Tenseur impulsion-énergie

démonstration de (A1) :

$$F_{\mu\rho}\partial^\mu F^\rho{}_\nu = F^{\mu\rho}\underbrace{\partial_\mu F_{\rho\nu}}$$

Bianchi $\hookrightarrow = -\partial_\rho F_{\nu\mu} - \partial_\nu F_{\mu\rho}$ permuta° $\nu \leftrightarrow \mu$ dans 1 des termes

donc

$$F_{\mu\rho}\partial^\mu F^\rho{}_\nu = F^{\mu\rho}\partial_\mu F_{\rho\nu} = \underbrace{F^{\mu\rho}\partial_\rho F_{\mu\nu}} - F^{\mu\rho}\partial_\nu F_{\mu\rho}$$

$-F^{\rho\mu}\partial_\rho F_{\mu\nu}$ (permuta° $\mu \leftrightarrow \rho$)

$= -F^{\mu\rho}\partial_\mu F_{\rho\nu}$

(en échangeant les notations $\mu \leftrightarrow \rho$)

il vient donc

$$\boxed{\begin{aligned} &2F^{\mu\rho}\partial_\mu F_{\rho\nu} = -F_{\mu\rho}\partial_\nu F^{\mu\rho} \\ &\quad\parallel \\ &2F_{\mu\rho}\partial^\mu F^\rho{}_\nu \qquad \text{c'est la formule (A1)} \end{aligned}}$$

* l'expression (A2) est clairement symétrique ($g_{\mu\nu}$ l'est et il n'est pas difficile de s'assurer que $F_{\mu\rho}F^\rho{}_\nu$ l'est également).

- $T_{\mu\nu}$ est invariant de jauge car $F_{\alpha\beta}$ l'est : si $A_\alpha \to A_\alpha + \partial_\alpha G$ $F_{\alpha\beta} = \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha$ est inchangé.

3a/ : calculons la quadri divergence $\partial^\mu T_{\mu\nu}$ et cherchons les conditions sur a et b pour qu'elle s'annule :

(TiE2)

$$\partial^\mu T_{\mu\nu} = a\underbrace{(\partial^\mu F_{\mu\rho})}_{\substack{=0 \text{ en l'absence} \\ \text{de charge d'après} \\ \text{les eqs. de Maxwell}}} F^\rho{}_\nu + a\underbrace{F_{\mu\rho}\partial^\mu F^\rho{}_\nu}_{\substack{-\frac{1}{2}F_{\mu\rho}\partial_\nu F^{\mu\rho} \\ \text{d'après (A1)}}} + b\underbrace{\partial_\nu(F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta})}_{2F_{\alpha\beta}\partial_\nu F^{\alpha\beta}}$$

il vient donc, après un simple changement de notations =

$$\partial^\mu T_{\mu\nu} = \left(2b - \frac{a}{2}\right) F_{\alpha\beta}\partial_\nu F^{\alpha\beta}$$

on doit donc imposer $\boxed{a = +4b}$

3b/ $$T_{00} = a\underbrace{F_{0\rho}F^\rho{}_0}_{= F_{0\rho}F^{\rho 0} = -F_{0\rho}F^{0\rho} = \vec{E}^2/c^2} + \frac{a}{4}\underbrace{F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}}_{2(\vec{B}^2 - \vec{E}^2/c^2)} \quad \text{(vu en cours)}$$

avec les expressions (A23) du cours.

on obtient donc : $$T_{00} = \frac{a}{2}\left(\frac{\vec{E}^2}{c^2} + \vec{B}^2\right)$$

une bonne idee serait de prendre $a = \frac{1}{\mu_0}$ = cela permettant de retrouver le résultat usuel. En tout cas, il faut certainement : $\rightarrow a > 0$

