M1 et Magistère 2$^{\text{ème}}$ année 14 janvier 2022

EXAMEN d'ÉLECTRODYNAMIQUE CLASSIQUE et QUANTIQUE

Durée : 3 heures

• *Barème approximatif : A = 7 points ; B = 20 points.*
• *Ne restez pas bloqués sur une question : si vous ne savez pas répondre, admettez le résultat et passez à la suite.*
• *Les calculatrices, les polycopiés et les notes de cours et de travaux dirigés sont autorisés. Des informations utiles pour le problème B sont données en annexe B.4.*
• *Toutes les formules du polycopié de cours peuvent être utilisées sans démonstration, mais on vous demande d'en donner les références.*

A Tenseur impulsion-énergie pour l'électromagnétisme

1/ On considère un champ quadrivectoriel $A^\mu(\vec{r},t)$ et on définit le tenseur de Faraday associé : $F_{\mu\nu}(\vec{r},t) = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$. Montrer (ou admettre) que

$$F_{\mu\rho}\partial^\mu F^\rho{}_\nu = -\frac{1}{2}F_{\mu\rho}\partial_\nu F^{\mu\rho}\ . \tag{A1}$$

Indication : on pourra utiliser les identités de Bianchi sans démonstration.

2/ On cherche le tenseur impulsion-énergie du champ sous la forme générique

$$T_{\mu\nu}(\vec{r},t) = a\,F_{\mu\rho}F^\rho{}_\nu + b\,g_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} \tag{A2}$$

où a et b sont des constantes réelles (des scalaires de Lorentz). Montrer que l'ansatz (A2) est symétrique et invariant de jauge.

3/ On considère désormais le cas de l'électromagnétisme.

(a) Trouver une condition nécessaire et suffisante sur a et b pour qu'en l'absence de source la quadri-divergence du tenseur (A2) soit nulle (on dit que "$T_{\mu\nu}$ est conservé"). On supposera cette condition vérifiée dans ce qui suit.

(b) Exprimer T_{00} en fonction des champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$. Quel doit être le signe de a pour que T_{00} puisse représenter une densité d'énergie ? Pouvez vous intuiter sa valeur ?

B Profil de raie

B.1 Préliminaire

On considère un système quantique régi par le hamiltonien $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{W}$. Le hamiltonien non perturbé $\hat{H}_0$ est indépendant du temps, on note $|\varphi_n\rangle$ ses états propres normalisés à l'unité et E_n les énergies associées ($n \in \mathbb{N}$). Dans le cas générique $\hat{W}$ peut dépendre du temps, mais les résultats de cette section restent valables s'il n'en dépend pas.

Le système est initialement (à $t = 0$) dans un état propre de $\hat{H}_0$ (soit $|\varphi_i\rangle$), et il évolue sous l'effet de $\hat{H}$. Son état est décrit par une fonction d'onde $|\psi(t)\rangle$ solution de $\mathrm{i}\hbar\partial_t|\psi\rangle = \hat{H}|\psi\rangle$. On développe $|\psi(t)\rangle$ sur la base des états propres de $\hat{H}_0$:

$$|\psi(t)\rangle = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n(t)|\varphi_n\rangle \ . \tag{B1}$$

En écrivant $a_n(t) = c_n(t)\exp(-\mathrm{i}E_n t/\hbar)$ montrer que pour tout m on a la relation exacte :

$$\mathrm{i}\hbar\,\dot{c}_m(t) = \sum_{n\in\mathbb{N}} c_n(t)\langle\varphi_m|\hat{W}|\varphi_n\rangle e^{-\mathrm{i}(E_n-E_m)t/\hbar} \ , \tag{B2}$$

où $\dot{c}_m(t)$ désigne la dérivée temporelle de $c_m(t)$. Indiquer quelle est la valeur initiale $c_m(0)$ pour $m = i$ et $m \neq i$.

B.2 Position du problème

On considère un atome d'hydrogène placé au centre d'une boîte cubique vide de côté L. On impose au champ électromagnétique des conditions aux limites périodiques sur cette boîte. Le système est initialement dans le vide du champ électromagnétique. Le proton, infiniment massif, reste immobile à l'origine des coordonnées, et l'électron est initialement sur une orbitale notée $|a\rangle$ (énergie E_a). On étudie sa désexcitation vers un niveau $|b\rangle$ d'énergie $E_b < E_a$.

1/ On suppose que la transition entre les deux états électroniques $|a\rangle$ et $|b\rangle$ est associée à l'émission d'un unique photon.

(a) Justifiez par un raisonnement d'ordre de grandeur simple que l'on peut se placer dans l'approximation dipolaire électrique. Donnez alors l'expression de l'opérateur $\hat{W}$ à insérer dans (B2).
Indication : dans la suite du problème on pourra utiliser sans démonstration le développement du champ $\hat{\vec{A}}(\vec{0}\,)$ en fonction des opérateurs $\hat{a}_\nu$ et $\hat{a}_\nu^\dagger$.

