

Fluctuations non-linéaires dans les gaz quantiques à deux composantes

Thèse de doctorat de l'Université Paris-Saclay
préparée à l'Université Paris-Sud

École Doctorale n°564 Physique en Île-de-France
Spécialité du doctorat : Physique

Thèse présentée et soutenue à Orsay, le 29 septembre 2017, par

M. Thibault Congy

Composition du Jury :

M. Frédéric Chevy	Président
Professeur, École Normale Supérieure	
M. Sergey Gavriluk	Rapporteur
Professeur, Aix-Marseille Université (IUSTI)	
M. Frédéric Lagoutière	Rapporteur
Professeur, Université Claude Bernard (ICJ)	
M. Christophe Josserand	Examineur
Directeur de recherche, École Polytechnique (LadHyx)	
Mme Caroline Nore	Examinatrice
Professeure, Université Paris-Sud (LIMSI)	
M. Nicolas Pavloff	Directeur de thèse
Professeur, Université Paris-Sud (LPTMS)	
M. Basile Gallet-de-Saint-Aurin	Invité
Docteur, CEA Saclay (SPEC)	

Remerciements

Je tiens à remercier premièrement mon directeur Nicolas Pavloff. Travailler à ces côtés durant ces trois dernières années fut très agréable et très instructif. Tout au long de ma thèse Nicolas a su être très pédagogue avec moi et m'intéresser à différents projets et je le remercie infiniment pour cela.

Je tiens aussi à remercier Anatoly Kamchatnov avec qui ce fut un réel plaisir de travailler. J'ai bénéficié lors de nos collaborations de son immense savoir et de sa très grande sympathie. Je souhaite aussi remercier Victor Fleurov et Shimshon Bar-Ad avec qui j'ai pu travailler sur un projet expérimental très stimulant.

J'exprime ma gratitude à Sergey Gavrilyuk et Frédéric Lagoutière pour avoir accepté de rapporter ma thèse et pour nos discussions très intéressantes. Je souhaite aussi témoigner ma reconnaissance à Frédéric Chevy, Christophe Josserand, Caroline Nore et Basile Gallet pour leur participation à mon jury de thèse et pour leurs remarques très instructives.

Je tiens à remercier les membres permanents du LPTMS. Ces trois dernières années se sont déroulées dans les meilleures conditions possibles et je remercie le laboratoire pour cet accueil très chaleureux. Je tiens particulièrement à remercier Claudine Le Vaou pour son aide et sa bienveillance tout au long de ma thèse ainsi que Christophe Texier pour ses conseils avisés et sa sympathie. Je souhaite aussi remercier tous mes camarades du laboratoire et notamment mes collègues et très bons amis Ricardo, Stefano et Aurélien qui ont contribué à la très bonne ambiance régnant dans notre bureau et avec qui ce fut un bonheur de discuter de physique.

Je remercie très chaleureusement mes parents, mon frère et ma sœur ainsi que mes amis de longue date Alexis, Kevin, Gabriel et Samuel qui ont toujours été là pour moi et qui m'ont soutenu durant toutes ces années.

Table des matières

Remerciements	v
Table des matières	vii
Liste des articles	ix
Introduction	1
1 Condensat à deux composantes	5
1 Dynamique du condensat	7
1.a Équations de Gross-Pitaevskii	7
1.b Miscibilité des condensats	9
1.c Couplage cohérent	13
1.d Un nouveau type de soliton	17
2 Dynamique de polarisation	22
2.a Notations de Madelung	22
2.b Spectre de Bogoliubov	24
2.c Conclusion	27
2 Condensat de spineurs en présence de couplage Rabi	29
1 Propagation des excitations	33
1.a Un système multi-phasé	33
1.b Spectre de Bogoliubov	34
1.c Propagation d'un paquet d'onde	37
2 Analyse multi-échelle	39
2.a L'exemple du pendule pesant	39
2.b Coordonnées <i>lentes</i> – <i>rapides</i>	41
2.c Ordre linéaire	43
2.d Ordre quadratique : propagation à la vitesse de groupe	44
2.e Ordre cubique : effets non-linéaires	46
3 Discussion	50
3.a Soliton-enveloppes	50
3.b Instabilité modulationnelle	51
3.c Résonance onde longue - onde courte	53
3.d Génération de seconde harmonique	54
3.e Conclusion	55
Article 1 : Nonlinear waves in coherently coupled Bose-Einstein condensates	57

3	Excitations magnétiques dans les condensats à deux composantes	77
1	Équation de Landau-Lifshitz	80
1.a	Vecteur de polarisation	80
1.b	Équation de Landau-Lifshitz sans dissipation	81
2	Solutions périodiques	82
2.a	Intégration <i>finite-gap</i>	83
2.b	Ondes cnoïdales	88
3	Limite hydrodynamique	92
3.a	Invariants de Riemann	92
3.b	Solution en <i>onde simple</i>	93
4	Ondes de choc dispersives	101
4.a	Théorie de Whitham	102
4.b	Solution en onde simple	106
4.c	Choc <i>mixte</i>	112
4.d	Cas général	117
4.e	Conclusion	121
	Article 2 : Dispersive hydrodynamics of nonlinear polarization waves in two-component Bose-Einstein condensates	123
	Article 3 : Evolution of initial discontinuities in the Riemann problem for the Kaup-Boussinesq equation with positive dispersion	154
	Article 4 : Solution of the Riemann problem for polarization waves in a two-component Bose-Einstein condensate (pré-publication)	167
	Conclusion	193
A	Distributions de Thomas-Fermi	195
1	Condensat à deux composantes	195
2	En présence de couplage Raman $\Omega \neq 0$	197
2.a	État non-polarisé : $\rho_{\uparrow} = \rho_{\downarrow}$	198
2.b	État polarisé : $\rho_{\uparrow} > \rho_{\downarrow}$	198
B	Schémas numériques	201
1	Schéma explicite	203
1.a	Méthode d'Euler	203
1.b	Méthode de Runge-Kutta (ordre 4)	204
2	Schéma de Crank-Nicolson	205
C	Article 5 : Spontaneously formed autofocusing caustics in a confined self-defocusing medium	207
	Bibliographie	217
	Résumé	230

Liste des articles

Article 1 T. CONGY, A. M. KAMCHATNOV, et N. PAVLOFF, “Nonlinear waves in coherently coupled Bose-Einstein condensates”, *Phys. Rev. A* **93**, 043613 (2016)

Article 2 T. CONGY, A. M. KAMCHATNOV, et N. PAVLOFF, “Dispersive hydrodynamics of nonlinear polarization waves in two-component Bose-Einstein condensates”, *SciPost Phys.* **1**, 006 (2016)

Article 3 T. CONGY, S. K. IVANOV, A. M. KAMCHATNOV, et N. PAVLOFF, “Evolution of initial discontinuities in the Riemann problem for the Kaup-Boussinesq equation with positive dispersion”, *Chaos* **27**, 083107 (2017)

Article 4 S. K. IVANOV, A. M. KAMCHATNOV, T. CONGY et N. PAVLOFF, “Solution of the Riemann problem for polarization waves in a two-component Bose-Einstein condensate”, pré-publication (arXiv : 1709.04193)

Article 5 M. KARPOV, T. CONGY, Y. SIVAN, V. FLEUROV, N. PAVLOFF, et S. BARAD, “Spontaneously formed autofocusing caustics in a confined self-defocusing medium”, *Optica* **2**, 1053 (2015)

Introduction

Depuis son observation initiale dans l'hélium II à 2.172K par J. F. Allen et A. D. Misener [2] et P. Kapitza [3], jusqu'à son observation dans les condensats de polaritons à température ambiante [4], la superfluidité continue de fasciner les hommes par sa phénoménologie incroyable. Grâce à la découverte expérimentale des superfluides en 1938, il était enfin possible d'observer le comportement des fluides non visqueux et d'étudier expérimentalement leur comportement¹. En 1995 la réalisation expérimentale de la condensation de Bose-Einstein d'atomes de rubidium par le groupe de E. Cornell et C. Wieman [1] au JILA, et d'atomes de sodium par le groupe de W. Ketterle [6] au MIT (suivi de la condensation d'atomes de Lithium [7, 8]) a permis de franchir une étape supplémentaire dans l'étude des fluides quantiques : ce gaz, dont les atomes résident dans le même état quantique en deçà d'une certaine température², constitue un très bon superfluide dont les interactions entre atomes peuvent être contrôlées par résonance de Feshbach. Dans ces expériences, le refroidissement par laser n'était pas suffisant pour atteindre les températures et les densités nécessaires pour la condensation de Bose-Einstein et il fut nécessaire d'utiliser le refroidissement par évaporation³. La mise en oeuvre expérimentale de la condensation de Bose-Einstein constitue un vrai tour de force et fut récompensée par le prix Nobel de physique en 2001, décerné à C. Wieman et E. Cornell, et W. Ketterle pour leurs expériences sur les atomes de rubidium et de sodium. À température nulle et pour un gaz suffisamment dilué, la dynamique du condensat de Bose-Einstein peut être traitée par une théorie de champ classique (cf. approximation d'Hartree au Chapitre 1); le champ de vitesse du superfluide $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ est alors décrit par l'équation de Gross-Pitaevskii (présentée ici sous la forme dite de Madelung) :

$$\partial_t \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\nabla P \quad \text{avec} \quad P = g\rho - \frac{1}{2} \frac{\nabla^2 \sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho}}, \quad (1)$$

1. cf. les vidéos intemporelles de A. Leitner sur l'hélium superfluide [5].

2. On réalise ainsi dans les vapeurs atomiques ultra-froides un excellent condensat de Bose-Einstein, dans lequel la fraction d'atomes non condensée est très faible, alors que pour l'hélium 4 cette fraction non condensée est de l'ordre de 90% à température nulle.

3. initialement mis en oeuvre pour les atomes d'hydrogène [9]. Cette technique est connue par les consommateurs de thé ou de soupe qui en soufflant sur leur boisson débarrassent le liquide des ces molécules les plus énergétiques et diminuent par conséquent la température du fluide.

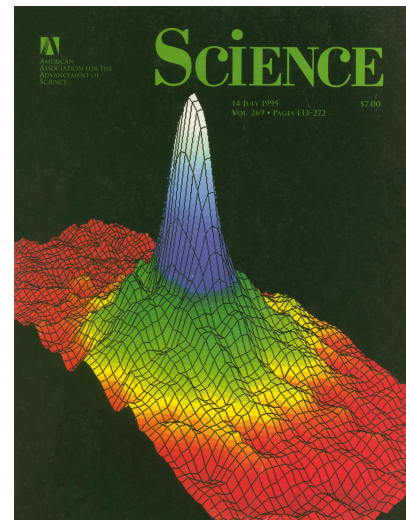


FIGURE 1 – L'expérience du JILA [1] fait la couverture de Science en 1995. ©1995, AASS

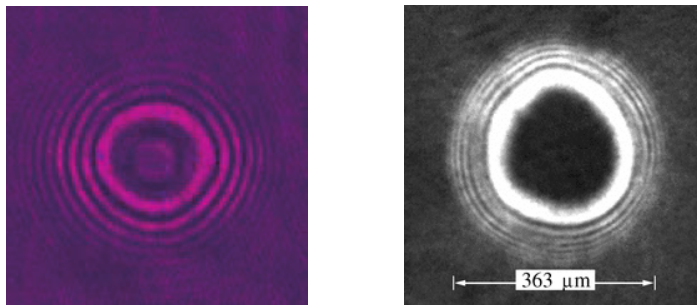


FIGURE 2 – À gauche : propagation d’une onde de choc radiale à travers un milieu optique non-linéaire, cf. la Ref. [10] ©2007, Nature – à droite : propagation d’une onde de choc radiale à travers un condensat, cf. la Ref. [11] ©2006, APS

où $\rho(\mathbf{r}, t)$ est la densité d’atomes du condensat⁴ et g un coefficient constant décrivant l’interaction entre les atomes constituant le condensat. L’équation (1) correspond à l’équation d’Euler d’un fluide compressible irrotationnel de pression P et de viscosité nulle⁵.

L’équation de Gross-Pitaevskii, dérivée en 1961 indépendamment par E. P. Gross [14] et L. P. Pitaevskii [15] pour les condensats de Bose-Einstein, joue un rôle fondamental en physique et décrit de façon effective de nombreux phénomènes allant de la modulation des ondes de gravité en mécanique des fluides (cf. e.g. les Refs. [16–18] et le Chapitre 2) à la propagation d’un champ électrique en optique non-linéaire (cf. e.g. les Refs. [19, 20] et la Fig. 2); on parlera dans ces différents contextes d’équation non-linéaire de Schrödinger. La dérivation de E. P. Gross et L. P. Pitaevskii est remarquable : il existe un fluide dont les paramètres d’ordre (ici la densité et la vitesse du condensat) obéissent directement à cette équation non-linéaire, et le condensat de Bose-Einstein constitue un laboratoire naturel pour étudier la dynamique d’un fluide décrit par l’Eq. (1). La phénoménologie de cette équation est considérable et de nombreux effets ont été observés expérimentalement dans les condensats de Bose-Einstein tels que : la propagation de phonons de densité, la propagation de solitons [21, 22] et d’ondes de choc dispersives [11, 23] ou encore que la création de vortex [13, 24] (cf. la Fig. 3), représentatifs respectivement de la superfluidité, de la non-linéarité et du caractère dispersif ainsi que du caractère irrotationnel de l’équation (1). De par son universalité, l’équation de Gross-Pitaevskii fait encore l’objet de nombreux travaux théoriques fondamentaux : on citera par exemple le développement récent de la turbulence intégrable [25, 26] rendu possible par son observation dans les fibres optiques non-linéaires [27]. Plus particulièrement, au même titre que d’autres équations dispersives fondamentales telles que l’équation de Korteweg-de Vries [28, 29] ou l’équation de Landau-Lifshitz (cf. le Chapitre 3), l’équation (1) est intégrable à une dimension [30] par la méthode de diffusion inverse et la dynamique du condensat peut être résolue exactement. On montrera notamment que la dynamique à une dimension d’un condensat de **spineurs** décrit, sous certaines conditions, d’autres systèmes intégrables; le condensat de Bose-Einstein constitue dès lors le système idéal pour étudier ces différents **systèmes intégrables**.

4. À température nulle le condensat est entièrement superfluide et simplement décrit par son champ de densité ρ et de vitesse v ; le système d’équations est fermé par l’équation de conservation : $\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho v) = 0$.

5. Bien que cette équation ne contienne aucun terme dissipatif, elle contient un terme dispersif aussi appelé terme de pression quantique. Au même titre que la viscosité dans pour les fluides classiques, ce terme possède une importance capitale et régularise les différentes singularités se développant dans l’équation d’Euler sans dispersion [12].

Le développement de la condensation de Bose-Einstein a rapidement été suivi par la réalisation expérimentale de la condensation sur différents niveaux hyperfins de l'atome de rubidium par le groupe du JILA en 1997 [31] et de l'atome de sodium en 1998 par le groupe du MIT [32]. Théoriquement l'étude de la condensation sur différents états quantiques constituait le prolongement naturel des expériences réalisées en 1995 [33] : la réalisation expérimentale de ces condensats permettrait ainsi d'étudier un mélange de superfluides couplés à travers les **interactions entre atomes** mais aussi à travers un **Hamiltonien effectif sur les différents états hyperfins**. Les travaux présentés dans cette thèse porteront plus spécifiquement sur les condensats de Bose-Einstein **à deux composantes**. Ce modèle à deux niveaux permet notamment d'étudier les effets d'un couplage cohérent entre deux superfluides comme le couplage Rabi [34] ou plus récemment le couplage spin-orbite [35]. Cette condensation à deux composantes a été reproduite dans de nombreuses expériences avec deux états hyperfins atomiques [24, 36–45], avec deux isotopes différents du même atome [46, 47], ou encore avec deux espèces atomiques différentes [48–56].

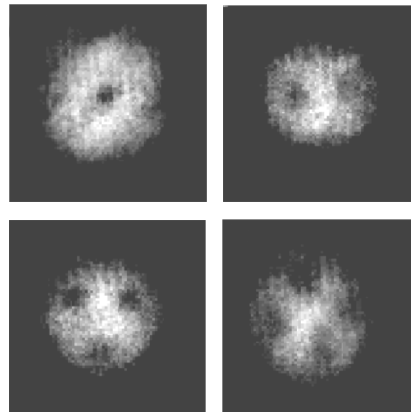


FIGURE 3 – Nucléation de vortex dans les condensats de Bose-Einstein (cf. la Ref. [13]). ©2000, APS

Bien que les résultats présentés par la suite aient été dérivés dans le but de décrire la dynamique des condensats à deux composantes, il existe une analogie formelle entre l'évolution des condensats à deux niveaux dans la configuration **à une dimension** et l'évolution d'un champ électrique à travers une **fibres optique non-linéaire**. À titre d'exemple, en étudiant la propagation du champ électrique \mathbf{E} composé de deux ondes planes modulées suivant :

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} \left(E_1(t, z) e^{-i\omega_1 t} + E_2(t, z) e^{-i\omega_2 t} \right) \mathbf{e}_\perp + \text{c. c.}, \quad (2)$$

avec ω_1 et ω_2 deux pulsations différentes, \mathbf{e}_z la direction de la fibre optique et $\mathbf{e}_\perp \cdot \mathbf{e}_z = 0$, on peut montrer que les enveloppes $E_1(t, z)$ et $E_2(t, z)$ sont solutions d'équations de Gross-Pitaevskii couplées, de façon similaire à un mélange de deux condensats de Bose-Einstein (cf. e.g. la Ref. [57]). Ces équations sont appelées dans ce contexte équations non-linéaires de Schrödinger vectorielles. Le paquet d'onde (2) se propage selon l'axe z et le temps t est alors interprété comme la coordonnée spatiale des équations de Gross-Pitaevskii. Les fibres optiques non-linéaires et plus généralement l'optique non-linéaire constituent un domaine très riche, et d'autres configurations permettent de réaliser une dynamique régie par des équations non-linéaires de Schrödinger couplées. On peut citer ici de manière très analogue à la situation illustrée par l'équation (2) la propagation d'une onde lumineuse à travers les fibres optiques (non-linéaires) biréfringentes pour laquelle les composantes du champ électrique selon l'axe ordinaire et l'axe extraordinaire sont solutions d'équations non-linéaires de Schrödinger couplées.

Chapitre 1

Condensat à deux composantes

Sommaire

1	Dynamique du condensat	7
1.a	Équations de Gross-Pitaevskii	7
1.b	Miscibilité des condensats	9
1.c	Couplage cohérent	13
1.d	Un nouveau type de soliton	17
2	Dynamique de polarisation	22
2.a	Notations de Madelung	22
2.b	Spectre de Bogoliubov	24
2.c	Conclusion	27

Les expériences du groupe de E.A. Cornell [31] et du groupe de W. Ketterle [32] ont rapidement mené à l’observation expérimentale de nouvelles structures non-linéaires à l’intérieur d’un condensat telles que : la formation de domaine de spin [37, 58], la nucléation de vortex [34], de soliton gris [59] et de structure hybride comme un *vortex-soliton* [60]. L’ajout d’un nouveau degré de liberté interne a permis alors d’étudier des phénomènes intrinsèques à la qualité spinorielle du condensat comme : la brisure spontanée de la symétrie interne du condensat [61], un effet de Josephson interne [62, 63], ou encore la création de courant permanent de spin [64]. Plus récemment, la mise en place de champs de jauge effectifs [65–67] a permis le développement d’une interaction spin-orbite pour la condensation de Bose-Einstein [35, 68, 69], ouvrant la perspective d’un nouveau domaine de recherche (cf. le Chapitre 2).

Dans ce chapitre on s’attachera à présenter la dynamique de champ moyen des condensats à deux composantes et plus particulièrement leur dynamique quasi-unidimensionnelle (quasi-1D). La condensation de deux espèces soulève la question de la **miscibilité** à laquelle on répondra en étudiant les distributions stationnaires de Thomas-Fermi. On présentera ensuite des phénomènes typiques associés au degré de liberté spinoriel et notamment les effets liés au couplage cohérent entre les deux espèces. Finalement on verra qu’il existe une représentation plus naturelle pour décrire ces systèmes. On calculera dans cette nouvelle représentation le spectre de Bogoliubov des excitations pour un condensat dans son état fondamental et on montrera que la dynamique du système peut être séparée au niveau linéaire en deux modes d’évolution différents.