$\rightarrow [a] = \left[\frac{1}{\mu_0}\right]$

PROFIL de RAIE

Préliminaires : $|\Psi(t)\rangle = \sum_n a_n(t)|\varphi_n\rangle$ - $i\hbar\partial_t|\Psi\rangle = \hat{H}|\Psi\rangle$ s'écrit :

$$i\hbar \sum_n \dot{a}_n|\varphi_n\rangle = \sum_n a_n (E_n + \hat{W})|\varphi_n\rangle$$

en écrivant $a_n(t) = c_n(t)\, e^{-iE_nt/\hbar}$ on a : $\dot{a}_n = e^{-iE_nt/\hbar}\left(\dot{c}_n - \frac{iE_n}{\hbar}c_n\right)$
et donc :

$$i\hbar \sum_n \dot{c}_n e^{-iE_nt/\hbar}|\varphi_n\rangle = \sum_n c_n e^{-iE_nt/\hbar}\hat{W}|\varphi_n\rangle$$

en sandwichant à gauche avec $\langle\varphi_m|$ cela donne :

$$i\hbar\, \dot{c}_m e^{-iE_mt/\hbar} = \sum_n c_n \langle\varphi_m|\hat{W}|\varphi_n\rangle e^{-iE_nt/\hbar}$$

c'est l'équation (B2) de l'énoncé. On a $c_m(t=0) = \delta_{i,m}$

Position du problème :

- les longueurs d'onde optiques typiques associées aux transitions entre niveaux électroniques vérifient : $\frac{hc}{\lambda} = h\nu \simeq 1\text{ eV}$

soit $\lambda \simeq \frac{2\pi\hbar c}{1\text{eV}} = 2\pi\frac{200\text{ MeV.fm}}{1\text{eV}} \simeq 10^4\text{ Å} \gg$ rayon de Bohr ($a_0 = 0.53$ Å)

il est donc légitime dans le terme de couplage entre le champ électromagnétique et la position de l'électron de faire $\hat{\vec{A}}(\hat{\vec{r}}) \simeq \hat{\vec{A}}(\vec{0})$.

Ce couplage s'écrit (cf. cours) $W + W'$ avec $W = -\frac{q}{m}\hat{\vec{p}}\cdot\hat{\vec{A}}(\vec{0})$ et $W' = \frac{q^2}{2m}\hat{\vec{A}}^2(\vec{0})$. Comme on suppose que la transition n'est associée qu'à un seul photon, on écarte W' et on ~~g~~ regarde que W avec $\hat{\vec{A}}(\vec{0}) = \sum_\nu \sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0 L^3\omega_\nu}}\,(\hat{a}_\nu + \hat{a}_\nu^+)\vec{\epsilon}_\lambda$ (cf. cours)

(PR2)

- l'état initial est un état où l'électron est sur l'orbitale $|a\rangle$ et il n'y a aucun photon : on le note $|a,0\rangle$.
Dans l'état final l'électron est sur l'orbite $|b\rangle$ et il y a un photon dans l'état $\nu = (\underline{n}, d)$. On le note $|b, 1_\nu\rangle$
l'énergie de cet état est $E_\nu = E_b + \hbar\omega_{\underline{n}}$
où $\omega_{\underline{n}} = c|\vec{k}_{\underline{n}}|$ avec $\vec{k}_{\underline{n}} = \begin{vmatrix} 2\pi n_x/L \\ 2\pi n_y/L \\ 2\pi n_z/L \end{vmatrix}$

Donc l'équivalent de la formule (B1) est, avec notre espace des états :

$$|\Psi(t)\rangle = c_a(t)\, e^{-iE_a t/\hbar} |a,0\rangle + \sum_\nu c_\nu(t)\, e^{-iE_\nu t/\hbar} |b, 1_\nu\rangle$$

où $|b, 1_\nu\rangle = |b\rangle \otimes |1_\nu\rangle$ avec $|1_\nu\rangle = a_\nu^\dagger|0\rangle$. On a également $c_a(t=0) = 1$ et $c_\nu(t=0) = 0$.

