PARTIEL de RELATIVITÉ

Durée : 2 heures

Les calculatrices sont autorisées. Barème approximatif : A $\simeq$ 7 pts ; B $\simeq$ 6 pts ; C $\simeq$ 7 pts.

Formulaire – Rappel de cours

Soient $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ deux référentiels inertiels. $\mathcal{R}'$ est animé par rapport à $\mathcal{R}$ d'un mouvement de translation rectiligne uniforme à la vitesse $\vec{V} = V\,\vec{e}_x$.

• Si un quadri-vecteur a pour expressions respectives $\underset{\sim}{A}$ et $\underset{\sim}{A}'$ dans $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$, on a

$$A'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}\,A^{\nu}\ , \quad \text{avec} \quad \Lambda^{\mu}{}_{\nu} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\ , \quad \text{où} \quad \beta = \frac{V}{c} \ \text{ et } \ \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\ . \tag{F1}$$

Pour inverser la relation entre $\underset{\sim}{A}$ et $\underset{\sim}{A}'$ il suffit de changer le signe devant β dans l'expression (F1).

• On rappelle le phénomène de contraction des longeurs : une règle immobile dans $\mathcal{R}'$, de longueur L_0 et portée par l'axe $O'x'$ apparaîtra comme ayant une longeur L_0/γ dans $\mathcal{R}$.

A Le centre d'inertie est-t-il un concept pertinent en relativité ?

Dans un référentiel $\mathcal{R}$ deux particules massiques identiques, initialement situées toutes deux à l'origine, se déplacent selon l'axe Ox avec des vitesses opposées. On note $x_1(t)$ et $x_2(t)$ leurs coordonnées avec $x_1(t) = V\,t = -x_2(t)$ $(V > 0)$.

1/ Donner la coordonnée $x_0(t)$ de leur centre d'inertie dans $\mathcal{R}$.

2/ On travaille désormais dans $\mathcal{R}'$, référentiel propre de la particule 1.

(a) Donner, à un instant t' de $\mathcal{R}'$, les coordonnées $x_1'(t')$ et $x_2'(t')$ des deux particules.

(b) Donner, au même instant, dans $\mathcal{R}'$, la coordonnée $x_0'(t')$ de la transformée de leur centre d'inertie dans $\mathcal{R}$.

3/ Retrouver ces résultats en utilisant la loi relativite de composition des vitesses (que vous démontrerez).

4/ Conclure sur les mérites comparés du concept de centre d'inertie en relativité restreinte et en relativité Galiléenne. Vous pourrez également discuter la notion de "référentiel du centre de masse".

B Train, tunnel et porte...

Un train de longueur ℓ (dans son référentiel propre) se dirige vers un tunnel de longueur L (dans son référentiel propre $\mathcal{R}$) à la vitesse V (mesurée dans $\mathcal{R}$). Un opérateur, au repos dans $\mathcal{R}$, est placé à l'entrée du tunnel, qui est équipé d'une porte. Lorsque le train entre dans le tunnel la porte est ouverte. Lorsque l'avant du train atteint le milieu de tunnel, un signal lumineux est envoyé en direction de l'opérateur qui ferme la porte dès qu'il reçoit le signal.

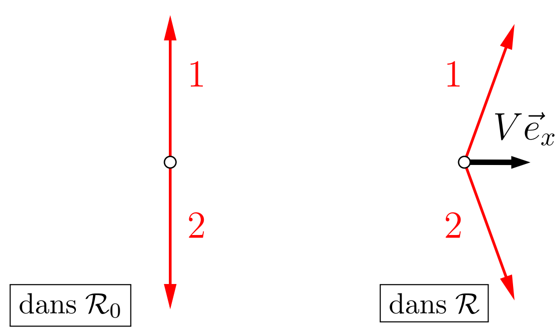
1/ Tracer un diagramme de Minkowski dans $\mathcal{R}$ avec les lignes d'univers : (1) de l'entrée et (2) de la sortie du tunnel, (3) de la tête et (4) de la queue du train, (5) du photon signalant à l'opérateur que la tête du train a atteint le milieu du tunnel. Placer précisément sur le diagramme les évènements $\underset{\sim}{A}$ *"ouverture de la porte"*, $\underset{\sim}{B}$ *"fermeture de la porte"* et $\underset{\sim}{C}$ *"entrée de l'arrière du train dans le tunnel"*.

2/ Déterminer en fonction de L et de $\beta = V/c$ la valeur maximale de la longueur ℓ (soit $\ell_{\max}$) que peut avoir le train sans être sectionné par la fermeture de la porte. Tracer sur un graphique $\ell_{\max}/L$ en fonction de β. Tracer sur ce même graphique la prédiction non relativiste. Discuter les limites $\beta = 0$ et $\beta = 1$ dans le cas non relativiste et dans le cas relativiste.

C Perte de masse

0/ *Question de cours :* On se place dans un référentiel inertiel $\mathcal{R}$. Donner l'expression de l'impulsion[1] relativiste d'une particule de masse m et de vitesse $\vec{v}$. Même question pour un photon de fréquence ν dont la vitesse est portée par un vecteur unitaire $\vec{u}$.

Dans un référentiel $\mathcal{R}_0$ une particule initialement au repos et de masse M, émet deux photons identiques (de fréquence ν_0 dans $\mathcal{R}_0$) dans deux directions opposées (disons $\pm\vec{e}_y$, cf. le schéma).



1/ Montrer que la particule reste au repos dans $\mathcal{R}_0$.

2/ On travaille maintenant dans un référentiel $\mathcal{R}$ dans lequel $\mathcal{R}_0$ se déplace à une vitesse $\vec{V} = V\,\vec{e}_x$.

(a) Quelle est, dans $\mathcal{R}$, la vitesse de la particule avant l'émission ? après l'émission ?

(b) Quelle est la fréquence ν des photons dans $\mathcal{R}$? Quelles sont leurs impulsions dans $\mathcal{R}$? Quels angles font-elles avec l'axe Ox ?

(c) Montrer qu'on ne peut pas satisfaire la conservation de l'impulsion du système dans $\mathcal{R}$ si la masse de la particule ne varie pas lors du processus d'emission.

(d) Exprimer la perte de masse de la particule en fonction de l'énergie des photons (calculée dans $\mathcal{R}_0$).

3/ Montrer que le résultat 2/(d) peut être obtenu simplement en travaillant avec la partie temporelle de la quadri-impulsion totale dans $\mathcal{R}_0$.

[1] Dans tout cet exercice, par "impulsion" on entend "partie spatiale de la quadri-impulsion".