Dorénavant on suppose que les atomes constituant le condensat sont distribués selon **deux états quantiques**¹ que l'on dénote par les vecteurs : $|\uparrow\rangle \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $|\downarrow\rangle \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Bien que le point de vue adopté ici soit quantique, cette séparation en deux niveaux peut être adaptée dans le cas de l'optique non-linéaire : $|\uparrow\rangle$ et $|\downarrow\rangle$ représentent par exemple dans le cas décrit par l'équation (2) aux composantes du champ électrique suivant $e^{-i\omega_1 t}$ et $e^{-i\omega_2 t}$ respectivement. On suppose de plus que le condensat est confiné de façon radiale (selon les axes y et z) et *faiblement* confiné de façon longitudinale (selon l'axe x) et on étudiera sa dynamique selon l'axe des x : cette configuration est appelée **configuration quasi-1D**². On pourrait étudier ici plus simplement un système à deux niveaux dont la dynamique est à une dimension spatiale *stricto sensu* (e.g. la propagation d'un champ électrique à travers une fibre optique non-linéaire qui n'est pas confiné selon son axe de propagation), mais on préférera décrire dans toute la suite un système comparable aux expériences réalisées sur les condensats à deux composantes.

Dans un premier temps l'Hamiltonien à une particule H_0 considéré est simplement constitué de l'énergie cinétique d'un atome et du potentiel de confinement V :

$$H_0 = \begin{pmatrix} \frac{p^2}{2m} + V(\mathbf{r}) & 0 \\ 0 & \frac{p^2}{2m} + V(\mathbf{r}) \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad V(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}m\omega_{\parallel}^2 x^2 + \frac{1}{2}m\omega_{\perp}^2 (y^2 + z^2), \quad (1.1)$$

et la configuration quasi-1D est obtenue pour un confinement choisi tel que : $\omega_{\parallel} \ll \omega_{\perp}$. Ce critère devient plus complexe en présence d'interactions (cf. la Ref. [70]) et on peut montrer que le régime quasi-1D est atteinte pour $N_i\omega_{\parallel}a_i/\omega_{\perp}a_{\perp} \ll 1$ avec N_i le nombres d'atomes dans la composante i et a_i la longueur de diffusion en onde s associée (cf. la Section 1.a). La dynamique du condensat selon les axes y et z peut être intégrée séparément de sa dynamique selon x dans le cas d'un confinement radial et les détails du confinement sont alors entièrement contenus dans la description des interactions entre particules (cf. section suivante). On suppose que c'est le cas par la suite et on étudiera la dynamique du condensat simplement selon l'axe des x .

On introduit par ailleurs la longueur et le temps caractéristiques du confinement harmonique longitudinal :

$$a_{\parallel} = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_{\parallel}}} \quad \text{et} \quad t_{\parallel} = \frac{1}{\omega_{\parallel}}, \quad (1.2)$$

afin de normaliser x et t :

$$\boxed{t \rightarrow t/t_{\parallel} \quad \text{et} \quad x \rightarrow x/a_{\parallel}} \quad (1.3)$$

qui revient à considérer dans les équations de Gross-Pitaevskii la normalisation $\hbar = m = \omega_{\parallel} = 1$; plus généralement les énergies seront exprimées en quanta d'énergie de l'oscillateur harmonique : $E_{\parallel} = \hbar\omega_{\parallel}$. On privilégie ici cette normalisation afin de comparer les effets non-linéaires de la dynamique des condensats aux effets linéaires bien connus de la mécanique quantique à un corps ; plus particulièrement ici a_{\parallel} correspond à l'extension spatiale caractéristique de la fonction d'onde solution de l'équation de Schrödinger à une dimension avec potentiel harmonique. D'autres normalisations sont possibles : notamment en absence de potentiel confinant où une des longueur caractéristique de la dynamique est la longueur de cicatrisation $\xi = \hbar/\sqrt{mg\rho_0}$, où g correspond au coefficient non-linéaire décrivant l'intensité de l'interaction entre atomes et ρ_0 la densité moyenne du condensat.

1. représentant de façon équivalente deux niveaux hyperfins atomiques, deux isotopes atomiques ou encore deux espèces atomiques différentes.

2. Du fait de son confinement radial, le condensat quasi-1D possède une forme d'ellipsoïde aussi appelée dans la littérature : condensat *en forme de cigare* (cf. e.g. la Ref. [32]).

1. Dynamique du condensat

1.a. Équations de Gross-Pitaevskii

On ne réitérera pas ici la dérivation de la dynamique de champs moyen du condensat présente dans de nombreux ouvrages et on présentera ici simplement les équations. Pour la dérivation de la dynamique à deux composantes on peut se référer aux revues [71, 72] ou à l'ouvrage [73] (et dans le cas des fibres optiques [57]). Proche de la température nulle les corrélations entre atomes peuvent être négligées et l'évolution du condensat peut être décrit à l'aide d'une théorie de champ classique³ (ou théorie de champs moyen). Dans cette approche, tous les atomes sont dans un même état quantique décrit par une fonction d'onde $\psi(x, t)$, et l'état du système est décrit par la fonction d'Hartree :

$$|\Psi\rangle = |1 : \psi\rangle \times |2 : \psi\rangle \times \cdots \times |N : \psi\rangle . \quad (1.4)$$

Le système décrivant ici deux niveaux, on introduit les fonctions d'onde :

$$\psi_{\uparrow}(x, t) \in \mathbb{C} \quad \text{et} \quad \psi_{\downarrow}(x, t) \in \mathbb{C} , \quad (1.5)$$

où $|\psi_{\uparrow}|^2$ représente la densité d'atomes dans l'état $|\uparrow\rangle$, et $|\psi_{\downarrow}|^2$ la densité d'atomes dans l'état $|\downarrow\rangle$. Le système conservant le nombre total d'atomes N , les fonctions d'ondes sont **normalisées** telles que :

$$\int dx \left(|\psi_{\uparrow}|^2 + |\psi_{\downarrow}|^2 \right) = N . \quad (1.6)$$

On peut introduire comme paramètre d'ordre le **spineur de rang deux** :

$$\Psi(x, t) = \begin{pmatrix} \psi_{\uparrow} \\ \psi_{\downarrow} \end{pmatrix} = \psi_{\uparrow} |\uparrow\rangle + \psi_{\downarrow} |\downarrow\rangle , \quad (1.7)$$

et il est commun de décrire le système comme un **condensat de spineurs**. On utilise ici sans distinction les notations (1.5) et (1.7) pour caractériser l'état du condensat. Dans une théorie de champ moyen la dynamique est simplement décrite par la donnée de la fonctionnelle d'énergie (cf. e.g. la Ref. [73]) :

$$\boxed{E[\Psi] = E_0[\Psi] + E_{\text{int.}}[\Psi]} \quad (1.8)$$

L'énergie est séparée ici en deux contributions⁴ :

- une contribution provenant de l'Hamiltonien à **une particule** H_0

$$E_0[\Psi] = \underbrace{\frac{1}{2} \int dx |\partial_x \Psi|^2}_{E_{\text{cin.}}} + \underbrace{\int dx V(x) \Psi^\dagger \Psi}_{E_{\text{pot.}}} \quad \text{avec} \quad V(x) = \frac{x^2}{2} , \quad (1.9)$$

où Ψ^\dagger est le vecteur adjoint de Ψ ; $E_{\text{cin.}}$ et $E_{\text{pot.}}$ correspondent respectivement à l'énergie cinétique et l'énergie potentielle des atomes.

3. L'adjectif *classique* correspond ici au fait que le champ décrivant le système n'est pas quantifié; bien que sa description soit scalaire, le condensat de Bose-Einstein reste un gaz quantique et certains effets décrits par la théorie de Gross-Pitaevskii comme la superfluidité sont quantiques.

4. On rappelle ici que l'énergie est ici exprimée en unité $E_{//} = \hbar\omega_{//}$.

- une contribution due à l'énergie **d'interaction** :

$$E_{\text{int.}} = \int dx \left(\frac{g_{\uparrow\uparrow}}{2} |\psi_{\uparrow}|^4 + \frac{g_{\downarrow\downarrow}}{2} |\psi_{\downarrow}|^4 + g_{\uparrow\downarrow} |\psi_{\uparrow}|^2 |\psi_{\downarrow}|^2 \right), \quad (1.10)$$

où les termes $\propto |\psi_{\uparrow}|^4$ et $\propto |\psi_{\downarrow}|^4$ représentent les interactions pour les atomes dans le même état quantique et le terme $\propto |\psi_{\uparrow}|^2 |\psi_{\downarrow}|^2$ les interactions pour les atomes dans des états quantiques différents.

On a utilisé ici l'approximation de gaz *dilué* pour exprimer l'énergie d'interaction du condensat. Dans cette approximation, les interactions sont considérées comme des interactions de contact dont l'intensité est gouvernée par les différents paramètres g_i . Par abus de langage ces coefficients sont appelés les *coefficients non-linéaires*. Ils sont exprimés en fonction des longueurs de diffusion de la collision élastique intra-espèce en onde s : $a_{\uparrow\uparrow}$ et $a_{\downarrow\downarrow}$, et de la longueur de diffusion de la collision élastique inter-espèce en onde s : $a_{\uparrow\downarrow}$. À 3 dimensions, ces coefficients s'expriment sous la forme dimensionnée

$$g_i^{3D} = \frac{4\pi\hbar^2 a_i}{m} \quad \text{avec } i \in \{\uparrow\uparrow, \downarrow\downarrow, \uparrow\downarrow\}. \quad (1.11)$$

Dans le cas où le condensat est confiné radialement, les coefficients non-linéaires sont égaux après intégration à $2\hbar\omega_{\perp} a_i$ (cf. la Ref. [74]) et on peut définir des coefficients non-linéaires adimensionnés par :

$$g_i = 2 \frac{\omega_{\perp}}{\omega_{\parallel}} \frac{a_i}{a_{\parallel}}, \quad i \in \{\uparrow\uparrow, \downarrow\downarrow, \uparrow\downarrow\}. \quad (1.12)$$

De façon intuitive, la relation (1.12) montre que plus les atomes sont confinés radialement (augmentation du ratio $\omega_{\perp}/\omega_{\parallel}$), plus les interactions entre atomes sont intenses. La discussion de l'expression des coefficients non-linéaires est importante d'un point de vue expérimental et montre que l'intensité des interactions dépend de la géométrie du condensat. D'un point de vue plus formel, la dynamique du condensat ne dépend que du rapport entre les coefficients g_i c.à.d. du rapport entre les longueurs de diffusion a_i . En effet il suffit dans les équations de la dynamique (1.14) de normaliser les fonctions ψ_i par $\sqrt{g_{\uparrow\uparrow}}$ pour montrer que la dynamique ne dépend que de $a_{\downarrow\downarrow}/a_{\uparrow\uparrow}$ et $a_{\uparrow\downarrow}/a_{\uparrow\uparrow}$.

L'équation d'évolution pour le spineur $\Psi(x, t)$ est alors obtenue en imposant la stationnarité de l'action⁵ :

$$\delta \left(-i \int dt \int dx \left(\Psi^{\dagger} \partial_t \Psi \right) + \int dt E[\Psi] \right) = 0, \quad (1.13)$$

qui est respectée pour des champs ψ_{\uparrow} et ψ_{\downarrow} solutions des **équations de Gross-Pitaevskii** :

$$\boxed{i \frac{\partial \psi_{\uparrow}}{\partial t} = \frac{\delta E}{\delta \psi_{\uparrow}^*} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \psi_{\uparrow}}{\partial x^2} + V(x) \psi_{\uparrow} + g_{\uparrow\uparrow} |\psi_{\uparrow}|^2 \psi_{\uparrow} + g_{\uparrow\downarrow} |\psi_{\downarrow}|^2 \psi_{\uparrow}} \quad (1.14a)$$

$$\boxed{i \frac{\partial \psi_{\downarrow}}{\partial t} = \frac{\delta E}{\delta \psi_{\downarrow}^*} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \psi_{\downarrow}}{\partial x^2} + V(x) \psi_{\downarrow} + g_{\downarrow\downarrow} |\psi_{\downarrow}|^2 \psi_{\downarrow} + g_{\uparrow\downarrow} |\psi_{\uparrow}|^2 \psi_{\downarrow}} \quad (1.14b)$$

La ressemblance des équations (1.14a) et (1.14b) avec deux équations de Schrödinger n'est pas anodine et provient directement de l'approche de champ moyen utilisée ici. En effet

5. Cette dérivation est équivalente à celle de l'équation de Schrödinger linéaire dans le problème à une particule (où $E_{\text{int.}} = 0$).

on peut considérer dans cette approche que chaque atome dans l'état $|\uparrow\rangle$ (resp. $|\downarrow\rangle$) est sensible au potentiel de confinement $V(x)$ et au potentiel *effectif* : $g_{\uparrow\uparrow}|\psi_{\uparrow}|^2 + g_{\uparrow\downarrow}|\psi_{\downarrow}|^2$ (resp. $g_{\downarrow\downarrow}|\psi_{\downarrow}|^2 + g_{\uparrow\downarrow}|\psi_{\uparrow}|^2$) créé par son interaction avec les autres atomes. La forme de la fonctionnelle d'énergie (1.8) garantit la conservation de l'énergie $E[\Psi]$ [pour Ψ solution de (1.14a) et (1.14b)] mais aussi la conservation du nombre d'atome dans les différents états quantiques

$$N_{\uparrow}[\Psi] = \int dx |\psi_{\uparrow}|^2 \quad \text{et} \quad N_{\downarrow}[\Psi] = \int dx |\psi_{\downarrow}|^2 . \quad (1.15)$$

Remarque 1.1. Les équations de Gross-Pitaevskii couplées peuvent être dérivées en optique non-linéaire, on parle alors d'équations **non-linéaires de Schrödinger**. On reprend à titre d'exemple la propagation d'un champ électrique composée de 2 ondes planes à l'intérieur d'une fibre optique non-linéaire [cf. l'Eq. (2)]. La dynamique des enveloppes $E_1(t, z)$ et $E_2(t, z)$ est obtenue en résolvant l'équation de Helmholtz du champ électrique en considérant l'approximation paraxiale⁶ :

$$\frac{\partial E_1}{\partial z} + \beta_{11} \frac{\partial E_1}{\partial t} + i \frac{\beta_{21}}{2} \frac{\partial^2 E_1}{\partial t^2} + \frac{\alpha}{2} E_1 = i\gamma_1 (|E_1|^2 + 2|E_2|^2) E_1 , \quad (1.16)$$

l'équation sur E_2 s'obtient en permutant les indices 1 et 2, cf. la Ref. [57]. On choisit de présenter ici cette configuration car l'équation de propagation de l'onde est atypique : ici le temps t correspond à la coordonnée spatiale x de l'équation de Gross-Pitaevskii (1.14a). β_{11}^{-1} correspond à la vitesse de groupe du paquet d'onde et β_{21} appelé paramètre GVD (*Group Velocity Dispersion*) qui est relié à la courbure de la relation de dispersion du paquet d'onde. Le paramètre β_{21} , correspondant à l'opposé de la masse dans l'équation de Gross-Pitaevskii, peut être ici positif (régime dit normal) ou négatif (régime dit anormal) et dépend de la longueur d'onde de la porteuse. De même le coefficient de non-linéarité γ_1 dépend de la longueur d'onde. Dans cette configuration à *deux ondes porteuses* le coefficient non-linéaire inter-espèce est fixé et correspond au double du coefficient intra-espèce. Ce n'est pas nécessairement le cas pour d'autres configurations : par exemple les fibres optiques non-linéaires biréfringentes présentent des coefficients intra et inter-espèce différents qui dépendent du type de fibre utilisée. De manière générale $g_{\uparrow\uparrow}$ et $g_{\downarrow\downarrow}$ sont appelés dans ce contexte coefficients de *single phase modulation* ou SPM et $g_{\uparrow\downarrow}$ coefficient de *cross phase modulation* ou XPM. Le système étant dissipatif, l'équation (1.16) présente un terme de perte caractérisé par le coefficient α .

Les résultats dérivés dans cette thèse sont principalement obtenues à partir de l'étude de la dynamique des équations de Gross-Pitaevskii (1.14). Au vu de l'équation (1.16), ces résultats sont transposables à l'optique non-linéaire dans la limite où les mêmes approximations sur les coefficients non-linéaires sont respectées.

1.b. Miscibilité des condensats

Dans les travaux présentés ultérieurement on considère que les interactions entre atomes sont répulsives, c.à.d. que les coefficients non-linéaires sont définis tels que :

$$g_{\uparrow\uparrow} > 0 , \quad g_{\downarrow\downarrow} > 0 , \quad g_{\uparrow\downarrow} > 0 . \quad (1.17)$$

De façon similaire aux condensats à une composante, cette restriction assure ici qu'il n'y ait pas effondrement des condensats (cf. e.g. les Refs. [75, 76]).

6. Dans cette approximation, on néglige $\frac{\partial^2 E_1}{\partial z^2}$ par rapport à $\frac{\partial^2 E_1}{\partial t^2}$ dans l'équation de propagation du champ électrique.

Dans le cas présent où l'interaction entre les deux composantes est répulsive, la coexistence spatiale des deux espèces \uparrow et \downarrow n'est pas nécessairement assurée comme le montrent les travaux expérimentaux sur la condensation dans deux états hyperfins de l'atome de ^{87}Rb [38, 42, 44] ou sur deux espèces atomiques différentes [46, 51]. En effet, la répulsion inter-espèces peut être *suffisamment forte* pour qu'il soit énergétiquement favorable au système de voir ces deux composantes spatialement séparées [cf. la définition de l'énergie d'interaction dans la limite de champ moyen (1.10)]. La valeur de champ moyen pour limite de miscibilité sur le coefficient non-linéaire inter-espèces peut être dérivée analytiquement de différentes façons [33, 77–79]. On suit ici la dérivation proposée dans la référence [73] dans le cas d'un condensat à deux composantes sans confinement. Définissons l'énergie du condensat quand les deux espèces sont miscibles [cf. l'Eq. (1.10)] :

$$E_{\text{mis.}} = \frac{g_{\uparrow\uparrow}}{2} \frac{N_{\uparrow}^2}{L} + \frac{g_{\downarrow\downarrow}}{2} \frac{N_{\downarrow}^2}{L} + g_{\uparrow\downarrow} \frac{N_{\uparrow}N_{\downarrow}}{L}, \quad (1.18)$$

où L est le *volume*⁷ occupé par le condensat, et l'énergie du condensat quand les deux espèces sont immiscibles :

$$E_{\text{imm.}} = \frac{g_{\uparrow\uparrow}}{2} \frac{N_{\uparrow}^2}{L_{\uparrow}} + \frac{g_{\downarrow\downarrow}}{2} \frac{N_{\downarrow}^2}{L_{\downarrow}}, \quad (1.19)$$

où L_{\uparrow} et L_{\downarrow} sont les volumes occupés par les condensats d'atomes dans l'état $|\uparrow\rangle$ et dans l'état $|\downarrow\rangle$ respectivement ; le volume total du condensat dans cette situation est aussi égal à L : $L_{\uparrow} + L_{\downarrow} = L$. À l'équilibre mécanique les deux volumes L_{\uparrow} et L_{\downarrow} respectent :

$$\frac{\partial E_{\text{imm.}}}{\partial L_{\uparrow}} = \frac{\partial E_{\text{imm.}}}{\partial L_{\downarrow}} \Leftrightarrow g_{\uparrow\uparrow} \frac{N_{\uparrow}^2}{L_{\uparrow}^2} = g_{\downarrow\downarrow} \frac{N_{\downarrow}^2}{L_{\downarrow}^2}, \quad (1.20)$$

et l'énergie du condensat peut être réécrite entièrement en fonction de son volume total L :

$$E_{\text{imm.}} = \frac{g_{\uparrow\uparrow}}{2} \frac{N_{\uparrow}^2}{L} + \frac{g_{\downarrow\downarrow}}{2} \frac{N_{\downarrow}^2}{L} + \sqrt{g_{\uparrow\uparrow}g_{\downarrow\downarrow}} \frac{N_{\uparrow}N_{\downarrow}}{L}. \quad (1.21)$$

En comparant $E_{\text{mis.}}$ et $E_{\text{imm.}}$, on remarque alors que la phase **miscible** du condensat à deux composantes est énergétiquement favorable quand :

$$g_{\uparrow\downarrow} \leq \sqrt{g_{\uparrow\uparrow}g_{\downarrow\downarrow}} \quad (1.22)$$

En présence d'un potentiel confinant, le critère de miscibilité devient plus complexe et le condensat peut présenter un profil immiscible même si la condition (1.22) est respectée. Afin d'illustrer cet effet, on va dériver les distributions stationnaires des atomes dans les états $|\uparrow\rangle$ et $|\downarrow\rangle$ dans le cadre de **l'approximation de Thomas-Fermi** : dans ce régime l'énergie cinétique est négligeable devant l'énergie d'interaction et l'énergie de confinement des particules, et on peut négliger dans les équations de Gross-Pitaevskii le terme dispersif $\propto \partial_x^2$. Dans le régime quasi-1D, cette approximation est bien vérifiée dans la limite où (cf. la Ref. [70]) :

$$\left(N_i \sqrt{\frac{\omega_{\perp}}{\omega_{\parallel}}} \frac{a_i}{a_{\parallel}} \right)^{1/3} \gg 1. \quad (1.23)$$

La dérivation des distributions stationnaires du condensat devient alors relativement aisée à déterminer et les calculs sont présentés dans l'Annexe A. On présente ici les distributions stationnaires $|\psi_{\uparrow}|^2$ et $|\psi_{\downarrow}|^2$ pour un choix des ordres de grandeur des longueurs de diffusion a_i raisonnables pour des expériences sur les atomes de rubidium :

7. On suppose que la dynamique est figée selon les directions y et z .

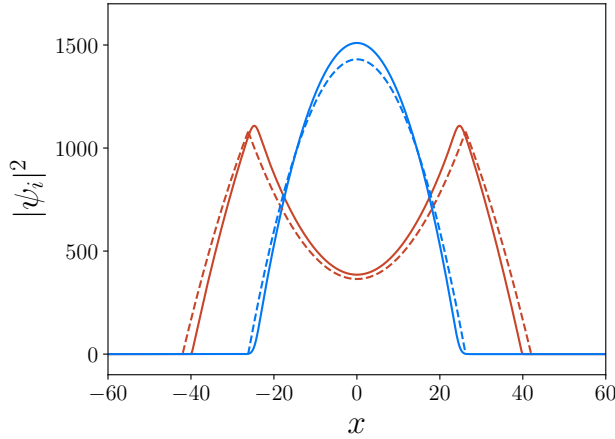


FIGURE 1.1 – Distributions stationnaires des atomes dans l'état $|\uparrow\rangle$ en rouge et $|\downarrow\rangle$ en bleu dans un piège harmonique $(\omega_{\parallel}, \omega_{\perp}) = 2\pi \times (1, 500)$ Hz pour un choix de paramètres $a_{\downarrow\downarrow} < a_{\uparrow\downarrow} < a_{\uparrow\uparrow}$ avec $N_{\uparrow} = N_{\downarrow} = 5 \times 10^4$. Les distributions en trait plein (—) correspondent à la résolution numérique des équations stationnaires de Gross-Pitaevskii (1.14) et en trait pointillé (--) les distributions de Thomas-Fermi déterminées dans l'Annexe A.