- Il suffit maintenant d'écrire la version de (B2) adaptée à notre système en remarquant que $\hat{W}$ ne couple pas les états à 1 photon entre eux : il ne couple que $|a,0\rangle$ avec un état de type $|b, 1_\nu\rangle$. Cela donne :

$$\begin{cases} i\hbar\dot{c}_\nu(t) = c_a(t) \langle b, 1_\nu|\hat{W}|a,0\rangle\, e^{-i(E_a - E_\nu)t/\hbar} \\ i\hbar\dot{c}_a(t) = \sum_\nu c_\nu(t) \langle a,0|\hat{W}|b, 1_\nu\rangle\, e^{-i(E_\nu - E_a)t/\hbar} \end{cases}$$

ici on a également utilisé le fait que $\langle a,0|\hat{W}|a,0\rangle = 0$

méthode de Weisskopf et Wigner :

- $c_a(t)$ est supposé de la forme $c_a(t) = e^{-\gamma t/2}$ avec $\mathrm{Re}(\gamma) > 0$.

à t petit cela donne $|c_a(t)|^2 = e^{-\mathrm{Re}(\gamma)t} \simeq 1 - \mathrm{Re}(\gamma) \times t$

c'est le comportement typique qu'on obtient avec la théorie des perturbations au 1^er ordre (cf. cours).

à t grand $|c_a(t)|^2 \longrightarrow 0$ = physiquement correct, mais $\neq$ du résultat perturbatif.

- on peut insérer l'ansatz pour $c_a(t)$ dans (B4). Dans la première éq. cela donne :

$$i\hbar\, \dot{c}_\nu(t) = \underbrace{\langle b, 1_\nu | \hat{W} | a, 0 \rangle}_{\text{indépendant du temps}} e^{-i(E_a - E_\nu)t/\hbar}\, e^{-\gamma t/2}$$

on peut intégrer avec la condition initiale $c_\nu(t=0) = 0$. Cela donne

$$c_\nu(t) = \frac{1}{i\hbar} \langle b, 1_\nu | \hat{W} | a, 0 \rangle \frac{e^{-i(E_a - E_\nu)t/\hbar}\, e^{-\gamma t/2} - 1}{-i(E_a - E_\nu)/\hbar - \gamma/2}$$

l'autre équation de (B4) s'écrit alors :

$$\dot{c}_a(t) = -\frac{1}{\hbar^2} \sum_\nu |\langle b, 1_\nu | \hat{W} | a, 0 \rangle|^2 \frac{e^{-\gamma t/2} - e^{-i(E_\nu - E_a)t/\hbar}}{-i(E_a - E_\nu)/\hbar - \gamma/2}$$

on a également $\dot{c}_a = -\frac{\gamma}{2} \exp(-\gamma t/2)$ ce qui donne :

$$\gamma = \frac{2}{\hbar^2} \sum_\nu |\langle b, 1_\nu | \hat{W} | a, 0 \rangle|^2 \frac{1 - e^{-i(E_\nu - E_a)t/\hbar}\, e^{\gamma t/2}}{-i(E_a - E_\nu)/\hbar - \gamma/2}$$

soit

$$\boxed{\gamma = \frac{2i}{\hbar^2} \sum_\nu |\langle b, 1_\nu | \hat{W} | a, 0 \rangle|^2 \frac{1 - e^{+i[(E_a - E_\nu)t/\hbar - i\gamma t/2]}}{(E_a - E_\nu)/\hbar - i\gamma/2}}$$

