^* = \Lambda \underset{\sim}{P}_\gamma$ où $\underset{\sim}{P}_\gamma = \begin{pmatrix} \mathcal{E}_\gamma/c \\ \mathcal{E}_\gamma/c \end{pmatrix}$ ce qui donne $\boxed{\mathcal{E}_\gamma^* = \gamma(1-\beta)\mathcal{E}_\gamma}$

soit $(\mathcal{E}_\gamma = h\nu)$ $\nu^* = \sqrt{\dfrac{1-\beta}{1+\beta}}\,\nu$

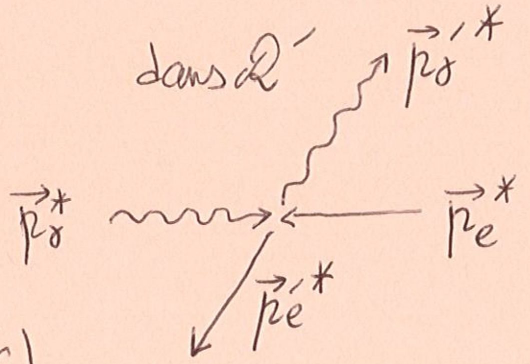
on retrouve la formule de l'effet Doppler longitudinal

$\Rightarrow$ geometrie de la collision :

dans $\mathcal{R}$



dans $\mathcal{R}'$



$$\underset{\sim}{P}_\gamma'^* = \begin{pmatrix} \frac{\mathcal{E}_\gamma'^*}{c} \\ p_{\gamma x}'^* \\ p_{\gamma y}'^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & \\ -\beta\gamma & \gamma & \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{E}_\gamma'/c \\ p_{\gamma x}' \\ p_{\gamma y}' \end{pmatrix}$$

donc $\mathcal{E}_\gamma'^* = \gamma(\mathcal{E}_\gamma' - \beta c\, p_{\gamma x}')$
$= \gamma\mathcal{E}_\gamma'(1-\beta\cos\theta)$

on a vu précedemment que $\mathcal{E}_\gamma' = \dfrac{\mathcal{E}_\gamma}{1+\alpha(1-\cos\theta)}$ et que $\begin{cases} \beta = \dfrac{\alpha}{1+\alpha} \\ \Leftrightarrow \alpha = \dfrac{\beta}{1-\beta} \end{cases}$

cela donne :

$$\mathcal{E}_\gamma'^* = \gamma\mathcal{E}_\gamma \frac{1-\beta\cos\theta}{1+\frac{\beta}{1-\beta}(1-\cos\theta)} = \gamma(1-\beta)\mathcal{E}_\gamma$$

$= \mathcal{E}_\gamma^*$ (cf. la formule encadrée ci-dessus)

On voit donc que dans le ref. du centre de masse, le photon a la m̂ énergie avant ~~la~~ et après la collision. Il en va bien-sûr de m̂ pour l'électron.

Plan chargé

Préliminaire : c'est dans le cours : $\vec{E}(\vec{r},t) = \frac{\gamma q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{r} - \vec{R}(t)}{D^3}$

avec $D = \sqrt{\gamma^2(x - X(t))^2 + (y-Y)^2 + (z-Z)^2}$

les formules de changement de référentiel entre le réf. propre $\mathcal{R}'$ de la charge et le réf. $\mathcal{R}$ du labo donnent ($\vec{B}' \equiv \vec{0}$)

$$\begin{cases} B_x = B'_x \overset{\text{ici}}{=} 0 \\ B_y = \gamma(B'_y - VE'_z/c^2) \overset{\text{ici}}{=} -V\gamma E'_z/c^2 \\ B_z = \gamma(B'_z + VE'_y/c^2) \overset{\text{ici}}{=} V\gamma E'_y/c^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} E_x = E'_x \\ E_y = \gamma(E'_y + VB'_z) \overset{\text{ici}}{=} \gamma E'_y \\ E_z = \gamma(E'_z - VB'_y) \overset{\text{ici}}{=} \gamma E'_z \end{cases}$$

il est alors clair que $\vec{B} = \frac{\vec{V}}{c^2} \wedge \vec{E}$

(2) la charge surfacique dans $\mathcal{R}$ est la m̂ que la charge surfacique dans le réf. propre du plan car celui ci est $\perp$ au déplacement et il n'y a pas de contraction des longueurs transverses.

on a donc $\vec{E}(\vec{r},t) = \frac{\gamma\sigma}{4\pi\varepsilon_0} \iint_{\mathbb{R}^2} dY\,dZ \, \frac{\vec{r} - \vec{R}(t)}{D^3}$

il est clair que $E_y = 0 (= E_z)$ car dans ce cas l'intégrand est impair

il reste :