- $(a_{\uparrow\uparrow}, a_{\downarrow\downarrow}, a_{\uparrow\downarrow}) = (102a_0, 99a_0, 100a_0)$ représenté dans la figure 1.1,
- $(a_{\uparrow\uparrow}, a_{\downarrow\downarrow}, a_{\uparrow\downarrow}) = (102a_0, 101a_0, 100a_0)$ représenté dans la figure 1.3,

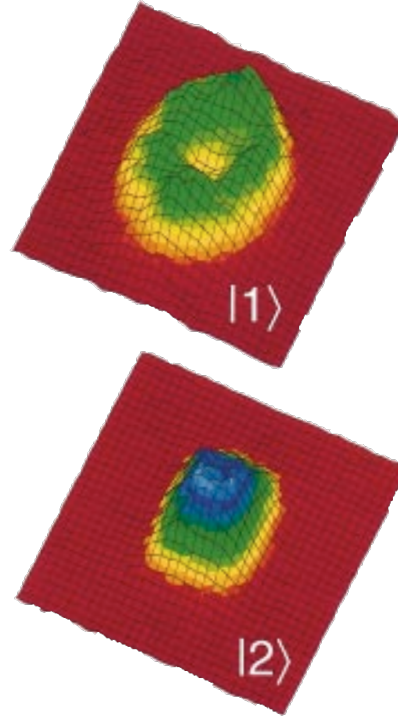
où a_0 est le rayon de Bohr⁸. Dans ces deux situations, le critère (1.22) de miscibilité en absence de potentiel est bien rempli : on a $a_{\uparrow\uparrow}a_{\downarrow\downarrow} - a_{\uparrow\downarrow}^2 > 0$. Cependant, en présence d'un potentiel confinant, on remarque dans la figure 1.1 que la configuration $a_{\downarrow\downarrow} < a_{\uparrow\downarrow}$ présente une quasi-séparation de phases et il se forme par répulsion entre les deux espèces un *puits* pour la composante $|\uparrow\rangle$ (pour laquelle $a_{\uparrow\uparrow} > a_{\downarrow\downarrow}$). De plus, cette configuration de puits stable d'après l'analyse stationnaire des équations de Gross-Pitaevskii, n'est pas stable en pratique. Observée initialement dans l'expérience [38] (cf. la Fig. 1.2), les deux composantes finissent par se séparer entièrement ; à noter ici que l'expérience [38] ne correspond pas à la même géométrie que celle étudiée ici et que cette expérience réalise une condition d'immiscibilité *stricte* $a_{\uparrow\uparrow}a_{\downarrow\downarrow} - a_{\uparrow\downarrow}^2 < 0$.

Dans le cas $a_{\uparrow\downarrow} < a_{\downarrow\downarrow} < a_{\uparrow\uparrow}$, les interactions intra-espèce sont dominantes et les deux composantes peuvent coexister comme le montrent les distributions de Thomas-Fermi dans la figure 1.3. Au contraire du cas précédent, les distributions stationnaires représentées dans la Fig. 1.3 sont bien stables expérimentalement comme le montrent l'expérience du groupe de P. Engels [45] où les deux espèces peuvent coexister pendant plusieurs secondes (cf. la Fig. 1.4). Bien que l'approximation de Thomas-Fermi ne permette pas de décrire la dynamique du condensat dans le régime $a_{\downarrow\downarrow} < a_{\uparrow\downarrow} < a_{\uparrow\uparrow}$ (cf. expérience [38]), elle constitue une très bonne approximation dans le régime miscible ; de façon plus formelle, les distributions de Thomas-Fermi sont en très bon accord avec la résolution numérique des équations de Gross-Pitaevskii stationnaires dans la limite (1.23) (cf. les Figs. 1.1 et 1.3). Une étude extensive des distributions stationnaires dans les condensat à deux composantes est présentée dans les références [80, 81].

Par la suite les résultats seront dérivés pour un condensat à deux composantes dans sa phase **miscible** : $a_{\uparrow\downarrow} < a_{\downarrow\downarrow} < a_{\uparrow\uparrow}$ [dans le cas $a_{\downarrow\downarrow} = a_{\uparrow\uparrow}$, cette condition se confondra trivialement avec (1.22)]. Plus généralement, il a été montré que la séparation des deux condensats peut être contrôlée par résonance de Feshbach (cf. e.g. les Refs. [44, 46, 82]). Comme le montre l'encart de la figure 1.3, les distributions $|\psi_{\uparrow}|^2$ et $|\psi_{\downarrow}|^2$ sont uniformes au centre du potentiel harmonique dans le régime miscible. Cette relative uniformité est

8. Le choix des valeurs ne correspond à aucune réalisation expérimentale particulière et est simplement motivé par l'illustration de l'immiscibilité induite par le confinement.

FIGURE 1.2 – Formation d'un puits dans un condensat de deux états hyperfins de l'atome de ^{87}Rb réalisé dans la Ref. [38] avec $N_{\uparrow} = N_{\downarrow} = 2.5 \times 10^5$ dans une situation $a_{\downarrow\downarrow} < a_{\uparrow\downarrow} < a_{\uparrow\uparrow}$ (avec cependant ici un régime immiscible stricte $a_{\uparrow\uparrow}a_{\downarrow\downarrow} - a_{\uparrow\downarrow}^2 < 0$). Les distributions des atomes dans $|1\rangle = |\uparrow\rangle$ et $|2\rangle = |\downarrow\rangle$ sont représentées ici à $t = 30\text{ms}$ et se séparent entièrement pour des temps plus longs. On peut remarquer que la composante \uparrow pour laquelle $a_{\uparrow\uparrow} > a_{\downarrow\downarrow}$ présente bien ici le défaut d'atomes. ©1998, APS

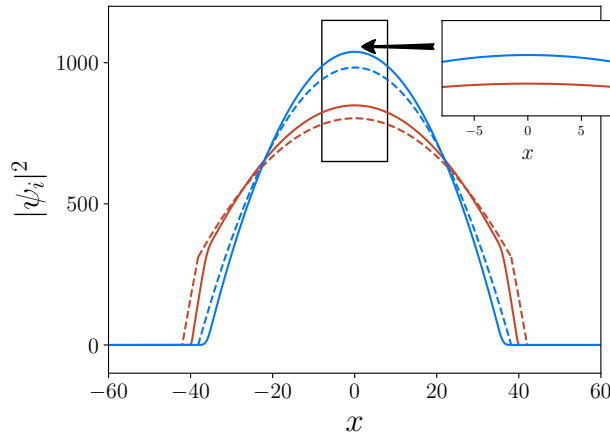


une caractéristique de la distribution de Thomas-Fermi et on peut considérer en général que le condensat en forme de cigare constitue un très bon modèle de condensat uniforme à une dimension. Dès lors les équations de Gross-Pitaevskii seront étudiées, hormis mention contraire, sans potentiel confinant :

$$V(x) = 0, \quad (1.24)$$

et le condensat *au repos* sera décrit par deux distributions uniformes. Il est important ici de mentionner que la détermination des distributions de Thomas-Fermi et notamment de l'extension typique du condensat à une dimension conserve une importance capitale pour deux raisons. La première présentée précédemment correspond à la modification de la condition de miscibilité (1.22). La seconde correspond à la validité de l'approximation $V \approx 0$. En

FIGURE 1.3 – Distributions stationnaires des atomes dans l'état $|\uparrow\rangle$ (en rouge) et $|\downarrow\rangle$ (en bleu) dans un piège harmonique décrit dans la Fig. 1.1 pour un choix de paramètres $a_{\uparrow\downarrow} < a_{\downarrow\downarrow} < a_{\uparrow\uparrow}$. Les distributions en trait plein correspondent à la résolution numérique des équations stationnaires de Gross-Pitaevskii (1.14) et en trait pointillé les distributions de Thomas-Fermi déterminées dans l'Annexe A. L'encart représente un agrandissement des distributions pour $x \in [-7; 7]$ (x est exprimé en unité a_{\parallel}).



effet cette approximation d'uniformité reste valide si les phénomènes étudiés possèdent une extension spatiale inférieure à la largeur de la distribution 1.3. On verra notamment dans le Chapitre 3 que les excitations du mode de polarisation d'extension typique de $[(\sqrt{g_{\uparrow\uparrow}g_{\uparrow\uparrow}} - g_{\uparrow\downarrow})\rho_0]^{-1/2}$ (en unité adimensionnée) et deviennent de largeur comparable à celle du condensat proche du régime immiscible (1.22); l'étude et le développement de ces phénomènes expérimentalement dans les condensats quasi-1D n'est possible que dans le cas où la distribution de Thomas-Fermi est suffisamment large⁹.

1.c. Couplage cohérent

i. Oscillations Rabi

Un des attraits principaux de la condensation sur deux niveaux est la possibilité de coupler les deux espèces de façon cohérente. À titre d'exemple on considère un condensat à deux composantes dont on a levé la dégénérescence entre les deux niveaux par effet Zeeman et auquel on applique un champ radio-fréquence (r.f.) pour coupler de façon cohérente les deux niveaux du condensat. Quand la pulsation du champ $\omega_{r.f.}$ est proche de la différence énergétique ω_Z entre les deux niveaux, un transfert d'atomes d'un état à l'autre peut s'effectuer. Dans cette limite, la dynamique de champ moyen du condensat s'écrit à l'aide de l'approximation du champ tournant¹⁰ (*rotating wave approximation* en anglais) :

$$i \frac{\partial \psi_{\uparrow}}{\partial t} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \psi_{\uparrow}}{\partial x^2} + g_{\uparrow\uparrow} |\psi_{\uparrow}|^2 \psi_{\uparrow} + g_{\uparrow\downarrow} |\psi_{\downarrow}|^2 \psi_{\uparrow} - \frac{\Omega(t)}{2} e^{i\omega_{r.f.}t} \psi_{\downarrow}, \quad (1.25a)$$

$$i \frac{\partial \psi_{\downarrow}}{\partial t} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \psi_{\downarrow}}{\partial x^2} + g_{\downarrow\downarrow} |\psi_{\downarrow}|^2 \psi_{\downarrow} + g_{\uparrow\downarrow} |\psi_{\uparrow}|^2 \psi_{\downarrow} + \omega_Z \psi_{\downarrow} - \frac{\Omega(t)}{2} e^{-i\omega_{r.f.}t} \psi_{\uparrow}, \quad (1.25b)$$

où $\Omega(t) > 0$ est proportionnel à l'amplitude du champ (dans le cas d'une transition à un photon) ou au carré de l'amplitude (dans le cas d'une transition à deux photons, cf. e.g. l'expérience [84]); la **fréquence de Rabi** $\Omega(t)$ et l'écart d'énergie entre $|\uparrow\rangle$ et $|\downarrow\rangle$: ω_Z sont exprimés en unité $\hbar\omega_{//}$. Bien que les équations (1.25) ne conservent pas séparément

9. À titre d'exemple on peut calculer la longueur de cicatrization du mode de polarisation ξ_p [définie au Chapitre 3 par (3.5)] au centre des distributions de la figure 1.3 : $\xi_p = 0.22 a_{//}$; ξ_p reste ici bien inférieure à l'extension du condensat de l'ordre d'une dizaine de $a_{//}$!

10. Cette approximation consiste à négliger dans la représentation d'interaction l'oscillation rapide de fréquence $\omega_Z + \omega_{r.f.}$ par rapport à l'oscillation lente de fréquence $\omega_Z - \omega_{r.f.}$; cette approximation est valable pour un désaccordage $\omega_Z - \omega_{r.f.}$ suffisamment faible, cf. e.g. la Ref. [83].

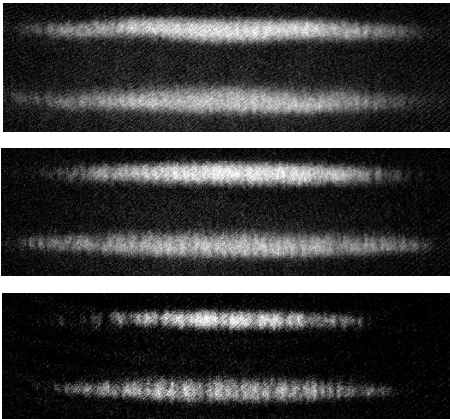


FIGURE 1.4 – Condensat de deux états hyperfins de l'atome de ^{87}Rb réalisé dans la Ref. [45] avec $N_{\uparrow} = N_{\downarrow} = 2.25 \times 10^5$. Les longueurs de diffusions sont semblables à celles considérées dans la figure 1.3 et correspondent à une situation de miscibilité (le confinement est décrit par $(\omega_{//}, \omega_{\perp}) \simeq 2\pi \times (1.5, 150)\text{Hz}$). Bien que les deux espèces soient miscibles, les deux condensats sont séparés de façon balistique afin d'observer la distribution des atomes dans $|\uparrow\rangle$ (en haut de chaque photo) et dans $|\downarrow\rangle$ (en bas de chaque photo). Les différentes photos ont été prises aux temps $t = 100\text{ms}$, $t = 1\text{s}$ et $t = 9\text{s}$. ©2011, APS

les nombres d'atomes N_\uparrow et N_\downarrow , elles conservent toujours le nombre total d'atomes, et on étudiera simplement la densité relative entre les deux espèces. On reprend ici le calcul proposé dans la référence [73] : supposons initialement que le champ r.f. soit éteint ($\Omega = 0$) et que le condensat soit dans l'état stationnaire :

$$\psi_\uparrow(x) = \sqrt{\rho_0(x)} \quad \text{et} \quad \psi_\downarrow(x) = 0, \quad (1.26)$$

de telle façon que tous les atomes soient dans l'état $|\uparrow\rangle$ à $t = 0$. Supposons maintenant que l'on expose le condensat au champ r.f. ($\Omega \neq 0$) durant un temps suffisamment court pour que les atomes n'aient pas eu le temps de se redistribuer spatialement. Après ce court laps de temps, les fonctions d'ondes s'expriment :

$$\psi_\uparrow(x, t) = \varphi_\uparrow(t) \sqrt{\rho_0(x)} \quad \text{et} \quad \psi_\downarrow(x, t) = \varphi_\downarrow(t) \sqrt{\rho_0(x)}. \quad (1.27)$$

Dans la **limite dite de Manakov** :

$$g_{\uparrow\uparrow} = g_{\downarrow\downarrow} = g_{\uparrow\downarrow}, \quad (1.28)$$

la distribution $\rho_0(x)$ est bien une distribution stationnaire de l'équation (1.25a) et de l'équation (1.25b) avec les potentiels chimiques μ_\uparrow et $\mu_\downarrow = \mu_\uparrow + \delta$, et les coefficients $\varphi_{\uparrow,\downarrow}$ sont solutions de :

$$i \frac{d\varphi_\uparrow}{dt} = \mu_\uparrow \varphi_\uparrow - \frac{\Omega(t)}{2} e^{i\omega_{r.f.}t} \quad \text{et} \quad i \frac{d\varphi_\downarrow}{dt} = \mu_\downarrow \varphi_\downarrow - \frac{\Omega(t)}{2} e^{-i\omega_{r.f.}t}, \quad (1.29)$$

Ces deux équations sont résolues dans la limite des temps courts [$t \ll 1/(\omega_{r.f.} - \omega_Z)$] par :

$$\varphi_\uparrow(t) = e^{-i\mu_\uparrow t} \cos\left(\frac{\Omega t}{2}\right) \quad \text{et} \quad \varphi_\downarrow(t) = i e^{-i\mu_\downarrow t} \sin\left(\frac{\Omega t}{2}\right), \quad (1.30)$$

où on a utilisé la condition initiale (1.26). On remarque alors que suivant la durée de l'exposition au champ r.f., on peut transférer une partie des atomes du niveau $|\uparrow\rangle$ au niveau $|\downarrow\rangle$:

- pour $t = \pi/2\Omega$, aussi appelé *pulse* $\pi/2$ (on choisit d'utiliser ici la dénomination anglophone, cf. la Ref. [84]), la moitié des atomes a été transférée dans l'état $|\downarrow\rangle$,
- pour $t = \pi/\Omega$, aussi appelé *pulse* π , la totalité des atomes a été transférée dans l'état $|\downarrow\rangle$.

De façon générale la densité relative $|\varphi_\uparrow|^2 - |\varphi_\downarrow|^2$ oscille entre les valeurs extrêmes -1 et 1 pour $\Omega(t) \neq 0$ et correspond au régime appelé **régime de Rabi**. Bien que les atomes soient bien en interactions dans la limite de Manakov, il est important de souligner ici que l'oscillation représentée par (1.30) est un effet purement linéaire. Dans le cas où la limite de Manakov n'est pas atteinte $\rho_0(x)$, définie initialement comme distribution stationnaire de l'équation (1.25a), n'est plus une distribution stationnaire de (1.25b). Après un *pulse* π du champ r.f., le condensat n'est plus dans un état stationnaire et on peut observer l'oscillation de la largeur du condensat à une fréquence typique du mode d'oscillations collectives (cf. l'expérience réalisée dans la Ref. [85]).