• on passe à la limite continue. On note $E_a - E_b = \hbar \Omega_0$ (PR4)
de sorte que $(E_a - E_b)/\hbar = \Omega_0 - \omega_n$

on a vu en cours que :

$$\langle b, 1_\nu | \hat{W} | a, 0 \rangle = -\frac{q}{m} \underbrace{\langle 1_\nu | \hat{\vec{A}}(\vec{0}) | 0 \rangle}_{\left(\frac{\hbar}{2\varepsilon_0 L^3 \omega_n}\right)^{1/2} \vec{\epsilon}_\lambda} \cdot \underbrace{\langle b | \hat{\vec{p}} | a \rangle}_{-im\Omega_0 \vec{r}_{ba}}$$

donc $$|\langle b, 1_\nu | \hat{W} | a, 0 \rangle|^2 = \frac{q^2 \hbar \Omega_0^2}{2 \varepsilon_0 L^3 \omega_n} (\vec{\epsilon}_\lambda \cdot \vec{r}_{ba})^2$$

on écrit $$\sum_\nu = \sum_n \sum_\lambda = \left(\frac{L}{2\pi}\right)^3 \int d^3k \sum_\lambda = \left(\frac{L}{2\pi}\right)^3 \int_0^\infty k^2 dk \int d^2\Omega_k \sum_\lambda$$

le seul terme dans la somme $\sum_\nu$ qui dépende de la direction de $\vec{k}$ et de la polarisation est l'élément de matrice. Avec la formule (B8) on obtient facilement :

$$\boxed{\left(\frac{L}{2\pi}\right)^3 \int d^2\Omega_k \sum_\lambda |\langle b, 1_\nu | \hat{W} | a, 0 \rangle|^2 = \frac{q^2 \hbar \Omega_0^2 |\vec{r}_{ba}|^2}{6\pi^2 \varepsilon_0 \omega}}$$

il reste encore l'intégrale $\int k^2 dk = \frac{1}{c^3} \int \omega^2 d\omega$. On peut donc écrire la formule encadrée en fin de page précédente sous la forme :

$$\gamma = \frac{i q^2 |\vec{r}_{ba}|^2 \Omega_0^2}{3\pi^2 \hbar \varepsilon_0 c^3} \int_0^\infty \omega \, d\omega \, \frac{1 - e^{i(\Omega_0 - \omega - i\gamma/2)t}}{\Omega_0 - \omega - i\gamma/2}$$

c'est de la forme (B6) avec $F(\omega) = \frac{\omega}{3\pi^2 \Omega_0}$.

Remarque : Notre traitement revient à remplacer l'expression réelle de $\Omega_0 = E_a - E_b$ par $\Omega_0 - i\gamma/2$.

Dans la suite on fera l'hypothèse que $|\gamma| \ll \Omega_0$ de sorte qu'à l'ordre dominant, on peut évaluer γ grâce à (B6) où dans le membre de droite on approxime $\gamma \simeq 0$.

- les approximations suggérées dans l'énoncé permettent d'écrire :

$$\gamma = i \frac{q^2 |\vec{r}_{ab}|^2 \Omega_0^3}{\hbar c^3 \varepsilon_0} \lim_{t\to\infty} \int_0^\infty d\omega\, F(\omega) \frac{1 - e^{i(\Omega_0-\omega)t}}{\omega - \Omega_0}$$

en utilisant la formule (B9) de l'annexe cela donne :

$$\gamma = \frac{q^2 |\vec{r}_{ab}|^2 \Omega_0^3}{\hbar c^3 \varepsilon_0} \Big(\pi F(\Omega_0) + \underbrace{i\, \mathrm{V.P.} \int_0^\infty d\omega \frac{F(\omega)}{\Omega_0 - \omega}}_{} \Big)$$

ce terme correspond à un décalage de la raie que l'on néglige.