(b) Montrer alors qu'il suffit de restreindre la fonction d'onde du système aux états de la forme

$$|\psi(t)\rangle = c_a(t)e^{-\mathrm{i}E_a t/\hbar}|a,0\rangle + \sum_\nu c_\nu(t)e^{-\mathrm{i}E_\nu t/\hbar}|b,1_\nu\rangle \ , \tag{B3}$$

où on a utilisé les notations du cours. Vous expliquerez ce que représente l'indice ν, comment il caractérise le photon émis et quelles sont les limites de la somme $\sum_\nu$ ci-dessus. Vous expliciterez également les notations $|a,0\rangle$ et $|b,1_\nu\rangle$ et donnerez l'expression de l'énergie E_ν en fonction de E_b et des données du problème. Vous indiquerez enfin les valeurs initales des coefficients $c_a(t=0)$ et $c_\nu(t=0)$.

(c) Déduire de ce qui précède que les coefficients $c_a(t)$ et $c_\nu(t)$ vérifient les équations différentielles couplées

$$\begin{aligned}
\mathrm{i}\hbar\,\dot{c}_\nu(t) &= c_a(t)\,\langle b,1_\nu|\hat{W}|a,0\rangle\exp(-\mathrm{i}(E_a-E_\nu)t/\hbar) \ , \\
\mathrm{i}\hbar\,\dot{c}_a(t) &= \sum_\nu c_\nu(t)\,\langle a,0|\hat{W}|b,1_\nu\rangle\exp(-\mathrm{i}(E_\nu-E_a)t/\hbar) \ .
\end{aligned} \tag{B4}$$

B.3 Méthode de Weisskopf et Wigner

Plutôt que d'utiliser la théorie des perturbations on tente de résoudre directement le système (B4) en cherchant $c_a(t)$ sous la forme

$$c_a(t) = \exp(-\gamma t/2) \ , \tag{B5}$$

où γ est une constante *a priori* complexe, dont la partie réelle est positive, et le facteur 1/2 est purement esthétique.

1/ Justifier que cette expression est correcte aux petites valeurs de t et que, contrairement au résultat de la théorie des perturbations, elle reste physiquement acceptable aux grands temps.

2/ En déduire l'expression de $c_\nu(t)$, puis celle de $\dot{c}_a(t)$ qui fait intervenir une somme sur ν impliquant l'élément de matrice au carré $|\langle b, 1_\nu|\hat{W}|a, 0\rangle|^2$.

3/ Montrer alors que γ doit satisfaire la relation d'auto-cohérence :

$$\gamma = \mathrm{i}\ \frac{q^2|\vec{r}_{ba}|^2\Omega_0^3}{\hbar c^3\varepsilon_0} \int_0^\infty \mathrm{d}\omega\, F(\omega)\ \frac{1 - e^{\mathrm{i}(\Omega_0-\omega-\mathrm{i}\gamma/2)t}}{\omega - \Omega_0 + \mathrm{i}\gamma/2} \ , \tag{B6}$$

où on est passé à la limite continue dans la somme sur ν et on a calculé explicitement l'intégrale angulaire qui en découle, ainsi que la somme sur les polarisations en utilisant la relation (B8)[1]. On a noté $\Omega_0 = (E_a - E_b)/\hbar$ et on a fait apparaître, comme en cours, la quantité $|\vec{r}_{ba}|^2 = |\langle a|\hat{\vec{r}}|b\rangle|^2$. On donnera l'expression de la fonction réelle sans dimension $F(\omega)$ en fonction des données du problème[2].

4/ Si l'on fait l'hypothèse que $|\gamma|$ est petit devant Ω_0, alors on peut remplacer γ par zéro dans le membre de droite de l'expression (B6), ce qu'on fera désormais.

(a) Si notre solution est correcte, le membre de droite de (B6) sera indépendant de t. Le calcul pour tout t est difficile et nous allons nous restreindre à la limite $\Omega_0 t \gg 1$ qui est la plus intéressante pour nous, sans préjuger de la valeur de $|\gamma|t$. Donner alors l'expression de la partie imaginaire et la partie réelle de γ en prenant dans (B6) la limite formelle $t \to \infty$.

(b) On notera $\Gamma = \mathrm{Re}(\gamma)$. Donner son expression explicite en fonction des données du problème. Comparer cette valeur avec celle obtenue en cours pour l'émission spontanée $\Gamma_{a\to b}$.

(c) Pouvez-vous, sans calculer explicitement la valeur principale de Cauchy dans (B9), donner une interprétation physique simple à la quantité $\mathrm{Im}(\gamma)$?