À l'aide du couplage cohérent de Rabi, le groupe de E.A. Cornell a pu mesurer en 1998 la phase relative entre les deux composantes en intercalant entre deux *pulse* $\pi/2$ du champ r.f. une évolution libre ($\Omega = 0$) du condensat sur une certaine durée t_0 . Reprenons ici les différentes étapes de l'expérience : initialement la moitié des atomes de l'état $|\uparrow\rangle$ sont transférés dans l'état $|\downarrow\rangle$; chaque composante du condensat est alors peuplée et gagne lors de l'évolution libre une phase $-\mu_{\uparrow,\downarrow}t_0$. Durant le second *pulse* $\pi/2$, les atomes restant de l'état $|\uparrow\rangle$ sont transférés dans l'état $|\downarrow\rangle$ accompagnés de la phase $-\mu_\uparrow t_0 - \omega_{r.f.}t_0$

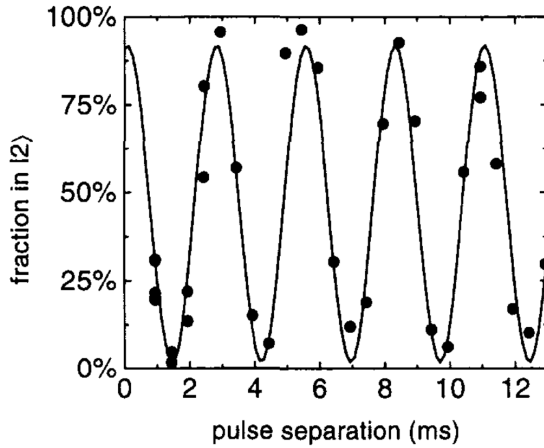


FIGURE 1.5 – Fraction d’atomes $|\varphi_{\downarrow}|^2$ dans l’état $|\downarrow\rangle$ (ici noté $|2\rangle$) après le second pulse $\pi/2$ en fonction de la durée de l’évolution libre t_0 . En trait plein est représentée la fraction d’atomes analytique (1.31) et les points représentent les différentes mesures expérimentales réalisées par [84]. ©1998, Springer

correspondant respectivement à l’évolution libre de la composante ψ_{\uparrow} et à l’évolution du champ r.f. pendant t_0 . La composante φ_{\downarrow} voit ainsi interférer à la fin du second pulse deux contributions de phases $-\mu_{\downarrow}t_0$ et $-\mu_{\uparrow}t_0 - \omega_{r.f.}t_0$ respectivement et la fraction d’atomes dans l’état $|\downarrow\rangle$ à la fin de l’expérience est alors égale à :

$$|\varphi_{\downarrow}|^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos [(\mu_{\downarrow} - \mu_{\uparrow} - \omega_{r.f.})t_0]. \quad (1.31)$$

Dans la limite de Manakov, la pulsation de la figure d’interférence (1.31) correspond au désaccord $\delta = \omega_{r.f.} - \omega_Z$ et a été mesurée expérimentalement dans la référence [84] comme le montre le très bon accord entre les mesures réalisées à différents t_0 avec la formule analytique (1.31) dans la figure 1.5. Bien plus que la mesure du désaccord δ , l’expérience réalisée dans la référence [84] montre que la **phase relative** constitue une grandeur physique à part entière au même titre que la densité relative. On verra notamment dans la section suivante que la dynamique relative entre les deux espèces constituant le condensat est bien caractérisée par le champ densité relative d’atomes et le champ de phase relative.

ii. *Self-trapping* et régime de Josephson

Dans l’espace des phases constitué de la phase relative et de la densité relative (cf. les Figs. 1.6 et 1.7), les oscillations du régime Rabi sont représentées par des trajectoires fermées autour du point du point $(\pi, 0)$ représentées en rouge dans la figure 1.6 (aussi connues sous le nom d’oscillations π), ou autour du point $(0, 0)$ représentées en bleu dans la figure 1.6. On ne discutera pas en détail ici ces dernières oscillations, aussi connues sous le nom d’oscillations plasma, qui ont été mises en évidence initialement dans la référence [86] (puis dans la Ref. [87]) dans les condensats à une composante en présence d’un *puits double* (i.e. *double well trap* en anglais); dans ces expériences ont été observées notamment un régime d’oscillation Josephson entre les deux puits du potentiel ainsi qu’un le *self-trapping* du condensat dans l’un des deux puits. On peut souligner ici que la dynamique temporelle d’un condensat à l’intérieur d’un double puits est similaire à celle d’un condensat à deux composantes (1.25) : la fraction du condensat à l’intérieur d’un des 2 puits est décrite par une fonction d’onde $\psi_{1,2}$ dont la dynamique est déterminée par les interactions entre atomes dans le même puits ainsi que par l’interaction cohérente entre les deux fractions du condensat (rendue possible par effet tunnel à travers la barrière entre les deux puits). L’étude des condensats à deux composantes constitue à cet égard une prolongation naturelle de l’étude de ces condensats faiblement couplés : dans le cas à deux composantes

FIGURE 1.6 – Représentation dans l'espace des phases des oscillations plasmas (en bleu) et des oscillations π (en rouge) observées par [63] dans le régime de Rabi. ϕ représente la phase relative entre les deux composantes et z la densité relative $|\psi_\uparrow|^2 - |\psi_\downarrow|^2$. Les courbes en trait plein (—) correspondent aux trajectoires analytiques et les points les mesures expérimentales; chaque type de symbole (\circ , \diamond , $*$, ...) correspond à une condition initiale du condensat. ©2010, APS

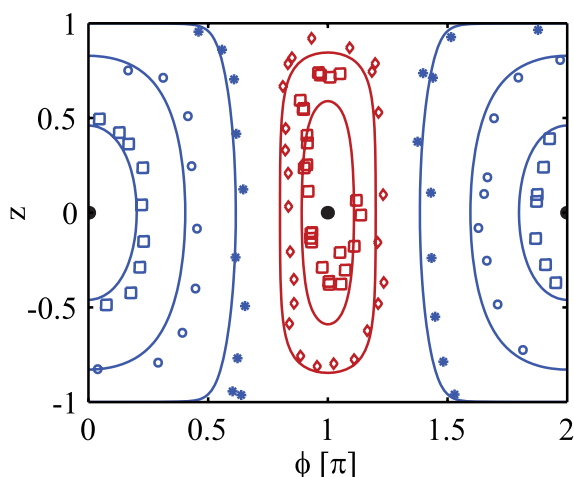
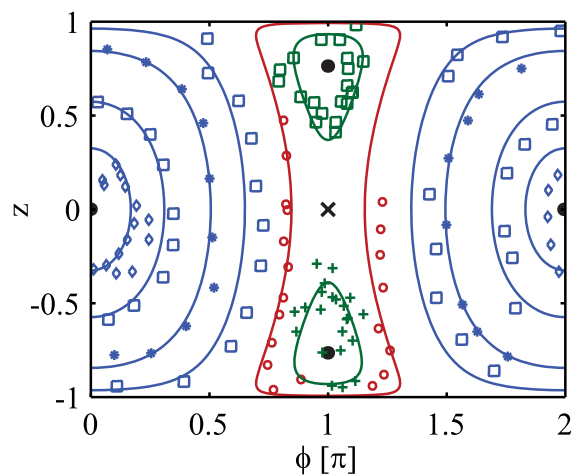


FIGURE 1.7 – Représentation dans l'espace des phases des oscillations plasmas (en bleu) et des oscillations π (en rouge et vert) observées dans la Ref. [63] dans le régime de self-trapping (cf. légende de la Fig. 1.6). En dessous d'une certaine valeur critique du couplage Rabi, les oscillations π bifurquent d'un régime de densité relative moyenne nulle (représentés dans la Fig. 1.6) à un régime de densité relative moyenne finie, représenté ici par les trajectoires vertes; la trajectoire rouge correspond ici à la limite entre les oscillations plasma et les oscillations π . ©2010, APS



les deux espèces \uparrow et \downarrow ne sont plus confinées spatialement dans un puits et le couplage cohérent entre les deux espèces est accordable de façon directe expérimentalement (on rappelle que la fréquence de Rabi Ω est liée à l'amplitude du champ r.f. appliqué).

Intéressons nous plus particulièrement aux oscillations π pour lesquelles le point fixe $(\pi, 0)$ correspond à l'état fondamental du système comme on le verra au Chapitre 2. Les trajectoires sont déterminées initialement par la densité relative ainsi que par la phase relative dans lequel le système a été préparé. Pour les deux types d'oscillation représentés dans la figure 1.6, la dynamique du condensat est dominée par le régime linéaire de Rabi et la densité relative du condensat oscille autour de 0. En 2010, T. Zibold *et al.* ont montré expérimentalement que pour une pulsation Rabi Ω suffisamment faible la trajectoire des oscillations π changent drastiquement : la densité relative oscille autour d'une densité relative finie, comme le montrent les trajectoires représentées en vert dans la figure 1.7. En effet, en deçà d'une certaine valeur critique du couplage Rabi, le condensat subit une transition de phase et l'état de plus basse énergie est décrit par une densité relative correspondant aux 2 nouveaux points fixes dans l'espace des phases 1.7. La moyenne temporelle non nulle de la densité relative, ou *self-trapping* (initialement prévu par [33]), est ici une signature directe des effets non-linéaires de la dynamique du condensat et ne peut-être

observée dans le régime limite de Manakov (1.28) ; plus particulièrement, cette transition de phase ne peut être observée que dans le cas où les interactions inter-espèces et intra-espèce sont différentes, cf. l'Eq. (2.11) dans le Chapitre 2. Pour des pulsations de Rabi encore plus basses, le *self-trapping* est accentué et les atomes sont presque entièrement condensés dans un seul état. Le système entre alors dans un nouveau régime : les trajectoires des oscillations π dans l'espace des phases ne sont plus fermées et la phase relative du condensat n'est plus bornée. Ce nouveau régime peut être lié formellement à l'effet Josephson alternatif (cf. e.g. la Ref. [88]) en montrant que le courant d'atomes entre les deux composantes oscille tel que :

$$\frac{dN_{\uparrow} - N_{\downarrow}}{dt} = I(t) = I_c \sin(\phi) \quad \text{avec} \quad I_c \propto \Omega \quad \text{et} \quad \phi \propto t, \quad (1.32)$$

qui est une conséquence directe de la croissance *non bornée* de la phase relative du condensat. Observée initialement dans les condensats de spin 1 [62], cet effet a été observé dans les condensats à deux composantes [63] et constitue une signature élégante d'une dynamique relative entre les deux espèces du condensat.

Outre l'intérêt pratique de pouvoir peupler les différents états du condensat dans le régime linéaire, l'étude du couplage cohérent en présence d'interaction dans les condensats à deux composantes révèle une très riche phénoménologie. Dans le Chapitre 2, on s'apercevra que ce couplage modifie le spectre des excitations se propageant à travers le condensat. On simplifiera par ailleurs l'étude du champ r.f. stationnaire ($\Omega(t) = \text{cste}$) en étudiant les fonctions d'onde dans le référentiel tournant en posant :

$$\psi_{\uparrow} \rightarrow e^{-i\omega_{\text{r.f.}}t} \psi_{\uparrow} \quad \text{et} \quad \psi_{\downarrow} \rightarrow e^{+i\omega_{\text{r.f.}}t} \psi_{\downarrow}. \quad (1.33)$$

Dans ce référentiel les équations de Gross-Pitaevskii (1.25) se simplifient telles que :

$$i \frac{\partial \psi_{\uparrow, \downarrow}}{\partial t} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \psi_{\uparrow, \downarrow}}{\partial x^2} + g_{\uparrow\uparrow} |\psi_{\uparrow, \downarrow}|^2 \psi_{\uparrow, \downarrow} + g_{\uparrow\downarrow} |\psi_{\downarrow, \uparrow}|^2 \psi_{\uparrow} + \frac{\Omega}{2} \psi_{\downarrow, \uparrow}. \quad (1.34)$$

1.d. Un nouveau type de soliton

L'ajout d'un nouveau degré de liberté au condensat de Bose-Einstein n'enrichit pas seulement la dynamique collective du condensat mais permet aussi d'observer la propagation de nouvelles **ondes non-linéaires**. La propagation d'ondes non-linéaires à travers un condensat de Bose-Einstein est le résultat de deux effets antagonistes bien décrits par l'équation de Gross-Pitaevskii :

- un effet non-linéaire qui tend à raidir le profil des ondes se propageant à travers le condensat et qui peut développer dans certaines configurations une discontinuité des champs de densité et de vitesse ; il est à noter ici que ces effets ne sont pas caractéristiques des gaz quantiques uniquement mais de tout fluide dont les équations possèdent une limite **hydrodynamique** (cf. le Chapitre 3),
- un effet dispersif qui tend à élargir les paquets d'onde lors de leur propagation.

La propagation d'onde à l'intérieur d'un fluide n'est pas exceptionnelle et il n'est pas rare d'étudier la propagation des ondes planes de faible amplitude à travers un fluide quelconque. Plus exceptionnellement dans le cas des ondes non-linéaires, la perturbation du condensat est **macroscopique** au passage de l'onde et ne se limite pas à une faible déformation du milieu. De plus, la propagation des ondes non-linéaires n'est pas restreinte aux ondes périodiques : il existe en effet une solution localisée de l'équation de Gross-Pitaevskii se propageant sans déformation communément appelée **soliton**.

i. Soliton sombre

Avant d'écrire l'expression analytique du soliton, on peut étudier ici de façon qualitative les deux effets antagonistes présentés précédemment à l'origine de la propagation de cette onde *localisée*, pour un condensat à une composante à interaction répulsive¹¹. Ces deux effets sont encodés dans la relation de dispersion des excitations :

$$\omega(k)^2 = c^2 k^2 + k^4/4 \quad \text{avec} \quad c = \sqrt{\rho}, \quad (1.35)$$

où c est la vitesse du son des excitations (exprimée ici pour un coefficient non-linéaire $g = 1$) et ρ la densité uniforme du condensat non perturbé; d'après la relation (1.35), la **vitesse** des excitations dépend de la densité locale du condensat $c = \sqrt{\rho}$ (effet non-linéaire) ainsi que de la pulsation des excitations k (effet dispersif).

Supposons maintenant que le soliton correspond à une perturbation localisée de la densité $\Delta\rho$ sur une extension spatiale L . D'après la relation (1.35), la vitesse du son au voisinage de cette perturbation gagne une contribution $\sim c\Delta\rho/\rho$. De plus, puisque $k \sim 1/L$, la dispersion augmente la vitesse d'une quantité $\sim c/\rho L^2$ [cf. l'Eq. (1.35)]. Le soliton peut alors se propager à travers le condensat uniforme si ces deux perturbations de la vitesse se compensent, autrement dit si :

$$\frac{\Delta\rho}{\rho} \sim -\frac{1}{\rho L^2}. \quad (1.36)$$

On remarque ici que le soliton correspond à une dépletion de la densité du condensat $\Delta\rho < 0$: on appelle ce type de soliton un **soliton sombre**. Le signe de $\Delta\rho$ dépend directement du signe de la contribution dispersive de la relation (1.35). Une autre équation bien connue supportant la propagation de soliton est l'équation de Korteweg-de Vries, de relation de dispersion $\omega = ck - k^3$: le soliton propagé par cette équation correspond ici à une augmentation du paramètre physique et on parle alors de soliton brillant.

On peut dériver analytiquement la formule du soliton sombre dans le cas d'un condensat de Bose-Einstein à interactions répulsives, en cherchant les solutions de l'équation de Gross-Pitaevskii se propageant à vitesse constante v :

$$\psi(x, t) = \sqrt{\rho_0} (\cos \alpha \tanh [\sqrt{\rho_0} \cos \alpha (x - vt)] + i \sin \alpha) \quad \text{avec} \quad \sin \alpha = v/c, \quad (1.37)$$

où ψ est le paramètre d'ordre du condensat à une composante; la vitesse v du soliton sombre est couplée à son amplitude $\cos^2 \alpha$ ainsi qu'à sa largeur $1/\cos \alpha$: plus le soliton se propage rapidement, plus il est large et plus sont amplitude diminue. La distribution à une dimension des atomes présente bien une diminution locale du nombre d'atomes :

$$|\psi|^2 = \rho_0 \left(1 - \cos^2 \alpha / \cosh^2 [\sqrt{\rho_0} \cos \alpha (x - vt)] \right). \quad (1.38)$$

Observé la première fois dans le domaine de l'optique non-linéaire en 1987 [89], puis dans les condensats en 1999 [21], l'étude des solitons dans les gaz quantiques fait l'objet d'une littérature conséquente depuis la réalisation de la première condensation de Bose-Einstein (cf. e.g. la revue [90]). On associe souvent à la robustesse de cette onde solitaire un comportement proche de celui d'une particule : de façon similaire à une particule *insécable*

11. L'équation de Gross-Pitaevskii à une composante correspond simplement à l'équation (1.14a) pour laquelle $g_{\uparrow\uparrow} = g > 0$, $g_{\uparrow\downarrow} = 0$ et $V = 0$. Dans un souci de concision on présente ici les résultats pour $g = 1$.

le soliton conserve bien sa forme après collision avec un autre soliton ¹².

Ces structures sont cependant instables à deux et trois dimensions pour des excitations transversales à la propagation du soliton dont la longueur d'onde est plus grande que la largeur du soliton $1/\sqrt{\rho_0} \cos \alpha$ (typiquement de l'ordre de la longueur de cicatrisation du condensat), comme le montrent les premières expériences sur la génération de solitons [92]. On ne résiste pas ici à présenter la justification élégante proposée par [93] pour expliquer cette instabilité aussi appelée *instabilité serpentine* ¹³. En considérant que le soliton sombre correspond bien à une particule, sa dynamique est régie par l'équation

$$m_s \frac{d^2 X}{dt^2} = F_s , \quad (1.39)$$

où X est la position du soliton, m_s sa masse inertielle (correspondant par définition à $m_s = 2 \frac{dE_s}{dv}$ où $E_s \propto (\rho_0 - v^2)^{3/2}$ est l'énergie du soliton ¹⁴) et F_s est la force subie par le soliton. À 3 dimensions le soliton sombre peut être vu comme une membrane d'épaisseur $1/\cos \alpha$ et la force subie par le soliton F_s correspond alors à une tension de surface que l'on peut écrire à l'aide de la loi de Laplace : $F_s = E_s/R$ où R est le rayon de courbure de la membrane (cf. e.g. la Ref. [95]). Dans la limite des faibles déformations et en supposant que la perturbation soit seulement dirigée selon l'axe y , on a plus simplement $F_s = E_s \frac{d^2 X}{dy^2}$. Dans le cas où la déformation transversale s'écrit $X = \cos(ky - \omega t)$, on obtient :

$$\omega = \pm i \sqrt{E_s/|m_s|} k , \quad (1.40)$$

préfigurant l'instabilité du soliton dans un condensat à 2 ou 3 dimensions ; le taux $2\pi/\omega$ dérivé dans l'équation (1.40) décrit bien le taux observé numériquement pour des grandes longueurs d'onde. Le soliton se désintègre ensuite en paire vortex – anti-vortex. Il est remarquable ici que cette instabilité soit reliée à une propriété contre-intuitive du soliton sombre : sa masse effective négative, qui correspond physiquement à la diminution de l'énergie du système quand la vitesse du soliton augmente. Le critère de stabilité $k^{-1} \lesssim 1/\sqrt{\rho_0}$ est très contraignant expérimentalement et les solitons sombres sont difficiles à observer : dans les condensats à une composante bidimensionnels, le soliton sombre constitue une membrane *trop mince* pour résister aux perturbations transversales.

ii. Soliton sombre-brillant

Le développement des condensats à deux composantes permet d'observer de nouvelles solutions solitoniques et notamment une version plus robuste à 2 et 3 dimensions du soliton sombre. Dans la limite de Manakov (cf. section précédente), les équations de Gross-Pitaevskii admettent comme solution un soliton *hybride* appelé soliton sombre-brillant (ou *dark-bright soliton* en anglais). Dans cette limite une des deux composantes propage un soliton sombre d'expression (on reprend ici la notation proposée dans la Ref. [97]) :

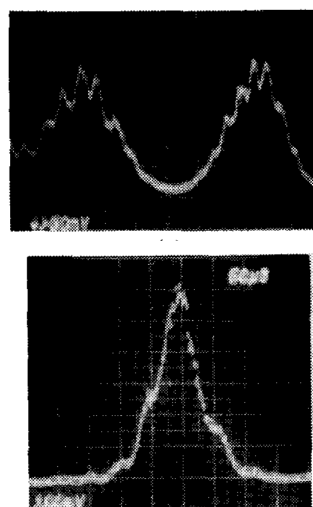
$$\psi_{\uparrow}(x, t) = \sqrt{\mu_{\uparrow}} (\cos \alpha \tanh [\kappa(x - \kappa \tan \alpha t)] + i \sin \alpha) , \quad (1.41)$$

12. Cette robustesse est une propriété générale des solitons et peut être observée pour les solitons dits hydrodynamiques (e.g. les solitons solution de l'équation de Korteweg-de Vries). L'équation de Gross-Pitaevskii permet de tester d'autres effets caractéristiques de ce comportement *particulière* : on peut observer par exemple l'oscillation d'un soliton sombre dans un condensat soumis à un potentiel harmonique (cf. e.g. la réalisation expérimentale [91]) de façon analogue à une particule oscillant dans un puits harmonique.

13. ou *snake instability*, cf. la Ref. [94].