$(= \mathrm{Re}(\gamma))$

$$\text{donc } \gamma \simeq \Gamma = \frac{q^2 |\vec{r}_{ab}|^2 \Omega_0^3}{3\pi \hbar c^3 \varepsilon_0} \qquad \left(\text{puisque } \pi F(\Omega_0) = 1/3\pi\right)$$

identique à la formule pour $\Gamma_{a\to b}$ obtenue en cours grâce à une approche perturbative

on peut introduire la constante de structure fine en écrivant $\frac{q^2}{\pi \varepsilon_0} = 4\alpha \hbar c$. Cela donne $\Gamma = \frac{4\alpha}{3} \frac{|\vec{r}_{ab}|^2 \Omega_0^3}{c^2}$

(ce qui permet de vérifier au passage que $[\Gamma] = T^{-1}$ comme il se doit)

on a :

$$\Gamma/\Omega_0 = \frac{4\alpha}{3} |\vec{r}_{ab}|^2 \left(\frac{\hbar \Omega_0}{\hbar c}\right)^2 \approx \frac{1}{137} \times (0.5\,\text{Å})^2 \times \left(\frac{1\,\text{eV}}{200\,\text{MeV.fm}}\right)^2$$

$1\,\text{Å} = 10^5\,\text{fm}$ donc $\Gamma/\Omega_0 \approx \frac{1}{137}\left(\frac{10^5}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2\,10^8}\right)^2 = 4\,10^{-10}$

effectivement $\Gamma \ll \Omega_0$

• On veut connaître la probabilité d'avoir émis un photon dans l'état $|1_\nu\rangle$ à la limite des temps infinis :

c'est $\lim\limits_{t\to\infty} |c_\nu(t)|^2 = \frac{1}{\hbar^2} |\langle b, 1_\nu|\hat{W}|a,0\rangle|^2 \frac{1}{(\omega-\Omega_0)^2+\Gamma^2/4}$

en utilisant l'expression obtenue à la question B3.2/

cette expression est valable lorsque $t \gg \Gamma^{-1}$ de sorte que $\exp(-\Gamma t/2) \simeq 0$

si on ne s'intéresse ni à la direction, ni à la polarisation du photon émis alors (en passant à la limite continue) :

$$dP_\omega = \frac{L^3}{8\pi^3}\int d^2\Omega_k \sum_\lambda \lim_{t\to\infty} |c_\nu(t)|^2 \cdot \frac{\omega^2 d\omega}{c^3}$$

$$dP_\omega = \frac{\omega^2 d\omega}{\hbar^2 c^3[(\omega-\Omega_0)^2+\Gamma^2/4]} \times \underbrace{\frac{L^3}{8\pi^3}\int d^2\Omega_k \sum_\lambda |\langle b,1_\nu|\hat{W}|a,0\rangle|^2}_{\text{déjà calculé} = \frac{q^2\hbar\,\Omega_0^2|\vec{r}_{ba}|^2}{6\pi^2\varepsilon_0\omega} = \frac{\hbar^2c^3}{2\pi}\times\frac{\Gamma}{\omega\Omega_0}}$$

il vient donc $dP_\omega = \frac{\Gamma}{2\pi\Omega_0}\,\frac{\omega\, d\omega}{(\omega-\Omega_0)^2+\Gamma^2/4}$

Comme $\Gamma \ll \Omega_0$ cette ~~intég~~ fonction est très ~~??~~ piquée autour de $\omega \simeq \Omega_0$ et il ~~est légit~~ en va de même pour $I(\omega) = \hbar\omega \frac{dP_\omega}{d\omega}$

on a donc :

$$I(\omega) = \frac{\Gamma}{2\pi\Omega_0}\,\frac{\hbar\omega^2}{(\omega-\Omega_0)^2+\Gamma^2/4} \simeq \frac{\Gamma}{2\pi}\,\frac{\hbar\Omega_0}{(\omega-\Omega_0)^2+\Gamma^2/4}$$

Comme la fonction est très piquée :

$$\int_0^\infty I(\omega)\,d\omega \simeq \int_{-\infty}^{\infty} I(\omega)\,d\omega \underset{\text{avec (B11)}}{=} \hbar\Omega_0$$

: la somme des énergies des photons émis est l'énergie $E_a - E_b$, comme il se doit.