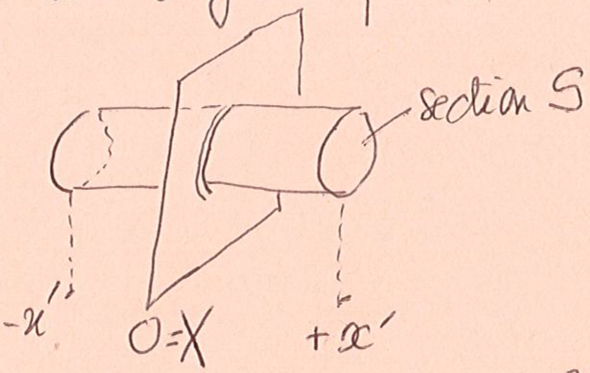
$$E_x = \frac{\gamma\sigma}{4\pi\varepsilon_0} \iint dY\,dZ\, \frac{x - X(t)}{D^3} \overset{\substack{\text{passage en coord.} \\ \text{polaires avec origine} \\ \text{en } (y,z)}}{=} \frac{\gamma\sigma}{4\pi\varepsilon_0}(x - X(t)) \int_0^\infty \frac{2\pi\rho\, d\rho}{[\rho^2 + \gamma^2(x - X(t))^2]^{3/2}}$$

on a $\int_0^\infty \frac{\rho\, d\rho}{(\rho^2 + A^2)^{3/2}} = \left[\frac{-1}{\sqrt{\rho^2 + A^2}}\right]_0^\infty = \frac{1}{|A|}$

on obtient donc $E_x = \frac{\gamma\sigma}{2\varepsilon_0} \frac{x - X(t)}{\gamma|x - X(t)|} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \text{sign}(x - X(t))$.

- si le point $\vec{r}$ est sur le plan, la symétrie de la distribution des sources impose $\vec{E}(\vec{r},t) = 0$. Dans tout l'espace on a $\vec{B}(\vec{r},t) = \vec{V} \wedge \vec{E}(\vec{r},t)/c^2 = \vec{0}$

on peut retrouver le résultat simplement :
dans le référentiel propre du plan on utilise le thm de Gauss avec une surface qui est un cylindre.



le flux sortant de $\vec{E}' = \begin{cases} E'\vec{e_x} & \text{si } x'>0 \\ -E'\vec{e_x} & \text{si } x'<0 \end{cases}$
est

$$2SE' = \frac{S\sigma}{\varepsilon_0}$$

Donc dans le réf. propre du plan $\vec{E}' = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\,\text{sign}(x')\,\vec{e_x}$
ensuite les lois de transformation donnent (j'ai pris $X=0$)

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\,\text{sgn}(x')\,\vec{e_x} \quad \text{où} \quad x' = \gamma(x - Vt)$$

on retrouve bien $\vec{E}(\vec{r},t) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\,\text{sign}(x - Vt)\,\vec{e_x}$

☑ Question 4 :

si maintenant le plan est horizontal $(X,Y)\in\mathbb{R}^2$ et $Z = C^{ste}$
la densité surfacique de charge dans $\mathcal{R}$ vaut $\gamma\sigma$.

En effet il y a une contraction des longueurs selon l'axe Ox
donc $\sigma_{\mathcal{R}} = \frac{Q}{L_X L_Y}$ où $\begin{cases} L_X = L_X^{(0)}/\gamma \\ L_Y = L_Y^{(0)} \end{cases}$ donc la densité surfacique dans $\mathcal{R}$ est : $\sigma_{\mathcal{R}} = \frac{\gamma Q}{L_X^{(0)} L_Y^{(0)}} = \gamma\sigma$

et donc

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \frac{\gamma^2\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\iint_{\mathbb{R}^2} dX\,dY\,\frac{\vec{r}-\vec{R}(t)}{D^3}$$

ici on a $E_x = E_y = 0$ et il reste

formule donnée dans l'énoncé (cf. page suivante)

$$E_z = \frac{\gamma^2\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\iint \frac{dX\,dY\;(z-Z)}{\left[\gamma^2(x-X(t))^2 + (y-Z)^2 + (z-Z)^2\right]^{3/2}} = \frac{\gamma\sigma}{2\varepsilon_0}\,\text{sign}(z-Z)$$

on retrouve ce résultat d'une autre façon : Dans le réf. propre on a : $\vec{E}' = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\,\mathrm{sign}(z-Z)\,\vec{e_z}$ et avec les lois de transformation :

$$\begin{cases} E_x = 0 \\ E_y = 0 \\ E_z = \gamma E'_z \end{cases}$$

on a également : $\vec{B} = \frac{\vec{V}}{c^2} \wedge \vec{E} = -\frac{\mu_0}{2} V \gamma \sigma\,\mathrm{sign}(z-Z)\,\vec{e_y}$

remarque finale : calcul de $J = \iint \frac{dX\,dY}{(\gamma^2 X^2 + Y^2 + A^2)^{3/2}}$ (formule (B3)).

on pose $Z = \gamma X$

alors $J = \frac{1}{\gamma} \iint \frac{dZ\,dY}{(Z^2+Y^2+A^2)^{3/2}} \underset{\text{avec (B1)}}{=} \frac{2\pi}{\gamma |A|}$

et demonstration de (B1) : $\iint \frac{dY\,dZ}{(Z^2+Y^2+A^2)^{3/2}} = 2\pi \int_0^\infty \frac{\rho\,d\rho}{(\rho^2+A^2)^{3/2}} = \frac{2\pi}{|A|}$