14. On définira de façon exacte l'énergie du soliton au Chapitre 3.

FIGURE 1.8 – Observation du soliton sombre-brillant dans un milieu optique non-linéaire [96]. Les deux profils correspondent au profil radial des deux enveloppes $\|\mathbf{E}_1\|^2$ et $\|\mathbf{E}_2\|^2$ du champ $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1(\mathbf{r}, t) e^{-i\omega_1 t} + \mathbf{E}_2(\mathbf{r}, t) e^{-i\omega_2 t}$ après propagation à travers un milieu non-linéaire; le régime des équations non-linéaires de Schrödinger est différent de celui discuté dans la Section 1.d et correspond à un régime attractif. ©1992, IEEE



créant un puits attractif pour la seconde composante pour laquelle se forme alors un soliton brillant :

$$\psi_{\downarrow}(x, t) = \sqrt{\frac{N_{\downarrow}\kappa}{2}} \frac{e^{i(\Omega_{\downarrow}t + \kappa \tan \alpha x)}}{\cosh[\kappa(x - \kappa \tan \alpha t)]}, \quad (1.42)$$

où la largeur du soliton κ^{-1} est définie par $\kappa = \sqrt{\mu \cos^2 \alpha + (N_{\downarrow}/4)^2} - N_{\downarrow}/4$ et $\Omega_{\downarrow} = \kappa^2(1 - \tan^2 \alpha)$. Ces solitons ont été observés initialement en 1992 (cf. la Ref. [96]) lors de la propagation d'une onde électrique à deux porteuses à travers un milieu non-linéaire de Kerr, cf. la Fig. 1.8. Dans cette expérience, la géométrie de la propagation est différente de celle décrite dans la remarque 1.1 et la coordonnée spatiale correspond ici à la direction perpendiculaire à la propagation de la porteuse. De façon générale ces structures sont appelées en optique non-linéaire des solitons vectoriels (ou *vector soliton* en anglais) par opposition au soliton plus classique que l'on pourrait qualifier de scalaire. Le soliton sombre-brillant a été ensuite réalisé dans les condensats de Bose-Einstein par impression de phase [91] dans un condensat à deux espèces dans le régime d'interaction immiscible (cf. la Fig. 1.9). Il est important de souligner que la solution en soliton sombre-brillant présentée ici, dérivée dans la limite de Manakov, ne met pas en coexistence les deux espèces : $\psi_{\downarrow} \rightarrow 0$ pour $|x|$ suffisamment large. De façon similaire au soliton sombre, le soliton sombre-brillant présente un comportement particulier : il oscille en présence d'un potentiel harmonique (cf. la Fig. 1.9). Les échelles de temps sont cependant différentes entre les deux phénomènes et la période d'oscillation du soliton sombre-brillant mesurée dans la référence [91] est plus grande de presque un ordre de grandeur par rapport à celle mesurée pour un soliton sombre. Dans cette même expérience, la collision entre un soliton sombre et un soliton sombre-brillant a été testée : le soliton sombre rebondit alors sur le soliton sombre-brillant, rebond qualifié par les auteurs de réflexion *hard-wall*. Ces différentes *mises à l'épreuve* montrent bien qu'au même titre que le soliton scalaire, ce nouveau type de soliton se comporte de façon similaire à une particule mais montre aussi que la dynamique entre les deux types de soliton est différente. Bien plus qu'une simple nouvelle structure non-linéaire, le soliton sombre-brillant peut être vu comme un mécanisme stabilisateur du soliton sombre contre l'instabilité serpentine. En effet, le couplage entre le soliton sombre (1.41) et le soliton brillant (1.42) permet de modifier la largeur du soliton sombre indépendamment de sa profondeur (et dans une moindre mesure de sa vitesse de

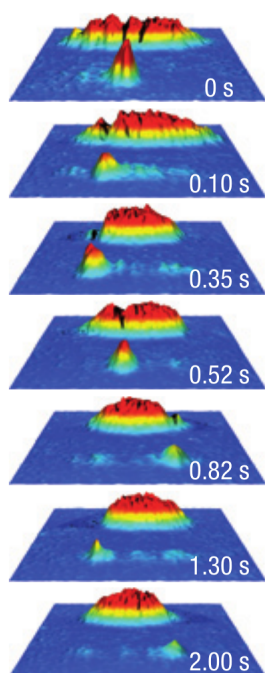


FIGURE 1.9 – Observation du soliton sombre-brillant d’un condensat de deux états hyperfins de ^{87}Rb [91]. Le profil du soliton est initialement imprimé sur la distribution stationnaire du condensat (régime de Thomas-Fermi) et les différentes photographies correspondent à l’évolution du soliton sombre-brillant en présence du potentiel confinant. De façon similaire au comportement d’une particule à l’intérieur d’un potentiel harmonique, le soliton oscille (la période est en bon accord avec les simulations numériques réalisées dans la référence [91]).

©2008, Nature

propagation) : pour un nombre suffisamment grand d’atomes dans l’état $|\downarrow\rangle$, la largeur du soliton κ^{-1} est égal à $\kappa^{-1} = N_{\downarrow}/(2\mu \cos^2 \alpha)$, et il devient possible de protéger le soliton contre les perturbations transversales de grandes longueurs d’onde en augmentant le nombre de particules dans la composante $|\downarrow\rangle$.

L’étude de ces solitons inédite à travers les condensats fait l’objet d’une recherche expérimentale très active. On peut mentionner par exemple les expériences [45, 98] qui ont permis de réaliser ces structures en faisant contre-propager les deux espèces du condensat dans un régime miscible mais soumis à une instabilité modulationnelle ; on reviendra plus en détail sur ces expériences au Chapitre 3 où l’on montrera que cette contre-propagation semble s’accompagner de la formation d’ondes de choc dispersives de *polarisation*. De nombreux progrès théoriques ont été aussi accomplis depuis la première observation du soliton sombre-brillant à travers un condensat. Plus particulièrement on étudiera (toujours dans le Chapitre 3) la propagation d’un autre type de soliton vectoriel, de structure similaire au soliton sombre-brillant, solitons dits **magnétiques** présents dans le cas où le condensat ne décrit plus la limite de Manakov [99, 100]. Au contraire du soliton décrit par (1.41)-(1.42), le soliton magnétique constitue une excitation du condensat de Bose-Einstein dans son régime miscible où les deux espèces coexistent.

Ces nouvelles excitations non-linéaires ne se limitent au régime de la dynamique 1D ou quasi-1D étudié ici. Plus récemment des structures similaires ont été étudiées dans des géométries purement tridimensionnelles comme le soliton sombre-brillant à symétrie sphérique : *dark-shell-bright soliton* [101]. L’ajout du seconde degré spinoriel de liberté permet notamment de coupler ces excitations à des excitations topologiques de dimensions différentes comme le montre l’observation de soliton-vortex dans l’expérience [60].

2. Dynamique de polarisation

Comme le montrent les phénomènes présentés précédemment, l'ajout d'un degré de liberté interne autorise une nouvelle dynamique à travers les condensat caractérisée par l'échange de particules entre les deux niveaux ainsi que par la phase relative entre les fonctions d'onde des deux espèces. Dans cette section on présentera une réécriture des équations de Gross-Pitaevskii plus à même de décrire cette dynamique interne du condensat. On montrera notamment que cette réécriture décrit, hors du régime de Manakov, deux dynamiques non-linéaires différentes caractérisées dans le spectre de Bogoliubov par deux modes de phonons.

Remarque 1.2. Les résultats théoriques et expérimentaux présentés dans les sections 1.c et 1.d ont été déterminés dans la **limite de Manakov** (1.28) (hormis le régime de Josephson en présence d'un faible couplage Rabi). On peut dans ce cas réécrire les équations de Gross-Pitaevskii de la façon suivante :

$$i \partial_t \mathbf{E} = -\frac{1}{2} \partial_x^2 \mathbf{E} + g_{\uparrow\uparrow} \|\mathbf{E}\|^2 \mathbf{E} \quad \text{avec} \quad \mathbf{E}(x, t) = \psi_{\uparrow} \mathbf{e}_y + \psi_{\downarrow} \mathbf{e}_z, \quad (1.43)$$

où \mathbf{e}_y et \mathbf{e}_z sont des vecteurs unitaires ; on reprend ici les notations de l'optique non-linéaire où la limite de Manakov a été dérivée initialement [102]. Dans cette limite la dynamique relative entre les composantes E_y et E_z (ou ψ_{\uparrow} et ψ_{\downarrow}), est linéaire et par conséquent est trivialement résolue (cf. e.g. le régime d'oscillations de Rabi en présence d'un couplage cohérent). Plus formellement cette équation est intégrable par la méthode de diffusion inverse (cf. e.g. la Ref. [103]). Dans les travaux présentés dans cette thèse, on considérera la limite stricte :

$$g_{\uparrow\downarrow} < \sqrt{g_{\uparrow\uparrow} g_{\downarrow\downarrow}}, \quad (1.44)$$

sauf mention contraire explicite. Cette inégalité stricte se montrera capitale pour l'étude des phénomènes non-linéaires issus de la dynamique relative entre les deux espèces (cf. à cet égard l'équation (1.53d) dérivée ultérieurement).

Par ailleurs on supposera que les deux coefficients intra-espèce sont égaux entre eux. Cette limite permet de simplifier l'approche théorique et de mettre en exergue les effets non-linéaires liés à la différence entre les coefficients intra et inter-espèces ; elle peut être atteinte expérimentalement comme le montre les travaux de la référence [104]. Cette limite n'est pas sans conséquence et la différence entre les deux coefficients $g_{\uparrow\uparrow}$ et $g_{\downarrow\downarrow}$ mène à des effets non-linéaires très intéressants (cf. e.g. la dérivation d'équation de Gardner dans [105]) qui ne seront pas étudiés ici. En résumé les coefficients non-linéaires seront choisis tels que :

$$\boxed{g_{\uparrow\uparrow} = g_{\downarrow\downarrow} \equiv g \geq g_{\uparrow\downarrow} > 0} \quad (1.45)$$

2.a. Notations de Madelung

Le condensat de spineurs peut être aussi vu comme deux fluides en interaction dont l'un est composé d'atomes dans l'état quantique $|\uparrow\rangle$ et l'autre d'atomes dans l'état quantique $|\downarrow\rangle$ (cf. figure 2.a). Dans cette description, il devient plus naturel de parler de densités et de vitesses et on réécrit à cet égard les deux paramètres d'ordre complexes $\Psi = (\psi_{\uparrow}, \psi_{\downarrow})$ de la façon suivante¹⁵ :

$$\begin{pmatrix} \psi_{\uparrow} \\ \psi_{\downarrow} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \sqrt{\rho_{\uparrow}} e^{i\phi_{\uparrow}} \\ \sqrt{\rho_{\downarrow}} e^{i\phi_{\downarrow}} \end{pmatrix}, \quad (1.46)$$

15. Cette notation est en fait une généralisation de l'approche proposée par Madelung pour l'équation de Schrödinger [106].

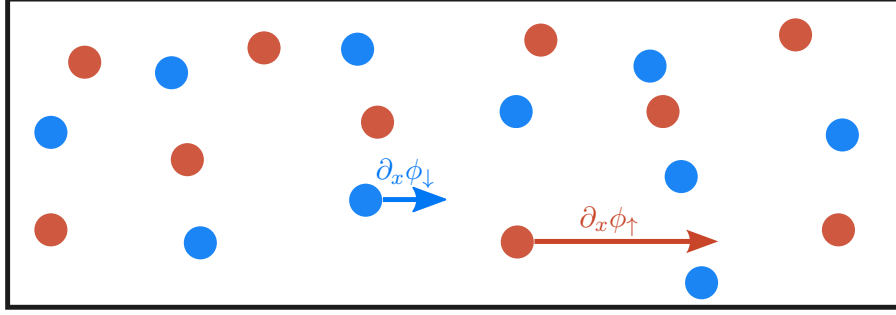


FIGURE 1.10 – Approche Madelung du condensat [cf. l'Eq. (1.46)] composé de particules dans l'état $|\downarrow\rangle$ en bleu (\bullet) se déplaçant à la vitesse $\partial_x \phi_{\downarrow}$ et de dans l'état $|\uparrow\rangle$ en rouge (\bullet) se déplaçant à la vitesse $\partial_x \phi_{\uparrow}$.

où $\rho_{\uparrow} = |\psi_{\uparrow}|^2 \geq 0$ et $\rho_{\downarrow} = |\psi_{\downarrow}|^2 \geq 0$. $\phi_{\uparrow} \in [0; 2\pi[$ (resp. $\phi_{\downarrow} \in [0; 2\pi[$) correspond au potentiel vitesse des atomes dans l'état $|\uparrow\rangle$ (resp. dans l'état $|\downarrow\rangle$). La dynamique du système est alors régie par quatre équations réelles sur les deux champs de densité ρ_{\uparrow} et ρ_{\downarrow} et les deux potentiels vitesse ϕ_{\uparrow} et ϕ_{\downarrow} obtenues en combinant la définition (1.46) aux équations de Gross-Pitaevskii (1.14). Il existe cependant une autre notation, introduite dans la référence [107], plus appropriée à la description des condensats à deux composantes. En effet une façon naturelle de décrire deux fluides en mouvement l'un par rapport à l'autre est de décrire séparément

- le flot total caractérisé par une densité totale d'atomes $\rho_{\uparrow} + \rho_{\downarrow}$ et une vitesse $\partial_x \phi_{\uparrow} + \partial_x \phi_{\downarrow}$,
- le **flot relatif** entre les deux fluides caractérisé par une densité relative d'atomes $\rho_{\uparrow} - \rho_{\downarrow}$ et une vitesse relative $\partial_x \phi_{\uparrow} - \partial_x \phi_{\downarrow}$.

Dans ce but on introduit la notation :

$$\begin{pmatrix} \psi_{\uparrow} \\ \psi_{\downarrow} \end{pmatrix} \equiv \sqrt{\rho} e^{i\Phi/2} \chi \quad \text{avec} \quad \chi = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) e^{-i\phi/2} \\ \sin(\theta/2) e^{i\phi/2} \end{pmatrix}, \quad (1.47)$$

où l'angle $\theta(x, t)$ est défini tel que : $\theta \in [0; \pi]$; on parle d'angle de mélange, $\theta = 0$ (resp. $\theta = \pi$) correspondant à une situation où tous les atomes sont dans l'état $|\uparrow\rangle$ (resp. dans l'état $|\downarrow\rangle$) et $\theta = \pi/2$ correspondant à la situation où autant d'atomes sont dans l'état $|\uparrow\rangle$ que dans l'état $|\downarrow\rangle$. Les deux notations (1.46) et (1.47) sont simplement reliées par :

$$\rho = \rho_{\uparrow} + \rho_{\downarrow}, \quad \rho \cos \theta = \rho_{\uparrow} - \rho_{\downarrow}, \quad \Phi = \phi_{\uparrow} + \phi_{\downarrow}, \quad \phi = -\phi_{\uparrow} + \phi_{\downarrow}. \quad (1.48)$$

On rappelle que la phase relative ne constitue pas seulement une réécriture du paramètre d'ordre du condensat mais correspond bien à une quantité observable du système mesurable expérimentalement (cf. la Section 1.c). On utilise aussi par la suite les notations pour la vitesse totale et la vitesse relative :

$$U(x, t) \equiv \partial_x \Phi(x, t) \quad \text{et} \quad v(x, t) \equiv \partial_x \phi(x, t). \quad (1.49)$$

Afin de différencier les quantités exprimées à l'aide des champs complexes (1.5) et les quantités exprimées à l'aide des nouvelles notations (1.47), on introduit le paramètre d'ordre :

$$\Xi(x, t) = (\rho, \Phi, \theta, \phi)^T, \quad (1.50)$$

où T correspond à la notation transposée. Dans cette nouvelle notation l'énergie cinétique des particules (1.9) s'écrit :

$$E_{\text{cin}}[\Xi] = \frac{1}{8} \int dx \left(\frac{\rho_x^2}{\rho} + \rho \left[\theta_x^2 + \Phi_x^2 + \phi_x^2 - 2 \cos \theta \Phi_x \phi_x \right] \right), \quad (1.51)$$

et l'énergie d'interaction (1.10) :

$$E_{\text{int.}}[\Xi] = \frac{1}{8} \int dx \rho^2 (3g + g_{\uparrow\downarrow} + (g - g_{\uparrow\downarrow}) \cos 2\theta). \quad (1.52)$$

En combinant la définition (1.47) et les équations de Gross-Pitaevskii (1.14), la dynamique du condensat s'écrit :

$$\rho_t + \frac{1}{2} \partial_x (\rho \Phi_x) - \frac{1}{2} \partial_x (\rho \phi_x \cos \theta) = 0, \quad (1.53a)$$

$$\Phi_t - \frac{1}{2} \frac{\cot \theta}{\rho} \partial_x (\rho \theta_x) + \frac{\rho_x^2}{4\rho^2} - \frac{\rho_{xx}}{2\rho} + \frac{1}{4} (\Phi_x^2 + \phi_x^2 + \theta_x^2) + (g + g_{\uparrow\downarrow})\rho = 0, \quad (1.53b)$$

$$\theta_t + \frac{1}{2} \Phi_x \theta_x + \frac{1}{2\rho} \partial_x (\rho \phi_x \sin \theta) = 0, \quad (1.53c)$$

$$\phi_t + \frac{1}{2} \partial_x (\Phi_x \phi_x) - \frac{1}{2\rho \sin \theta} \partial_x (\rho \theta_x) - (g - g_{\uparrow\downarrow})\rho \cos \theta = 0. \quad (1.53d)$$

On voit d'après les équations (1.53b) et (1.53d) que l'effet des interactions entre les atomes ne se manifeste qu'à travers la somme et la différence des coefficients non-linéaires g et $g_{\uparrow\downarrow}$:

$$\boxed{g_1 \equiv g + g_{\uparrow\downarrow} \quad \text{et} \quad g_2 \equiv g - g_{\uparrow\downarrow}} \quad (1.54)$$

On remarque ainsi que dans la limite de Manakov $g_2 = g - g_{\uparrow\downarrow} = 0$ (cf. la Remarque 1.2), la non-linéarité disparaît de la dynamique des champs θ et ϕ décrite par les équations (1.53c) et (1.53d).

2.b. Spectre de Bogoliubov

On peut relier plus quantitativement les coefficients g_1 et g_2 à la vitesse de propagation des excitations du condensat. Sans couplage cohérent, l'état fondamental du condensat à deux composantes est simplement déterminé par la minimisation de l'énergie d'interaction (1.52), les champs étant bien sûr uniformes afin de minimiser l'énergie cinétique du condensat (1.9). Deux situations se présentent alors :

- un régime anti-ferromagnétique $\theta_0 = \pi/2$ si $g_2 > 0$ (cas miscible),
- un régime ferromagnétique $\theta_0 = 0[\pi]$ si $g_2 < 0$ (cas immiscible).

Dans le régime stable, le paramètre d'ordre s'écrit alors :

$$\rho(x, t) = \rho_0, \quad \Phi(x, t) = \Phi_0(t), \quad \theta(x, t) = \pi/2 \quad \text{et} \quad \phi(x, t) = \phi_0(t). \quad (1.55)$$

où les phases sont définies par :

$$\Phi_0(t) = -g_1 \rho_0 t \equiv (\mu_{\uparrow} + \mu_{\downarrow})t \quad \text{et} \quad \phi_0(t) = -g_2 \rho_0 t \equiv (\mu_{\uparrow} - \mu_{\downarrow})t. \quad (1.56)$$

où μ_{\uparrow} (resp. μ_{\downarrow}) est le potentiel chimique du condensat dans l'état $|\uparrow\rangle$ (resp. $|\downarrow\rangle$).

Remarque 1.3. On a considéré ici un état stationnaire particulier. En effet les équations de la dynamique du condensat (1.14) sans couplage cohérent conservent bien le nombre d'atomes dans chaque état quantique, et on peut définir un état stationnaire qui minimise la fonctionnelle $E[\Psi] - \mu_\uparrow N_\uparrow - \mu_\downarrow N_\downarrow$ où μ_\uparrow (resp. μ_\downarrow) est le multiplicateur de Lagrange de la contrainte $N_\uparrow = \text{cste}$ (resp. $N_\downarrow = \text{cste}$). Cependant on préférera présenter ici le spectre de Bogoliubov pour un état stationnaire décrit par $\theta = \pi/2$ pour lequel les deux modes de Bogoliubov excitent **séparément** la dynamique globale et la dynamique relative du condensat¹⁶. De plus, en présence d'un couplage Rabi, le système n'est plus invariant par changement de phase relative et l'état fondamental, dans le régime anti-ferromagnétique correspond au condensat mélangé $\theta = \pi/2$.

i. Spectre des excitations

Le spectre des excitations ou **spectre de Bogoliubov**¹⁷ est obtenu en perturbant le paramètre d'ordre du condensat par une onde plane d'amplitude $\varepsilon \ll 1$:

$$\Xi(x, t) = \Xi^{(0)} + \left(\Xi^{(1)} e^{i(kx - \omega t)} + \text{c. c.} \right), \quad (1.57)$$

où $\Xi^{(0)} = (\rho_0, -g_1 t, \theta_0, -g_2 t)$ et $\Xi^{(1)} = (\rho^{(1)}, \Phi^{(1)}, \theta^{(1)}, \phi^{(1)})^T \ll \Xi^{(0)}$ sont des amplitudes à déterminer. On rappelle simplement ici le résultat déjà dérivé dans de nombreuses références [36, 108–111] : la linéarisation des équations de Gross-Pitaevskii par rapport à $\Xi^{(1)}$ montre que seulement deux modes d'excitations¹⁸ peuvent se propager :

- un **mode de densité** correspondant à une oscillation de la densité et de la vitesse totales du condensat (cf. la Fig. 1.11) et pour lequel la dynamique relative est figée $\theta_d^{(1)} = 0$ et $\phi_d^{(1)} = 0$. La relation de dispersion de ce mode est définie par :

$$\omega_d(k)^2 = \frac{g_1 \rho_0 k^2}{2} + \frac{k^4}{4} \quad (1.58)$$

qui est représentée en rouge dans la figure 1.13,

- un **mode de polarisation** correspondant à une oscillation de la densité et de la vitesse relatives du condensat (cf. la Fig. 1.12) et pour lequel la dynamique global du condensat est figée $\rho_p^{(1)} = 0$ et $\Phi_p^{(1)} = 0$. La relation de dispersion de ce mode est définie par :

$$\omega_p(k)^2 = \frac{g_2 \rho_0 k^2}{2} + \frac{k^4}{4} \quad (1.59)$$

qui est représentée en bleu dans la figure 1.13. On retrouve ici la condition de miscibilité des deux espèces du condensat : en effet, dans le cas où les interactions inter-espèces sont plus intenses que les interactions intra-espèce ($g_2 < 0$), le condensat développe à grande longueur d'onde des excitations de pulsation complexe d'après la relation de dispersion (1.59), prouvant ainsi son instabilité modulationnelle.