(d) Dans la suite on fera sans justification l'approximation $|\mathrm{Im}(\gamma)| \ll |\mathrm{Re}(\gamma)|$, de sorte que $\gamma \simeq \Gamma \in \mathbb{R}^+$. Vérifier alors que l'hypothèse de départ $\Gamma \ll \Omega_0$ est correcte.
Indication : on pourra faire apparaître la constante de structure fine $\alpha = q^2/(4\pi\epsilon_0\hbar c)$ dont la valeur approchée est $\alpha \simeq 1/137$.

5/ Calculer, aux temps infinis, la probabilité $\mathcal{P}_\nu$ que l'électron soit dans l'état b après avoir émis un photon dans l'état ν. On exprimera cette probabilité en fonction de Γ, ω, Ω_0 et de l'élément de matrice $|\langle b, 1_\nu|\hat{W}|a, 0\rangle|^2$.

---

[1] On ne demande pas de re-démontrer la relation (B8). Pour la bonne gestion des calculs, et pour une utilisation ultérieure dans le sujet, on vous conseille de donner la formule explicite de la quantité $\frac{L^3}{(2\pi)^3}\int \mathrm{d}^2\Omega_k \sum_\lambda |\langle b, 1_\nu|\hat{W}|a, 0\rangle|^2$. On pourra utiliser sans démonstration la valeur de l'élement de matrice donnée dans le cours.

[2] Si vos n'avez pas su répondre à cette question, vous pouvez continuer le problème sans expliciter la fonction $F(\omega)$ et sans connaître la valeur de la constante universelle adimensionnée $F(\Omega_0)$.

(a) On ne s'intéresse ni à la direction, ni à la polarisation du photon émis, et on passe à la limite continue dans la somme $\sum_\nu$. Donnez alors l'expression de la probabilité

$$\mathrm{d}P_\omega = \frac{\omega^2 \mathrm{d}\omega}{c^3} \frac{L^3}{(2\pi)^3} \int \mathrm{d}^2\Omega_k \sum_\lambda \mathcal{P}_\nu$$

d'avoir, aux temps infinis, émis un photon dont la pulsation est comprise dans l'intervalle $[\omega, \omega + \mathrm{d}\omega]$.

(b) On s'intéresse à l'énergie du rayonnement émis, et on définit donc l'intensité spectrale $I(\omega)$ par : $I(\omega)\mathrm{d}\omega = \hbar\omega \mathrm{d}P_\omega$. Montrez que $I(\omega)$ peut se mettre sous la forme d'une lorentzienne :

$$I(\omega) \simeq \frac{C^{\mathrm{ste}}}{(\omega - \Omega_0)^2 + \Gamma^2/4} \ . \tag{B7}$$

Vous expliquerez quelle approximation permet d'arriver à l'expression (B7) et donnerez l'expression de la constante C^{ste} en fonction de Γ, Ω_0 et de constantes fondamentales. Tracez rapidement $I(\omega)$.

(c) Calculez l'énergie totale émise lors du processus de désexcitation en vous plaçant dans la limite $\Gamma \ll \Omega_0$. Commentez.

B.4 Annexe

1/ Pour évaluer certains ordres de grandeur on pourra se souvenir que $\hbar\, c \simeq 200$ MeV.fm et que le rayon de Bohr vaut $a_0 \simeq 0.5$ Å.

2/ Pour tout vecteur $\vec{V}$ on a (en utilisant les notations du cours) :

$$\int \mathrm{d}^2\Omega_k \sum_\lambda (\vec{V} \cdot \vec{\epsilon}_\lambda)^2 = \frac{8\pi}{3} V^2 \ . \tag{B8}$$

3/ Sur un domaine $[a, b]$ qui comprend le point $\omega = \Omega_0$ on a, pour une fonction F régulière en Ω_0 :

$$\lim_{t\to+\infty} \int_a^b \mathrm{d}\omega\, F(\omega) \frac{1 - e^{\mathrm{i}t(\Omega_0 - \omega)}}{\Omega_0 - \omega} = \text{v.p.} \int_a^b \mathrm{d}\omega \frac{F(\omega)}{\Omega_0 - \omega} - \mathrm{i}\pi F(\Omega_0) \ , \tag{B9}$$

où le symbole v.p. désigne la “valeur principale de Cauchy” :

$$\text{v.p.} \int_a^b \frac{F(\omega)}{\Omega_0 - \omega} \mathrm{d}\omega = \lim_{\epsilon\to 0^+} \left(\int_a^{\Omega_0 - \epsilon} \frac{F(\omega)}{\Omega_0 - \omega} \mathrm{d}\omega + \int_{\Omega_0 + \epsilon}^b \frac{F(\omega)}{\Omega_0 - \omega} \mathrm{d}\omega \right) \ . \tag{B10}$$

4/ pour tout Ω_0 réel et tout $\Gamma > 0$ on a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}\omega}{(\omega - \Omega_0)^2 + \Gamma^2/4} = \frac{2\pi}{\Gamma} \ . \tag{B11}$$