Centre d'inertie

dans $\mathcal{R}$ le centre d'inertie est clairement $x_G(t) = 0$.

Dans $\mathcal{R}'$ on utilise une transf. de Lorentz :

$$\begin{pmatrix} ct'_i \\ x'_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct_i \\ x_i \end{pmatrix}$$

avec $i = 0, 1$ ou 2.
($x_1 = \beta c t_1$ et $x_2 = -\beta c t_2$)

pour la particule 1 cela donne : $\begin{cases} t'_1 = \gamma(1-\beta^2)\,t_1 \\ x'_1 = 0 \quad \text{normal} \end{cases}$

on a également :

$t'_2 = \gamma(1+\beta^2)t_2$ et $x'_2 = \gamma(-Vt_2 - Vt_2)$ soit $x'_2 = \dfrac{-2V}{1+\beta^2}\,t'$

$t'_0 = \gamma t_0$ et $x'_0 = \gamma(-Vt_0)$ soit $x'_0 = -V t'$

remarque : on peut retrouver ces résultats en utilisant la formule de composition des vitesses : $v'_x = \dfrac{v_x - V}{1 - v_x V/c^2}$

pour la particule 1 : $v_x = V$ $\quad v'_x = 0$
2 : $v_x = -V$ $\quad v'_x = -2V/1+\beta^2$
0 : $v_x = 0$ $\quad v'_x = -V$

il est clair que si $\beta^2 \neq 0$ alors $x'_0 \neq \dfrac{x'_1 + x'_2}{2}$

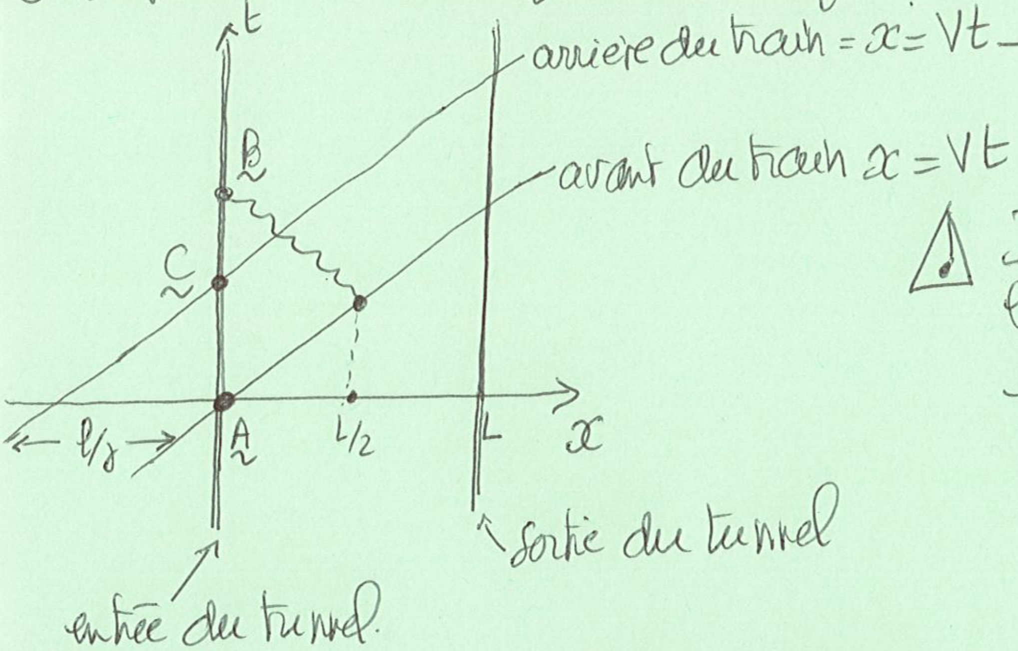
* le centre d'inertie dans $\mathcal{R}'$ n'est pas le même que dans $\mathcal{R}$: ce concept n'est pas pertinent en relativité restreinte.

* par contre en relativité galiléenne on obtiendrait : $x'_2 = -2Vt'$ et alors $x'_0 = \dfrac{x'_1 + x'_2}{2}$ ($\leftarrow$ limite $\beta \ll 1$ de la relation relativiste) et le concept de centre d'inertie est valable.

* remarque culturelle : bien qu'on ne puisse pas définir de centre d'inertie en relativité, on peut néanmoins définir un référentiel du centre de masse !