16. La matrice des perturbations (2.15) dérivée plus tard montre bien que pour $\cos \theta_0 \neq 0$, les dynamiques des perturbations (ρ', Φ') et (θ', ϕ') ne sont plus séparées.

17. Ici on considère seulement les excitations en onde plane. Dans une approche plus générale, il faudrait perturber le paramètre d'ordre par la somme de différents modes n (cf. [73]) :

$$\Xi(x, t) = \Xi^{(0)} + \sum_n \left(\Xi_n^{(1)}(x) e^{-i\omega_n t} + \text{c. c.} \right).$$

18. On adopte ici la convention suivante : l'indice d correspond aux quantités décrivant le mode de densité et l'indice p à celles décrivant le mode de polarisation.

FIGURE 1.11 – Représentation schématique du mode de densité : la courbe rouge (resp. bleue) représente la densité d’atomes dans l’état $|\uparrow\rangle$ (resp. $|\downarrow\rangle$) et la courbe noire représente la densité totale. Dans ce mode, les deux distributions ρ_\uparrow et ρ_\downarrow oscillent en phase telles que : $\rho_\uparrow(x,t) = \rho_\downarrow(x,t)$. Dans la représentation (1.47) ce mode est caractérisé par l’oscillation de la densité totale du condensat $\rho(x,t)$ et la constance de l’angle de mélange $\theta = \pi/2$.

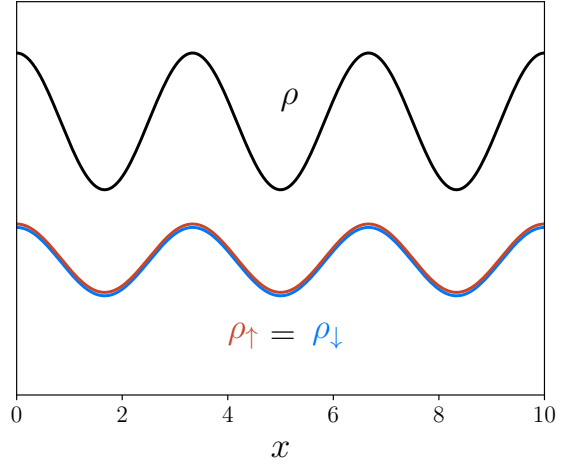
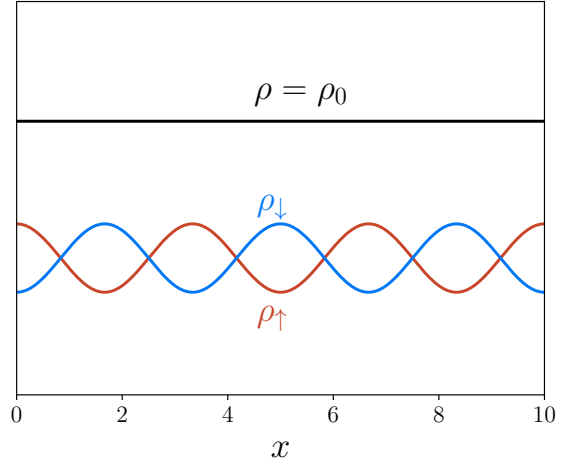


FIGURE 1.12 – Représentation schématique du mode de polarisation (la légende est définie dans la figure 1.11). Dans le mode de polarisation, les deux densités ρ_\uparrow et ρ_\downarrow oscillent en opposition de phase telles que $\rho_\uparrow + \rho_\downarrow = \rho_0$. Dans la représentation (1.47) ce mode est caractérisé par l’oscillation de l’angle de mélange du condensat $\theta(x,t)$ et la constance de la densité totale $\rho = \rho_0$.



ii. Modes de Goldstone

La séparation de la dynamique proposée dans la référence [107] en un flot *total* et un flot *relatif* trouve toute sa justification ici et correspond alors aux deux modes de propagation autorisés à travers un condensat *non polarisé* ($\theta_0 = \pi/2$). À faible énergie $k \ll 1$, ces deux modes décrivent la propagation de **phonons** d’énergie :

$$\omega_d(k) \sim \pm c_d |k| \quad \text{et} \quad \omega_p(k) \sim \pm c_p |k|, \quad (1.60)$$

avec $c_d = \sqrt{g_1 \rho_0 / 2}$ et $c_p = \sqrt{g_2 \rho_0 / 2}$. Ces deux relations de dispersion linéaires correspondent à deux modes de Goldstone et sont une conséquence directe de la **brisure spontanée de la symétrie** $U(1) \times U(1)$ du système (1.14) par l’état stationnaire (1.55). En effet, puisque les équations de Gross-Pitaevskii sont invariantes sous le changement de phase globale $\Phi \rightarrow \Phi + \text{cste}$ et sous le changement de phase relative $\phi \rightarrow \phi + \text{cste}$, l’état fondamental du condensat n’est pas défini de façon unique et un changement de phases du paramètre d’ordre ne change pas l’énergie du système. Il devient alors possible de propager des excitations d’énergies nulles correspondant ici aux phonons décrits par (1.60).

Le mode de densité $\omega_d(k)$ est à rapprocher ici du mode de Bogoliubov des condensats à *une composante* (1.35) ; expérimentalement les valeurs des coefficients non-linéaires g et g_\downarrow sont très proches (cf. la Ref. [82]) et le mode de Goldstone décrit par (1.60) est similaire à celui dérivé pour un condensats à une composante. Plus généralement, le mode

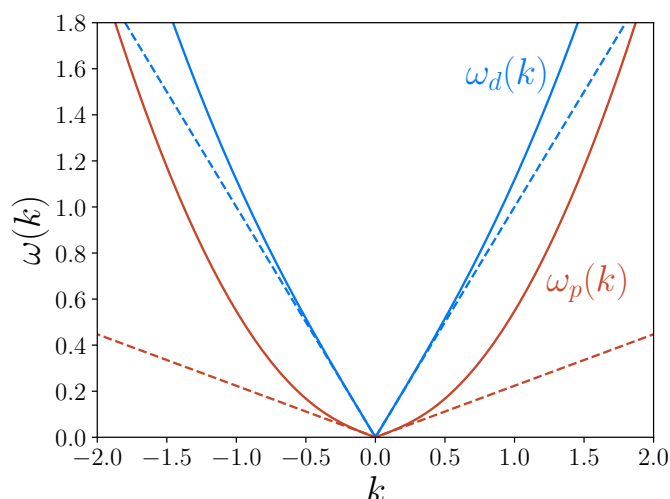


FIGURE 1.13 – Relations de dispersion avec le choix de paramètre typique : $g_1\rho_0 = 2$ et $g_2\rho_0 = 0.1$. Le mode de densité $\omega_d(k)$ est représenté en trait plein bleu (—) et le mode de polarisation $\omega_p(k)$ en trait plein rouge (—). Leur limite grande longueur d'onde $k \ll 1$ est représentée en trait pointillé (—).

de densité correspond à la dynamique *moyennée* du condensat sans distinction entre les atomes dans l'état $|\uparrow\rangle$ et les atomes dans l'état $|\downarrow\rangle$ et où les interactions sont décrites par un coefficient non-linéaire moyen : $g_1/2 = (g + g_{\uparrow\downarrow})/2$. Au contraire, le degré de liberté de polarisation autorise **un nouveau type d'excitation** à se propager à l'intérieur du condensat lié au degré de liberté interne ($\theta^{(1)} \neq 0$ et $\phi^{(1)} \neq 0$). Proche de la limite de Manakov, la vitesse du son des phonons $c_p \propto \sqrt{g - g_{\uparrow\downarrow}}$ devient très faible et ne peut être comparée aux excitations de densité rencontrées habituellement dans les condensats à une composante.

Remarque 1.4. Bien que l'on ait présenté ici le spectre de Bogoliubov pour un condensat dans son état fondamental, on peut aussi dériver la relation de dispersion des excitations du condensat dans le cas où les deux espèces sont en mouvement relatif : $\phi = v_0 x$ avec v_0 la vitesse relative entre les deux composantes. On suppose dans un souci de concision que la vitesse moyenne du condensat est nulle et que le condensat dans son état stationnaire est de densité relative nulle. En adaptant la relation dérivée dans la référence [112], les vitesses du son des modes de Goldstone sont définies par :

$$c^2 = \frac{g\rho_0}{2} + \left(\frac{v_0}{2}\right)^2 \pm \sqrt{\frac{g\rho_0 v_0^2}{2} + \left(\frac{g_{\uparrow\downarrow}\rho_0}{2}\right)^2}. \quad (1.61)$$

Pour une vitesse relative v_0 supérieure à la vitesse du son de polarisation $c_p = \sqrt{(g - g_{\uparrow\downarrow})\rho_0}$, c^2 devient négatif et le condensat développe une instabilité modulationnelle. Dans les expériences réalisées sur les états hyperfins de l'atome de ^{87}Rb , la vitesse du son de polarisation est extrêmement faible et l'instabilité modulationnelle apparaît facilement lorsque les deux espèces sont mises en mouvement l'une par rapport à l'autre comme le montrent l'expérience du groupe de P. Engels [45]. On verra dans le Chapitre 3 que les oscillations observées dans les régions instables correspondent à des ondes non-linéaires que l'on peut déterminer analytiquement proche de la limite de Manakov.

2.c. Conclusion

La dynamique du condensat de spineurs se sépare ainsi en une **dynamique de densité** et une **dynamique de polarisation**. Est-il cependant légitime de considérer cette séparation dans un régime non-perturbatif où l'approche de Bogoliubov n'est plus valide ?

La première façon de remettre en cause cette séparation est de considérer une perturbation *macroscopique* du système : $\Xi^{(1)} \sim \Xi^{(0)}$ pour laquelle les termes non-linéaires de la dynamique du condensat ne peuvent plus être linéarisés. Cependant on verra dans le Chapitre 3 que proche de la limite de Manakov la séparation en deux dynamiques distinctes est possible même **au niveau non-linéaire**.

Une des caractéristiques du mode de polarisation est la vitesse relativement faible de la propagation de ses excitations pour des coefficients inter et intra-espèce suffisamment proches (condition très souvent rencontrée expérimentalement, cf. la Ref. [82]). À cause de cette dynamique relativement lente, il devient nécessaire de calculer les corrections non-linéaires aux équations de propagation du mode de polarisation. En effet, bien que les effets non-linéaires soient négligeables pour une faible amplitude des ondes planes, ils s'accumulent avec le temps et peuvent déstabiliser la propagation du paquet d'onde à travers une **instabilité modulationnelle**. Dans le cas bien établi du condensat de Bose-Einstein à une composante, le spectre de Bogoliubov est robuste aux temps longs¹⁹. De même, le rapprochement entre le mode de densité et la dynamique d'un condensat effectif à une composante amène à penser que les ondes planes de densité présentent elles aussi une stabilité modulationnelle²⁰. D'un point de vue pratique et expérimental, la question de la stabilité modulationnelle des ondes de densité devient anecdotique au vu de la vitesse de propagation rapide des excitations de densité. Qu'en est-il cependant du mode de polarisation ? Dans le chapitre suivant on déterminera, dans un cadre général et en présence d'un couplage Rabi, la stabilité du mode de polarisation *aux temps longs* et on déterminera notamment les corrections non-linéaires du spectre de Bogoliubov.

Remarque 1.5. On n'étudiera pas plus amplement le mode de densité dans les chapitres 2 et 3. On peut mentionner ici que dans le régime des grandes longueurs d'onde, on peut dériver la correction non-linéaire de la dynamique des phonons de densité (ainsi que des phonons de polarisation). De façon générale, le **paramètre d'ordre** du condensat excité est solution d'une équation de Korteweg-de Vries modifiée :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + [c_d + c_1(\rho - \rho_0) + c_2(\rho - \rho_0)^2] \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{1}{4\sqrt{2g_1\rho_0}} \frac{\partial^3 \rho}{\partial x^3} = 0, \quad (1.62)$$

écrit ici par exemple dans le cas du mode de densité, où les coefficients c_i sont déterminés par analyse multi-échelle (cf. dans le cas des condensats à 2 composantes la Ref. [105] et l'Article 1). Dans les condensats à une composante, l'équation correspond à l'équation de Korteweg-de Vries et l'ajout d'un degré de liberté interne permet d'atteindre le régime des équations de Korteweg-de Vries modifiées prévoyant alors la propagation de nouveaux types de soliton à travers les condensats.

Il est important de souligner que l'équation dérivée ici gouverne la dynamique du paramètre d'ordre et non la propagation d'un paquet d'onde comme il le sera dérivé dans le Chapitre 2 ; en pratique les deux approches sont complémentaires et permettent d'étudier les **excitations non-linéaires** dans le régime des grandes longueurs d'onde (équation type Korteweg-de Vries) et dans le régime d'excitations d'impulsion finie (équation de propagation du paquet d'onde).

19. La hiérarchie temps longs – temps courts sera définie par la suite (cf. la Section 1.c du Chapitre 2).

20. On a montré dans Article 1 du Chapitre 2 que le mode de densité est effectivement bien stable aux temps longs.

Chapitre 2

Condensat de spineurs en présence de couplage Rabi

Sommaire

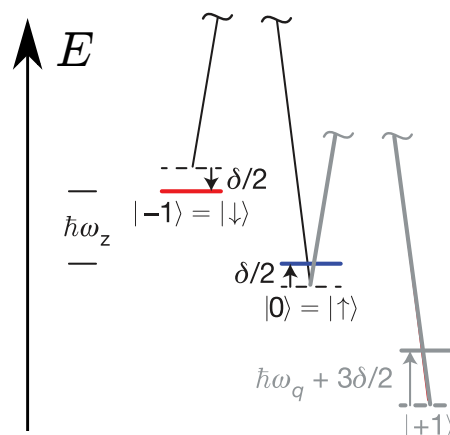
1	Propagation des excitations	33
1.a	Un système multi-phasé	33
1.b	Spectre de Bogoliubov	34
1.c	Propagation d'un paquet d'onde	37
2	Analyse multi-échelle	39
2.a	L'exemple du pendule pesant	39
2.b	Coordonnées <i>lentes</i> – <i>rapides</i>	41
2.c	Ordre linéaire	43
2.d	Ordre quadratique : propagation à la vitesse de groupe	44
2.e	Ordre cubique : effets non-linéaires	46
3	Discussion	50
3.a	Soliton-enveloppes	50
3.b	Instabilité modulationnelle	51
3.c	Résonance onde longue - onde courte	53
3.d	Génération de seconde harmonique	54
3.e	Conclusion	55
Article 1 : Nonlinear waves in coherently coupled Bose-Einstein condensates		57

L'étude de la propagation des excitations non-linéaires dans les condensats de spineurs (cf. l'Article 1) a été motivée initialement par l'expérience réalisée en 2011 au NIST [35] (puis en 2012 [68, 69]) sur les condensats couplés par **interaction spin-orbite**. Dans cette expérience, le couplage cohérent entre les deux niveaux hyperfins $|\uparrow\rangle = |m_F = -1\rangle$ et $|\downarrow\rangle = |m_F = 0\rangle$ de l'atome de ^{87}Rb est établi via une **transition Raman**. Au contraire de la transition radio-fréquence présentée précédemment (cf. la Section 1.c du Chapitre 1), la transition Raman s'accompagne d'un transfert d'impulsion des lasers Raman aux atomes dans les deux états hyperfins. Pour un désaccordage $\delta = \Delta\omega_L - \omega_Z$ suffisamment faible (cf. les définitions dans la figure 2.1), le système est bien décrit par deux niveaux et l'Hamiltonien effectif à une particule est défini par :

$$H_0 = \begin{pmatrix} \frac{p^2}{2} - \frac{\omega_Z}{2} & \frac{\Omega}{2} e^{i(2k_0x - \Delta\omega_L t)} \\ \frac{\Omega}{2} e^{-i(2k_0x - \Delta\omega_L t)} & \frac{p^2}{2} + \frac{\omega_Z}{2} \end{pmatrix}. \quad (2.1)$$

FIGURE 2.1 – Diagramme des niveaux d'énergie des états hyperfins de l'atome de ^{87}Rb tiré de l'expérience [35]. Les niveaux $|-1\rangle$ et $|0\rangle$ sont ici séparés par effet Zeeman et l'écart d'énergie entre les deux niveaux est noté $\hbar\omega_z$. Ces deux niveaux sont alors couplés de façon cohérente à l'aide de deux laser Raman dont le désaccord en fréquence est caractérisé par $\Delta\omega_L$. Les deux niveaux sont bien couplés si le désaccord $\delta = \Delta\omega_L - \omega_z$ est suffisamment faible excluant ainsi de la transition Raman vers le troisième état $|+1\rangle$ (interdite ici par l'effet Zeeman quadratique).

©2011, Nature



où k_0 est la différence de vecteurs d'onde entre les deux champs décrivant les lasers et Ω leur intensité; les quantités exprimées ici sont adimensionnées. Cet Hamiltonien est à comparer à celui dérivé pour un couplage de Rabi : la phase des oscillations $\Theta = 2k_0x - \Delta\omega_L t$ dépend maintenant de x . Puisque Ω est constant, il est plus aisé de travailler dans le référentiel tournant à l'aide du changement de variable $|\uparrow, \downarrow\rangle \rightarrow e^{\mp i\Theta} |\uparrow, \downarrow\rangle$. Dans ce nouveau référentiel, l'Hamiltonien s'écrit :

$$H_0 = \begin{pmatrix} \frac{p^2}{2} - k_0 p + \frac{k_0^2 + \delta}{2} & \frac{\Omega}{2} \\ \frac{\Omega}{2} & \frac{p^2}{2} + k_0 p + \frac{k_0^2 - \delta}{2} \end{pmatrix}, \quad (2.2)$$

qui peut être réécrit sous la forme compacte suivante :

$$H_0 = \frac{(p\mathbb{1} - k_0\sigma_z)^2}{2} + \frac{\Omega}{2}\sigma_x + \frac{\delta}{2}\sigma_z \quad (2.3)$$

où $\mathbb{1}$ est la matrice identité et $\sigma_{i \in \{x,y,z\}}$ sont les matrices de Pauli définies par :

$$\mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.4)$$

Les deux composantes du condensat sont couplées par un terme Rabi¹ mais aussi par un terme **d'interaction spin-orbite**. Cette expérience est particulièrement intéressante car elle permet d'étudier une dynamique normalement réservée aux particules de spin-1/2.

