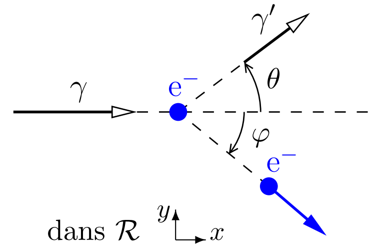
EXAMEN de RELATIVITÉ RESTREINTE

Durée : 2 heures

Tous les documents sont autorisés. Barème approximatif : A = 12 pts ; B = 12 pts.

A Détails de la cinématique de l'effet Compton

Dans le référentiel $\mathcal{R}$ du laboratoire, un photon d'énergie $\mathcal{E}_\gamma$ est envoyé sur un électron au repos. On notera $\alpha = \mathcal{E}_\gamma/mc^2$, m étant la masse de l'électron ($mc^2 = 511$ keV). On fera les applications numériques pour des photons d'énergie $\mathcal{E}_\gamma = 10$ keV (rayons X). La cinématique de la collision dans $\mathcal{R}$ est illustrée sur la figure ci-contre.



1/ Exprimer l'énergie $\mathcal{E}'_\gamma$ du photon diffusé. Montrer que l'énergie cinétique T'_e de l'électron après le choc s'écrit sous la forme

$$T'_e = \mathcal{E}_\gamma \, \frac{\alpha(1-\cos\theta)}{1+\alpha(1-\cos\theta)} \, , \qquad \text{(A1)}$$

où θ est l'angle de diffusion du photon (cf. figure).

Quelles sont les valeurs extrémales de T'_e ? Pour quelles valeurs de θ sont-elles obtenues ? Caractériser les collisions correspondantes.

2/ Soit φ l'angle que fait la direction de l'électron après la collision avec la direction du photon incident (cf. figure). Montrer qu'on a la relation suivante entre les deux angles de diffusion

$$\tan\varphi = K \, \frac{\sin\theta}{1-\cos\theta} \, , \qquad \text{(A2)}$$

où K est un facteur constant qu'on déterminera en fonction de α. Calculer φ si $\theta = 60°$.

3/ On veut maintenant étudier la collision dans le référentiel $\mathcal{R}^*$ du centre de masse.

(a) Comment $\mathcal{R}^*$ est-il défini ? En déduire l'expression de sa vitesse V dans $\mathcal{R}$ en fonction de c et α. On fera un schéma représentant la collision dans $\mathcal{R}^*$ et on donnera la valeur numérique de $\beta = V/c$.

(b) En utilisant la transformation de Lorentz, donner l'expression de l'énergie de l'électron avant la collision dans le référentiel $\mathcal{R}^*$. Faire l'application numérique.

(c) Quelle est l'énergie $\mathcal{E}^*_\gamma$ du photon avant la collision dans le référentiel $\mathcal{R}^*$? Pouvez-vous donner un nom à la formule qui relie $\mathcal{E}^*_\gamma$ à $\mathcal{E}_\gamma$?

(d) Calculer dans $\mathcal{R}^*$ l'énergie du photon après la collision. Montrer que dans le référentiel du centre de masse les énergies du photon et de l'électron ne changent pas au cours de la collision.

B Plan chargé en mouvement

1/ Préliminaire : On considère une charge q ponctuelle en translation rectiligne à la vitesse constante $\vec{v} = v\,\vec{e}_x$ dans le référentiel $\mathcal{R}$ du laboratoire. Les coordonnées cartésiennes dans $\mathcal{R}$ de sa position $\vec{\xi}(t)$ sont

$$\vec{\xi}(t) = \left| \begin{array}{l} X + vt \stackrel{\text{def}}{=} \mathscr{X}(t) \\ Y \\ Z \end{array} \right. \quad , \quad \text{où } X,\, Y \text{ et } Z \text{ sont des constantes réelles.} \tag{B1}$$

(a) En adaptant les résultats de l'exercice III.7 du poly[1], donner sans démonstration l'expression du champ $\vec{E}(\vec{r}, t)$ créé par la charge dans $\mathcal{R}$ (on notera x, y et z les coordonnées cartésiennes de $\vec{r}$).

(b) Exprimer les composantes du champ magnétique dans $\mathcal{R}$. Montrer que $\vec{B}(\vec{r}, t)$ s'exprime simplement en fonction de $\vec{E}(\vec{r}, t)$ et de $\vec{v}$.

2/ On considère maintenant un plan infini uniformément chargé (charge surfacique σ dans son référentiel propre). Le plan est parallèle à yOz et se déplace dans $\mathcal{R}$ à la vitesse constante $\vec{v} = v\,\vec{e}_x$.

(a) Quelle est la charge surfacique dans $\mathcal{R}$?

(b) Pour tous réels A, y et z on a

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \frac{\mathrm{d}Y \mathrm{d}Z}{[A^2 + (y - Y)^2 + (z - Z)^2]^{3/2}} = \frac{2\pi}{|A|} \,. \tag{B2}$$

En utilisant le résultat obtenu dans la question 1/(a), montrer alors que le champ $\vec{E}(\vec{r}, t)$ créé par le plan est de la forme

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = E_0 \, \mathrm{sign}\Big(x - \mathscr{X}(t)\Big)\, \vec{e}_x \,, \quad \text{où} \quad \mathrm{sign}(u) = \frac{u}{|u|} \,. \tag{B3}$$

On donnera l'expression de la constante E_0 en fonction des données du problème et de constantes fondamentales.

(c) Voyez-vous un argument permettant de donner la valeur de $\vec{E}(\vec{r}, t)$ lorsque $x = \mathscr{X}(t)$, c'est à dire en un point du plan en mouvement ?

(d) Que vaut le champ $\vec{B}(\vec{r}, t)$?

3/ L'expression (B3) est particulièrement simple. Retrouvez la rapidement en utilisant le théorème de Gauss. *Indication* : On rappelle que les symétries du problème imposent que $\vec{E}$ soit perpendiculaire au plan et l'admette comme plan de symétrie.

4/ On considère toujours un plan infini uniformément chargé (charge surfacique σ dans son référentiel propre). Il se déplace dans $\mathcal{R}$ toujours à la vitesse constante $\vec{v} = v\,\vec{e}_x$, mais maintenant il est parallèle à xOy. Reprenez les questions 2/ et 3/ ci-dessus. On donne ici

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \frac{\mathrm{d}X \mathrm{d}Y}{[\gamma^2 (x - \mathscr{X}(t))^2 + (y - Y)^2 + A^2]^{3/2}} = \frac{2\pi}{\gamma\,|A|} \,. \tag{B4}$$

[1] La seule différence entre le cas présent et celui considéré dans le poly est que dans le poly on prend $X = Y = Z = 0$.