Train, tunnel et porte

① je prends l'évènement $\underset{\sim}{A}$ comme origine :



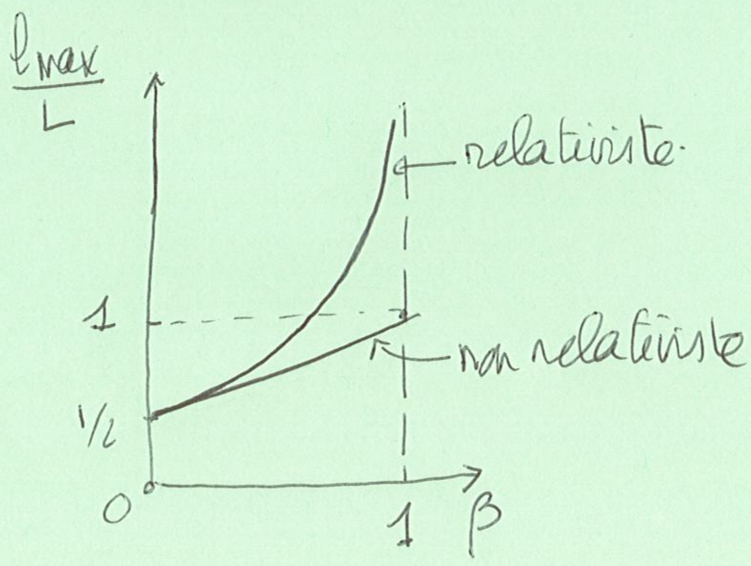
⚠ Dans $\mathcal{R}$ le train a une longueur l/γ = contraction des longueurs.

Dans $\mathcal{R}$ $\underset{\sim}{B}$ a pour coordonnées $x_B = 0$ et $t_B = \frac{L}{2V} + \frac{L}{2c} = \frac{L}{2V}(1+\beta)$

Pour que le train ne soit pas sectionné par la fermeture de la porte il faut $t_B > t_C$ (c'est la situation illustrée sur le graphe ci-dessus)

où $t_C = \frac{l}{V\gamma}$. Il faut donc $\boxed{l < l_{max} = L\gamma \frac{1+\beta}{2}}$

La version non relativiste est obtenue en négligeant le phénomène de contraction des longueurs = prendre $\gamma = 1$ dans la formule ci-dessus on obtient donc :



* les limites $\beta \to 0$ et 1 sont simples à discuter dans le cas non relativiste.

* Dans le cas relativiste lorsque $\beta \to 1$ la contraction des longueurs permet d'avoir $l_{max} \to \infty$

$$\boxed{\mathcal{E} = mc^2}$$

1/ l'impulsion initiale de la particule est nulle.
Pour qu'elle le reste après l'émission des 2 photons il faut que la particule reste au repos dans $\mathcal{R}_0$ (puisque la somme des impulsions des photons est nulle dans $\mathcal{R}_0$).

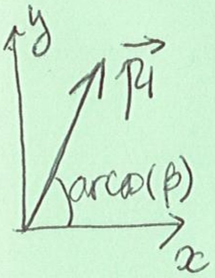
2/ la particule est au repos dans $\mathcal{R}_0$. Elle a donc dans $\mathcal{R}$ une vitesse $\vec{V}$ (la m̂ avant et après l'émission).

on a
$$\begin{pmatrix} \omega/c \\ k_x \\ k_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & \\ \beta\gamma & \gamma & \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_0/c \\ k_{0x} = 0 \\ k_{0y} = \pm \frac{\omega_0}{c} \end{pmatrix}$$

dans $\mathcal{R}$ ↗ ↖ dans $\mathcal{R}_0$

on a donc pour le photon 1 dans $\mathcal{R}$: $\vec{p}_1 = \hbar \vec{k}_1 = \hbar \begin{pmatrix} \beta\gamma \frac{\omega_0}{c} = \beta \omega/c \\ \omega_0/c = \frac{1}{\gamma}\frac{\omega}{c} \end{pmatrix}$ $\begin{matrix} \text{selon } \vec{e}_x \\ \text{selon } \vec{e}_y \end{matrix}$

on a bien $|\vec{p}_1| = \frac{\hbar\omega}{c}\sqrt{\beta^2 + \frac{1}{\gamma^2}} = \frac{\hbar\omega}{c}$



$\vec{p}_1$ fait un angle $\arccos(\beta)$ avec $\vec{e}_x$

$\vec{p}_2$ est le symétrique de $\vec{p}_1$ par rapport à Ox

soit $\vec{p}$ l'impulsion de la particule : $\vec{p} = \frac{M\vec{V}}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$

si la masse de la particule ne change pas, puisque $\vec{V}$ ne change pas on a $\vec{p}_{avant} = \vec{p}_{après}$.

c'est impossible puisque dans $\mathcal{R}$ $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 \neq \vec{0}$

on doit donc avoir : $M\gamma\vec{V} = (M + \Delta M)\gamma\vec{V} + \vec{p}_1 + \vec{p}_2$ $(\hbar\omega_0 = h\nu_0)$

soit : $M\gamma V = (M + \Delta M)\gamma V + 2\beta\gamma\frac{h\nu_0}{c}$

cela donne $\boxed{\Delta M c^2 = -2h\nu_0}$

ce résultat correspond à la conservation de l'énergie dans $\mathcal{R}_0$