La phénoménologie des systèmes décrit par (2.3) est extrêmement riche ce qui a permis d'observer de nouveaux effets dans les condensats de Bose-Einstein mais aussi plus généralement pour les systèmes à plusieurs particules comme : un effet Hall superfluide [113], un effet Hall de spin [114] ou encore plus récemment la mise en évidence d'un état supersolide [115]. Ces différents phénomènes sont principalement reliés à la symétrie de l'Hamiltonien de spin-orbite inédite jusqu'à maintenant pour les condensats sans brisure explicite de symétrie par un réseau optique : en effet le terme $k_0\sigma_z$ brise **l'invariance par translation** du système et l'état fondamental de H_0 est maintenant décrit par un atome d'impulsion finie k_1 . En présence d'interactions, Y. Li *et al.* [116] ont montré que

1. Ce terme est aussi appelé dans la littérature **couplage Raman** en référence aux deux laser Raman utilisés pour coupler les états hyperfins de l'atome; on conservera ici la dénomination *couplage Rabi* introduite dans la Section 1.c du Chapitre 1.

l'état du condensat présente alors 3 phases différentes dépendant de la fréquence Rabi Ω ainsi que de la densité moyenne du condensat (cf. la Fig. 2.2). Pour une fréquence Rabi suffisamment basse, le système est dans la phase appelée *stripe phase* correspondant à une oscillation de la densité totale du condensat $\rho_0(x)$. Ces oscillations de la densité totale sont la conséquence directe de la brisure de l'invariance par translation du condensat et correspondent à l'interférence entre les deux états fondamentaux de (2.3) d'impulsion finie $\pm k_1$. Cette phase, qui pourrait être associée à un supersolide (cf. la Ref. [116]), a été observée très récemment dans la référence [115]. Au delà d'une certaine fréquence de Rabi, le condensat devient uniforme :

- dans un régime ferromagnétique ($\theta_0 \neq \pi/2$) où le paramètre d'ordre décrit une onde plane d'impulsion $-k_1$ ou $+k_1$ appelée *plane-wave phase*,
- ou dans un régime anti-ferromagnétique ($\theta_0 = \pi/2$) pour lequel le condensat est au repos.

Cette dernière phase, appelée *single-minimum phase*, correspond à la transition que subit le système à une particule quand le régime de Rabi devient dominant : l'état de plus basse énergie de H_0 possède alors une impulsion $k = 0$ et l'état fondamental du condensat est simplement déterminé par le couplage Rabi et l'intensité des interactions.

La présence du couplage spin-orbite modifie drastiquement la dynamique du condensat et permet d'étudier de nouvelles excitations se propageant à travers les condensats de Bose-Einstein. En effet, contrairement à l'Hamiltonien (1.1) défini au Chapitre 1, H_0 viole la symétrie $x \rightarrow -x$ et la symétrie par renversement du temps ($t \rightarrow -t$), et le spectre des excitations ne vérifie plus la symétrie $\omega(-k) = \omega(k)$. Par exemple, on représente dans la figure 2.3 le spectre des excitations du condensat dans la phase ferromagnétique dite *plane-wave*. Dans cette phase le spectre est asymétrique et le mode d'excitations de plus basse énergie (anciennement mode de densité) développe un mode de rotons comme le montre l'encart de la figure 2.3, de façon similaire au mode d'excitations de l'hélium

4 superfluide. Ce mode a été mesuré expérimentalement dans les références [117, 118]. La mise en oeuvre expérimentale d'une relation de dispersion bien spécifique constitue un des atouts majeurs des condensats de spineurs et permettent d'étudier des nouveaux régimes de dynamique. À titre d'exemple on peut mentionner l'étude très récente menée dans la référence [119] sur des effets de masse négative effective dans les condensats de Bose-Einstein devenus accessibles grâce à la courbure atypique du mode dispersion en présence de couplage spin-orbite : $\omega''(k) < 0$. Le couplage spin-orbite permet aussi d'observer de **nouvelles excitations non-linéaires** : on cite à titre d'exemple notre Article 1 où l'on montre que les fluctuations de grandes longueurs d'onde de la densité totale ρ en présence d'un couplage spin-orbite sont gouvernées par une équation de Korteweg-de Vries modifiée dont la non-linéarité peut être quartique (sous réserve d'un certain réglage des laser Raman). Ce régime de non-linéarité, jamais observé dans les condensats, permet

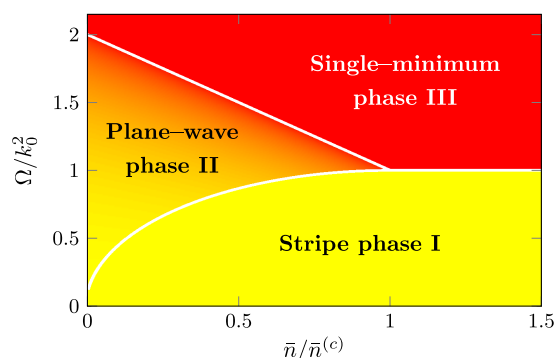
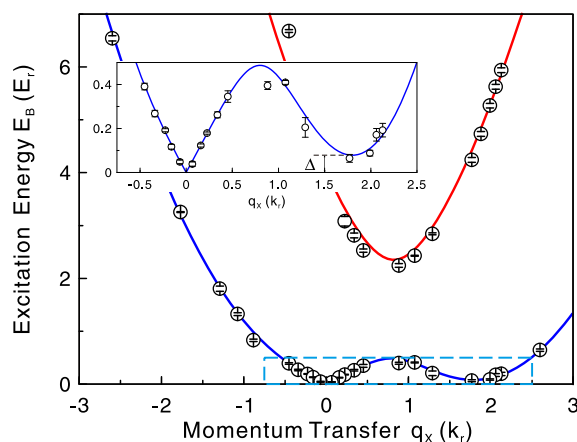


FIGURE 2.2 – Diagramme de phase du condensat en présence d'une interaction spin-orbite établi dans la Ref. [116]. Ω représente la fréquence Rabi et $\bar{n} = \int \rho dx$ la densité moyenne du condensat. ©2015, World Scientific Publishing

FIGURE 2.3 – Spectre des excitations du condensat dans la phase dite plane-wave. Les courbes en trait plein bleu et rouge correspondent aux deux modes d’excitations du condensat que l’on peut rattacher, dans une certaine limite, aux mode de densité et de polarisation respectivement. Les disques correspondent aux mesures expérimentales réalisées par [118]. L’encart correspond à un agrandissement de la relation de dispersion du mode de plus basse énergie : l’ancien mode de densité présente un mode de roton pour une impulsion finie ici égale à $q_x \simeq 1.8$.

©2015, APS



d’étudier de nouvelles structures non-linéaires. De nombreux progrès expérimentaux ont été réalisés depuis cette expérience, notamment dans la mise en place d’autres champs de jauge ; ces différents montages et mesures ne seront pas détaillés ici (cf. e.g. la revue [120]).

Dans ce chapitre, on étudiera de façon détaillée les excitations non-linéaires du mode de polarisation dans les limites : $k_0 = 0$ et $\delta = 0$. Cette étude correspond à l’analyse des excitations non-linéaires du mode de polarisation en présence de couplage spin-orbite dans la phase dite *single-minimum* : en effet, dans cette phase où le terme Rabi domine, le mode de polarisation présenté dans le Chapitre 1 continue d’exister. Durant l’étude des excitations non-linéaires de ce mode, on a montré (cf. l’Article 1) que le terme de spin-orbite n’a pas d’effet qualitatif majeur sur la dynamique non-linéaire des fluctuations de polarisation et on préférera présenter ici, dans un souci de concision, les résultats pour $k_0 = \delta = 0$. L’étude du mode de polarisation en présence seulement du couplage Rabi n’est pas anecdotique, le couplage cohérent $\Omega\sigma_x$ étant une composante essentielle de la dynamique de spin-orbite².

De plus, la présence d’un couplage Rabi permet d’enrichir l’analyse des excitations du mode de polarisation présentée au Chapitre 1 et de répondre notamment à la question de la stabilité modulationnelle mise en évidence à la fin du chapitre précédent : dans un premier temps, en présence du couplage cohérent $\Omega\sigma_x$, le condensat devient anti-ferromagnétique et l’état $\theta = \pi/2$ constitue un vrai état fondamental du condensat. En outre les excitations de polarisation deviennent massives (de masse accordable constante, cf. la Section 1.b) enrichissant ainsi la dynamique des excitations et des excitations non-linéaires. On précise ici que, bien que les calculs aient été effectués pour $\Omega \neq 0$, la limite $\Omega = 0$ est bien définie.

Le chapitre est organisé comme suit : on étudiera dans un premier temps la dynamique linéaire du condensat en déterminant le spectre des excitations. La présence du couplage cohérent n’affecte pas ici la séparation dynamique de densité - dynamique de polarisation et on pourra étudier cette dernière indépendamment des fluctuations de densité. On dérivra ensuite à l’aide d’une analyse multi-échelle la dynamique d’un paquet d’onde du mode de polarisation et on montrera que contrairement au résultat dérivé dans l’approche linéaire, le mode de densité et de polarisation sont couplés au niveau non-linéaire. Finalement on

2. De façon plus formelle, on peut montrer que la dynamique de spin-orbite est intégrée trivialement en l’absence du couplage Rabi dans la limite de Manakov, cf. la Ref. [121].

discutera l'origine physique de ce couplage.

1. Propagation des excitations

1.a. Un système multi-phasé

Dérivons dans un premier temps les équations de la dynamique du condensat dans la représentation (1.47). La fonctionnelle d'énergie du condensat en présence du couplage Rabi est définie par :

$$E[\Psi] = E_{\text{cin.}}[\Psi] + E_{\Omega}[\Psi] + E_{\text{int.}}[\Psi], \quad (2.5)$$

où l'énergie cinétique $E_{\text{cin.}}$ et l'énergie d'interaction $E_{\text{int.}}$ ont déjà été définie en fonction de Ψ par (1.9) et (1.10) et en fonction de $\Xi = (\rho, \Phi, \theta, \phi)^T$ par (1.51) et (1.52) ; E_{Ω} correspond à la contribution à l'énergie du couplage Rabi :

$$E_{\Omega} = \frac{\Omega}{2} \int dx \left(\Psi^\dagger \sigma_x \Psi \right) = \frac{\Omega}{2} \int dx \rho \sin \theta \cos \phi \quad (2.6)$$

Remarque 2.1. Ω correspond à la séparation d'énergie entre les deux état propres de H_0 et le signe de Ω n'est pas significatif dans l'expression de l'énergie ; par convention on supposera que $\Omega \geq 0$, et les résultats dérivés par la suite peuvent être adaptés pour $\Omega < 0$ par une translation de la phase relative de π : $\phi \rightarrow \phi + \pi$.

Les équations de Gross-Pitaevskii ont été dérivées précédemment [cf. les Eqs. (1.34)] et sont définies par :

$$i \frac{\partial \psi_{\uparrow, \downarrow}}{\partial t} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \psi_{\uparrow, \downarrow}}{\partial x^2} + \left(g |\psi_{\uparrow, \downarrow}|^2 + g_{\uparrow \downarrow} |\psi_{\downarrow, \uparrow}|^2 \right) \psi_{\uparrow} + \frac{\Omega}{2} \psi_{\downarrow, \uparrow}, \quad (2.7)$$

qui peuvent être réécrites dans la représentation $\Xi = (\rho, \Phi, \theta, \phi)^T$ [cf. l'Eq. (1.47)] de la façon suivante :

$$\rho_t + \frac{1}{2} \partial_x (\rho \Phi_x) - \frac{1}{2} \partial_x (\rho \phi_x \cos \theta) = 0, \quad (2.8a)$$

$$\Phi_t - \frac{\cot \theta}{2\rho} \partial_x (\rho \theta_x) + \frac{\rho_x^2}{4\rho^2} - \frac{\rho_{xx}}{2\rho} + \frac{\Phi_x^2 + \phi_x^2 + \theta_x^2}{4} + g_1 \rho + \Omega \frac{\cos \phi}{\sin \theta} = 0, \quad (2.8b)$$

$$\theta_t + \frac{1}{2} \Phi_x \theta_x + \frac{1}{2\rho} \partial_x (\rho \phi_x \sin \theta) + \Omega \sin \phi = 0, \quad (2.8c)$$

$$\phi_t + \frac{1}{2} \Phi_x \phi_x - \frac{1}{2\rho \sin \theta} \partial_x (\rho \theta_x) - g_2 \rho \cos \theta + \Omega \cos \phi \cot \theta = 0, \quad (2.8d)$$

où les coefficients non-linéaires g_i sont définis par $g_1 = g + g_{\uparrow \downarrow}$ et $g_2 = g - g_{\uparrow \downarrow}$ [cf. l'Eq. (1.54)]. La fonctionnelle d'énergie (2.5) assurant toujours la conservation du nombre total d'atomes N , l'équation de conservation du courant total (2.8a) restes inchangée [cf. l'Eq. (1.53a)].

Comme précédemment on étudie la propagation des excitations à travers un condensat dans son état fondamental. Ce calcul a été mené dans de nombreuses références [122–126] et on propose ici de l'effectuer en minimisant l'énergie du condensat (2.5) à nombre total d'atomes N fixé. L'état fondamental de l'Hamiltonien (2.3) est atteint pour un atome d'impulsion nulle $k = 0$ en absence de couplage spin-orbite³ et on déterminera l'état

3. ou pour une fréquence de Rabi suffisamment élevée, cf. le régime *single-minimum phase* présenté dans la Ref. [116].

stationnaire du condensat sous la forme :

$$\Xi^{(0)} = (\rho_0, \Phi_0(t), \theta_0, \phi_0(t))^T. \quad (2.9)$$

Les quantités (2.9) sont déterminées en minimisant la fonctionnelle :

$$E[\Xi^{(0)}] - \mu N = \int dx \rho_0 \left(\frac{\Omega}{2} \sin \theta_0 \cos \phi_0 + \frac{2g_1 + g_2}{8} \rho_0 + \frac{g_2}{8} \rho_0 \cos 2\theta_0 - \mu \right), \quad (2.10)$$

correspondant à la minimisation de l'énergie d'interaction et de l'énergie de Rabi pour un nombre total d'atomes fixé; μ correspond au potentiel chimique associé à cette conservation et on a $\Phi_0(t) = -2\mu t$. La contribution Rabi à l'énergie du condensat empêche la conservation séparée du nombre d'atomes dans l'état $|\uparrow\rangle$ et du nombre d'atomes dans l'état $|\downarrow\rangle$ et la fraction d'atomes dans chaque état caractérisée par l'angle de mélange θ_0 est déterminée par la valeur des paramètres Ω et g_2 . Le minimum de $E - \mu N$ est atteint pour :

$$\phi_0 = \pi \quad \text{et} \quad \cos \theta_0 = \begin{cases} 0 & \text{si } \Omega + g_2 \rho_0 \geq 0 \\ \pm \sqrt{1 - \left(\frac{\Omega}{g_2 \rho_0}\right)^2} & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.11)$$

et le potentiel chimique s'écrit : $\mu = g_1 - \Omega / \sin \theta_0$. La bifurcation du système pour $\Omega = -g_2$ correspond ici à l'émergence des deux points fixes de densité relative finie $(\phi_0, \cos \theta_0) = (\pi, \pm \sqrt{1 - (\Omega/g_2)^2})$ observée dans l'expérience [63] (cf. la Section 1.c du Chapitre 1). Cette nouvelle phase polarisée est atteinte pour des valeurs de g_2 négatives, correspondant à la situation d'immiscibilité entre les deux espèces en l'absence de couplage cohérent. Le couplage $\Omega \sigma_x$ stabilise ici le condensat pour des régimes d'interaction inter-espèces forts ($g_{\uparrow\downarrow} > g$) en adaptant la polarisation du condensat : $\cos \theta_0 \neq 0$. Cette stabilisation du condensat par couplage cohérent a été étudiée expérimentalement dans la Ref. [127] où il a été montré notamment que dans le régime *immiscible* $g_2 < 0$ les états polarisés restent bien stables au contraire de l'état $\rho_{\uparrow} = \rho_{\downarrow}$ pour lequel les deux espèces finissent par se séparer. On peut dériver les distributions de Thomas-Fermi dans le régime $g_2 < 0$ (cf. Annexe A), et le centre de la distribution correspond effectivement à une polarisation finie $\theta(x=0) \neq 0$.

Remarque 2.2. La transition ferromagnétique – anti-ferromagnétique correspond à une transition du second ordre associée à la divergence de la susceptibilité magnétique : en effet, à l'aide de la théorie de la réponse linéaire⁴, on montre que la susceptibilité magnétique du système dans l'état polarisé s'écrit $\chi = 2(\Omega + g_2)^{-1}$ qui diverge alors pour $\Omega = -g_2$.

1.b. Spectre de Bogoliubov

i. Polarisation de l'état stationnaire quelconque

Le spectre des excitations du système a déjà été dérivé dans de nombreuses références (cf. e.g. les Refs. [108, 122, 123, 126]); on propose ici de dériver le spectre à l'aide du paramètre d'ordre Ξ défini par (1.47). Dans les deux phases l'état fondamental du condensat est décrit par :

$$\Xi^{(0)} = (1, -2\mu t, \theta_0, \pi)^T. \quad (2.12)$$

4. On peut dériver ici la susceptibilité en déterminant l'état du système en présence d'une perturbation de la polarisation représentée dans la théorie de la réponse linéaire par contribution à l'énergie $\varepsilon \rho_0 \cos \theta$; la susceptibilité est ensuite déterminée par la limite : $\chi = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\cos \theta_0}{\varepsilon}$, cf. e.g. la Ref. [126].

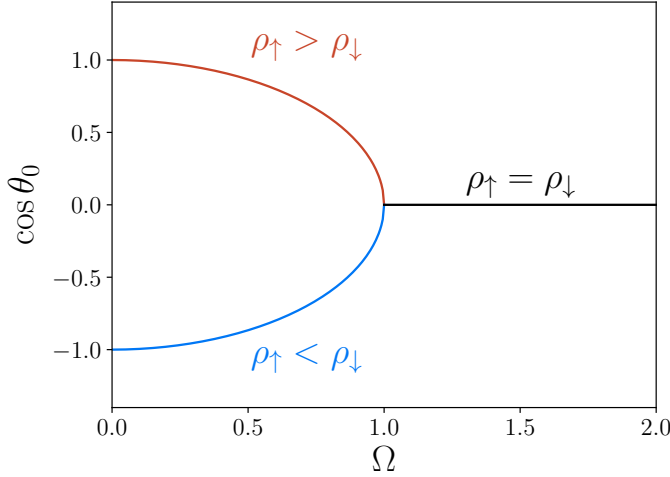


FIGURE 2.4 – Variation de la polarisation du condensat en fonction de la fréquence Rabi. À titre d'exemple on choisit les coefficients non-linéaires des équations de Gross-Pitaevskii tels que $g_2 = -1$; on observe alors que pour $\Omega < 1$, la symétrie du système se brise spontanément et le condensat devient ferromagnétique : la polarisation est alors soit positive (—), soit négative (—).

Dans un souci de concision on a supposé que la densité totale ρ_0 est égal à 1. Il est en effet toujours possible de renormaliser les fonctions d'onde : $\psi_{\uparrow,\downarrow} \rightarrow \psi_{\uparrow,\downarrow}/\sqrt{\rho_0}$. En ajoutant au paramètre d'ordre stationnaire $\Xi^{(0)}$ une petite perturbation d'amplitude $\Xi' \ll \Xi^{(0)}$:

$$\Xi(x, t) = \Xi^{(0)} + \Xi'(x, t) \quad \text{où} \quad \Xi' = (\rho'(x, t), \Phi'(x, t), \theta'(x, t), \phi'(x, t))^T, \quad (2.13)$$

on obtient après linéarisation des équations de Gross-Pitaevskii (2.8) :

$$\partial_t \rho' + \frac{1}{2} \partial_x^2 \Phi' - \frac{\cos \theta_0}{2} \partial_x^2 \phi' = 0, \quad (2.14a)$$

$$\partial_t \Phi' + g_1 \rho' - \frac{1}{2} \partial_x^2 \rho' + \Omega \frac{\cot \theta_0}{\sin \theta_0} \theta' - \frac{\cot \theta_0}{2} \partial_x^2 \theta' = 0, \quad (2.14b)$$

$$\partial_t \theta' - \Omega \phi' + \frac{\sin \theta_0}{2} \partial_x^2 \phi' = 0, \quad (2.14c)$$

$$\partial_t \phi' - g_2 \cos \theta_0 \rho' + \left(\frac{\Omega}{\sin^2 \theta_0} + g_2 \sin \theta_0 \right) \theta' - \frac{1}{2 \sin \theta_0} \partial_x^2 \theta' = 0. \quad (2.14d)$$

On introduit ici l'opérateur matriciel \mathbb{M} agissant sur le paramètre d'ordre $\Xi'(x, t)$:

$$\mathbb{M}[\partial_x, \partial_t] \equiv \begin{pmatrix} \partial_t & \frac{1}{2} \partial_x^2 & 0 & -\frac{\cos \theta_0}{2} \partial_x^2 \\ g_1 - \frac{1}{2} \partial_x^2 & \partial_t & \Omega \frac{\cot \theta_0}{\sin \theta_0} - \frac{\cot \theta_0}{2} \partial_x^2 & 0 \\ 0 & 0 & \partial_t & -\Omega + \frac{\sin \theta_0}{2} \partial_x^2 \\ -g_2 \cos \theta_0 & 0 & \left(\frac{\Omega}{\sin^2 \theta_0} + g_2 \sin \theta_0 \right) - \frac{1}{2 \sin \theta_0} \partial_x^2 & \partial_t \end{pmatrix}, \quad (2.15)$$

afin de réécrire le système (2.14) de façon plus compacte :

$$\mathbb{M}[\partial_x, \partial_t] \cdot \Xi'(x, t) = 0. \quad (2.16)$$

On remarque dans (2.15) que si l'état fondamental du système est polarisé ($\theta_0 \neq \pi/2$), le degré de liberté de densité et le degré de liberté de polarisation sont couplés **au niveau linéaire**. Au contraire, quand $\theta_0 = \pi/2$ l'opérateur \mathbb{M} devient une matrice par blocs :

$$\mathbb{M}[\partial_x, \partial_t] = \begin{pmatrix} \mathbb{M}_d[\partial_x, \partial_t] & 0 \\ 0 & \mathbb{M}_p[\partial_x, \partial_t] \end{pmatrix}. \quad (2.17)$$

où \mathbb{M}_d est une matrice 2×2 agissant sur le de liberté de densité $(\rho, \Phi)^T$ et \mathbb{M}_p une matrice 2×2 agissant sur le degré de liberté de polarisation $(\theta, \phi)^T$; ces deux matrices sont simplement définies par :

$$\mathbb{M}_d \equiv \begin{pmatrix} \partial_t & \frac{1}{2} \partial_x^2 \\ g_1 - \frac{1}{2} \partial_x^2 & \partial_t \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbb{M}_p \equiv \begin{pmatrix} \partial_t & -\Omega + \frac{1}{2} \partial_x^2 \\ \Omega + g_2 - \frac{1}{2} \partial_x^2 & \partial_t \end{pmatrix}. \quad (2.18)$$

ii. Système non-polarisé

Afin de conserver la séparation entre la dynamique de polarisation et la dynamique de densité, on étudie la propagation des excitations à travers un condensat non-polarisé :

$$\boxed{\theta_0 = \frac{\pi}{2}} \quad (2.19)$$

qui correspond en présence du couplage Rabi à l'état fondamental lorsque $\Omega + g_2 > 0$ (ou dans le cas libre décrit au Chapitre 1 à une distribution $N_\uparrow = N_\downarrow$). Afin de déterminer le spectre des excitations, on dérive la relation de dispersion des ondes planes :

$$\Xi'(x, t) = \Xi^{(1)} e^{i(kx - \omega t)} + \text{c. c.} . \quad (2.20)$$

Dans le régime non-polarisé, la séparation des deux modes de dispersion s'écrit trivialement à l'aide des matrices \mathbb{M}_d et \mathbb{M}_p :

$$\mathbb{M}_d[ik, -i\omega] \cdot \begin{pmatrix} \rho^{(1)} \\ \Phi^{(1)} \end{pmatrix} = 0 \quad \text{et} \quad \mathbb{M}_p[ik, -i\omega] \cdot \begin{pmatrix} \theta^{(1)} \\ \phi^{(1)} \end{pmatrix} = 0, \quad (2.21)$$

où la notation $\mathbb{M}[ik, -i\omega]$ correspond à la matrice $\mathbb{M}[\partial_x, \partial_t]$ pour laquelle on a substituée les opérateurs ∂_x par ik et ∂_t par $-i\omega$. Les relations de dispersion $\omega(k)$ sont déterminées par la condition de solvabilité du système (2.21) :

$$\det \mathbb{M}_d[ik, -i\omega(k)] = 0 \quad \text{ou} \quad \det \mathbb{M}_p[ik, -i\omega(k)] = 0. \quad (2.22)$$

Les solutions de cette équations sont représentées dans la Figure 2.5. La première relation de dispersion (2.22) correspond au mode de densité caractérisé par :

$$\omega_d(k)^2 = \frac{k^2}{2} \left(g_1 + \frac{k^2}{2} \right), \quad (2.23)$$

$$\text{avec : } \Xi^{(1)} = \Xi_d = \left(i \frac{k}{\sqrt{2g_1 + k^2}}, 1, 0, 0 \right)^T. \quad (2.24)$$

En présence du couplage cohérent, le mode de densité n'est pas modifié [cf. l'Eq. (1.58)] et décrit toujours à faible énergie la propagation de phonons de vitesse $c_d = \sqrt{g_1/2}$. En effet le couplage Rabi (2.6) est invariant par changement de phase globale $\Phi \rightarrow \Phi + \text{cste}$ et autorise la propagation de phonons d'énergie nulles (cf. la Section i du Chapitre 1). Plus formellement, le couplage Rabi est absent de la dynamique des perturbations de densité dans le régime non-polarisé. La seconde relation de (2.22) correspond au mode de polarisation caractérisé par :

$$\omega_p(k)^2 = \left(\frac{k^2}{2} + \Omega \right) \left(\frac{k^2}{2} + \Omega + g_2 \right), \quad (2.25)$$

$$\text{avec : } \Xi^{(1)} = \Xi_p = \left(0, 0, 1, -i \sqrt{\frac{g_2}{k^2/2 + \Omega} + 1} \right)^T. \quad (2.26)$$

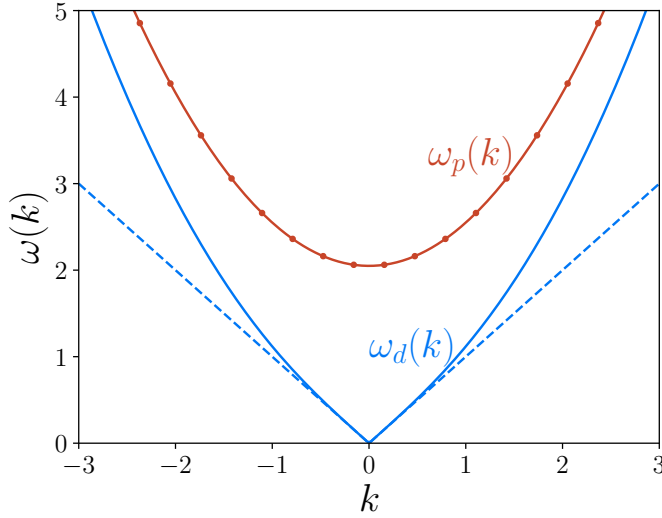


FIGURE 2.5 – Relations de dispersion avec le choix de paramètres typique : $(g_1, g_2, \Omega) = (2, 0.1, 2)$. Le mode de densité $\omega_d(k)$ est représenté en trait plein bleu (—) et sa limite grande longueur d'onde ($k \ll 1$) en pointillés bleus (---). Le mode de polarisation $\omega_p(k)$ en trait plein rouge (—). Les points rouges (•) représentent la limite décrite par l'équation (2.27).

Ce mode, contrairement au mode de polarisation (1.59) dérivé sans couplage cohérent, est quadratique et possède un minimum d'énergie :

$$\omega_p(k) \underset{k \rightarrow 0}{\sim} \sqrt{\Omega(\Omega + g_2)} + \frac{g_2 + 2\Omega}{\sqrt{\Omega(g_2 + \Omega)}} \left(\frac{k}{2}\right)^2 + \mathcal{O}(k^4). \quad (2.27)$$

Cet écart d'énergie avec le mode de densité est une conséquence directe de la dépendance du système (2.6) en la phase relative ϕ . L'état fondamental $\phi_0 = \pi$ [cf. l'Eq. (2.11)] n'est pas dégénéré (au contraire de la phase globale Φ_0) et créer une excitation de la polarisation coûte une énergie dont la valeur minimale est égale à $\sqrt{\Omega(\Omega + g_2)}$. La nature des excitations de grande longueur d'onde du mode de polarisation est différente de celles du mode de densité : au contraire des phonons d'énergie nulle qui affectent principalement la phase globale $\Xi_d(k \rightarrow 0) \simeq (0, 1, 0, 0)^T$, les excitations grandes longueurs d'onde du mode de polarisation sont massives et perturbent la densité relative du système.

On remarque dans la figure 2.5 que l'approximation (2.27) se confond avec la relation de dispersion exacte pour des paramètres typiques de l'expérience⁵ et on pourra considérer ultérieurement que (2.27) constitue une très bonne approximation de la relation de dispersion de polarisation. Plus particulièrement, la relation (2.27) permettra de définir une masse effective **positive** $\omega_p''(k) = \text{cste}$; cette masse jouera un rôle non négligeable dans l'étude de la propagation d'un paquet d'onde de polarisation ainsi que dans la détermination de la stabilité des excitations non-linéaires.

1.c. Propagation d'un paquet d'onde

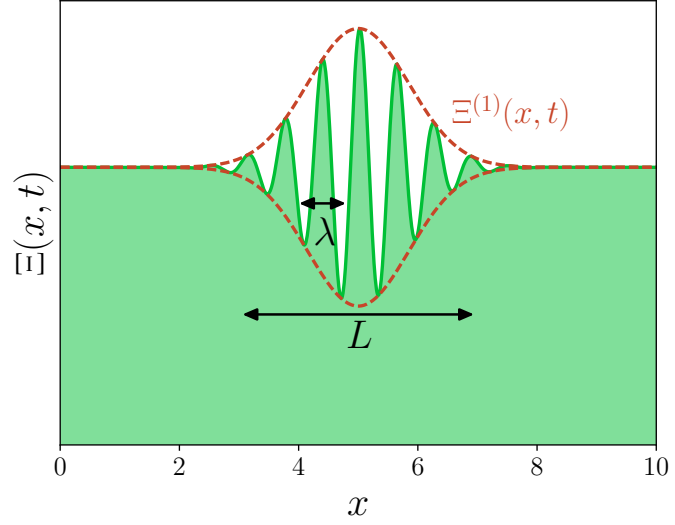
Afin d'étudier plus en détail le comportement des excitations du mode polarisation à travers le condensat, on étudie la propagation d'un paquet d'ondes défini par :

$$\Xi'(x, t) = \int dq A(q - k) \Xi_p e^{i[qx - \omega_p(q)t]} + \text{c. c.}, \quad (2.28)$$

où Ξ' correspond, on le rappelle, à une perturbation du condensat [cf. l'Eq. (2.13)]. On suppose ici que l'amplitude du paquet d'onde $A(q - k)$ est principalement localisée sur

5. Le ratio $g_2/g_1 = 0.05$ choisi ici est exagéré par rapport aux expériences discutées précédemment afin de mettre en avant les effets non-linéaires caractérisés par g_2 .

FIGURE 2.6 – Représentation schématique d'une des composantes du paquet du vecteur décrit par (2.29). L'enveloppe $\Xi^{(1)}(x, t)$ est représentée en pointillés rouges (---). La longueur d'onde de la porteuse est définie par $\lambda = 2\pi/k$ et L représente l'extension caractéristique du paquet d'onde [cf. l'Eq. (2.31)]. La séparation $\lambda \ll L$ est justifiée ici par la localisation de $A(q - k)$ autour de l'impulsion $k = 2\pi/\lambda$.



l'impulsion k . On peut alors séparer le paquet d'onde en **une onde porteuse** d'impulsion k et de pulsation $\omega_p(k)$ et **une enveloppe** $\Xi^{(1)}(x, t)$ dont les échelles de variation spatiale et temporelle sont grandes devant la longueur d'onde $2\pi/k$ et la période $2\pi/\omega$ respectivement (cf. la Fig. 2.6) :

$$\Xi'(x, t) = \underbrace{\left(\int dq A(q - k) \Xi_p e^{i[(q-k)x - (\omega_p(q) - \omega_p(k))t]} \right)}_{\Xi^{(1)}(x, t)} e^{i(kx - \omega_p(k)t)} + \text{c. c.} . \quad (2.29)$$

Afin de déterminer la dynamique de l'enveloppe, on dérive l'expression de $\Xi^{(1)}(x, t)$ définie par l'équation (2.29) par rapport au temps et en exprimant $\omega_p(q) - \omega_p(k)$ à l'aide d'un développement de Taylor⁶, on obtient :

$$i \partial_t \Xi^{(1)} = i \omega_p'(k) \partial_x \Xi^{(1)} - \frac{\omega_p''(k)}{2} \partial_x^2 \Xi^{(1)} + \mathcal{O}(\partial_x^3 \Xi^{(1)}) \quad (2.30)$$

Cette équation décrit la propagation d'un paquet d'onde à la vitesse de groupe $v_g = \omega_p'(k)$ dans un milieu dispersif ($\omega_p''(k) \neq 0$). Le développement de Taylor de $\omega_p(q)$ pour $q \rightarrow k$ suggère la séparation de dynamique temporelle en trois échelles de temps caractéristiques :

$$\tau_0 = \frac{2\pi}{\omega_p(k)} \ll \tau_1 = \frac{2\pi L}{\omega_p'(k)} \ll \tau_2 = \frac{2\pi L^2}{\omega_p''(k)}, \quad (2.31)$$

où L est la largeur caractéristique de l'enveloppe. On peut associer à chaque échelle de temps un mécanisme de propagation du paquet d'onde :

- τ_0 correspond à la période de l'onde porteuse,
- τ_1 correspond au temps nécessaire au paquet d'onde pour parcourir la distance typique $L = v_g \tau_g$,
- τ_2 correspond au temps à partir duquel les effets dispersifs deviennent important.

6. Le développement de Taylor est possible ici car on suppose que $A(q - k)$ devient nulle pour $|q - k| \gg 1$, ou autrement dit, que l'on puisse séparer le paquet d'onde en une enveloppe et une onde porteuse.

En se plaçant dans le référentiel du paquet d'onde $x = \omega'_p(k)t$, on obtient :

$$i \partial_t \Xi^{(1)} = -\frac{\omega_p''(k)}{2} \partial_x^2 \Xi^{(1)}, \quad (2.32)$$

qui correspond à l'équation de Schrödinger libre où la masse effective est ici égale à la courbure de la relation de dispersion $\omega_p''(k) > 0$. On remarque ici l'intérêt de considérer un terme de couplage Rabi : la masse des excitations est toujours définie et positive au contraire du cas *libre* ($\Omega = 0$) où il devient nécessaire de considérer l'ordre suivant du développement (2.30) pour des impulsions k trop faibles.

Cette approche linéaire devient insuffisante pour décrire la propagation du paquet d'onde pour des temps suffisamment longs. En effet, à partir du temps τ_2 les effets non-linéaires ne sont plus négligeables et l'approche linéaire utilisée pour dériver l'équation (2.30) n'est plus adéquate et il devient nécessaire de prendre en compte dans la dynamique les termes d'ordre supérieur Ξ'^2, Ξ'^3, \dots dans la dérivation de l'équation pour l'enveloppe.

2. Analyse multi-échelle

L'analyse multi-échelle est une méthode bien établie de l'analyse des équations aux dérivées partielles [128–132] et permet, à travers une séparation de la dynamique selon **différentes échelles** [cf. e.g. la hiérarchie en temps définie par (2.31)], de simplifier les équations d'évolution du système. Comme cela a été présenté dans l'introduction, cette méthode permet de dériver à partir de l'équation de Gross-Pitaevskii à une composante l'équation Korteweg-de Vries dans la limite des **grandeurs longueurs d'onde** (cf. la Ref. [133]).

Remarque 2.3. On peut mentionner à cet égard que la modulation d'un paquet d'onde se propageant selon l'équation de Korteweg-de Vries est quand à elle gouvernée par une équation de Gross-Pitaevskii : comme le remarquent V.E. Zakharov et E.A. Kuznetsov dans la référence [134], les dérivations Gross-Pitaevskii \leftrightarrow Korteweg-de Vries par analyse multi-échelle constituent une propriété de leur intégrabilité ; cette propriété est une des conséquence du caractère universel des systèmes intégrables et s'étend à d'autres équations appartenant à cette classe d'universalité.

L'intérêt réside ici en la dérivation, à partir d'un système (2.8) *a priori* non-intégrable, d'équations dont la dynamique est connue. On peut prendre comme exemple la dérivation à partir des équations de Gross-Pitaevskii couplées (1.14) de l'équation de Gardner dans la limite des grandes longueurs d'onde [105]. Les équations (1.14) ne sont pas intégrables dans le cas général au contraire de l'équation de Gardner (cf. e.g. [135]) ; la méthode des échelles multiples permet alors de dériver des solutions non-linéaires aux équations (1.14) dans la limite grandes longueurs d'onde. Plus récemment, on a montré à l'aide de cette même méthode qu'en présence de couplage spin-orbite, la dynamique décrit une autre équation Korteweg-de Vries modifiée dont la non-linéarité est quartique (cf. l'Article 1).

2.a. L'exemple du pendule pesant

Afin d'illustrer cette méthode, on reprend dans cette partie l'exemple du pendule perturbé présenté dans la référence [132]. Dans cet exemple, on s'intéresse à l'évolution d'un pendule décrit par l'équation bien connue de la dynamique :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega_0^2 \sin \theta = 0 \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \sqrt{g/l}, \quad (2.33)$$

dont la position initiale est légèrement décalée par rapport à sa position au repos $\theta = 0$:

$$\theta(t = 0) = \varepsilon \theta_1 \quad \text{et} \quad \dot{\theta}(t = 0) = 0, \quad (2.34)$$

où $\varepsilon \ll 1$ et θ_1 sont des constantes.

On peut résoudre l'équation (2.33) exactement et exprimer $\theta(t)$ à l'aide d'une fonction elliptique (cf. e.g. la Ref. [136]), mais à titre d'exemple on s'intéresse ici à l'approche perturbative de la résolution du problème qui peut être transposée à d'autres équations non-linéaires :

$$\theta(t) = \varepsilon \theta'(t), \quad (2.35)$$

où θ' est solution de l'équation de l'oscillateur harmonique au premier ordre en ε :

$$\frac{d^2 \theta'}{dt^2} + \omega_0^2 \theta' = 0, \quad (2.36)$$

L'équation (2.36) se résout simplement :

$$\theta'(t) = \theta_1 e^{-i\omega_0 t} + \text{c. c.} . \quad (2.37)$$

Afin de prendre en compte les effets non-linéaires de l'équation initiale (2.33), une première méthode consiste à considérer les développements suivants de l'équation (2.35) en ε :

$$\theta'(t) = \left(\theta_1 e^{-i\omega_0 t} + \text{c. c.} \right) + \varepsilon \Theta_2(t) + \varepsilon^2 \Theta_3(t) + \dots ,$$

où les fonctions $\Theta_2(t), \Theta_3(t), \dots$ sont déterminées par la résolution des développements de l'équation (2.33) aux ordres $\varepsilon^2, \varepsilon^3, \dots$. Le second ordre s'écrit simplement $\frac{d^2 \Theta_2}{dt^2} + \omega_0^2 \Theta_2 = 0$, qui est déjà *résolu* par la solution du premier ordre (2.37) ; on choisira par la suite la solution particulière :

$$\Theta_2(t) = 0. \quad (2.38)$$

Finalement, le troisième ordre du développement s'écrit :

$$\frac{d^2 \Theta_3}{dt^2} + \omega_0^2 \Theta_3 = \frac{\theta_1^3}{2} \left(e^{-i\omega_0 t} + \frac{1}{3} e^{-3i\omega_0 t} \right) + \text{c. c.} . \quad (2.39)$$

L'équation (2.39) possède un **terme résonnant** aussi appelé **terme séculaire**⁷ proportionnel $\propto \exp(-i\omega_0 t)$, et admet la solution particulière

$$\Theta_3(t) = i \frac{\theta_1^3}{4} t e^{-i\omega_0 t} + (\dots) e^{-3i\omega_0 t} + \text{c. c.} . \quad (2.40)$$

Cette solution diverge pour des temps $t \gg 1/\varepsilon^2$ et montre que la méthode empruntée ici pour résoudre le problème *non-linéaire* se révèle inadéquate pour des temps suffisamment longs. À partir de $t \sim 1/\varepsilon^2$, on ne peut plus négliger les variations *lentes* de l'amplitude de

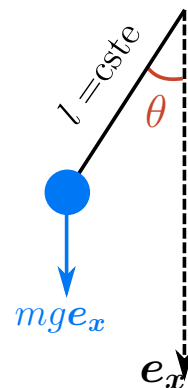


FIGURE 2.7 – Illustration du pendule : une masse m (\bullet) accrochée à une tige de longueur fixe $l = \text{cste}$ oscille autour de sa position initiale $\theta_0 = 0$. La dynamique s'écrit simplement : $m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = m g e_x$.

7. terme emprunté à la mécanique céleste

θ' fixée ici égale à la constante θ_1 [cf. l'Eq. (2.37)]. Afin de décrire au mieux les effets non-linéaires, il faut aussi prendre en compte cette variation temporelle et réécrire la solution de l'ordre ε sous la forme⁸ :

$$\boxed{\theta'(t) = \Theta_1 e^{-i\omega_0 t} + \text{c. c.} \quad \text{où} \quad \Theta_1 = \Theta_1(T_2 = \varepsilon^2 t)} \quad (2.41)$$

où $\Theta_1(T_2)$ est une fonction à déterminer respectant la condition initiale : $\Theta_1(T_2 = 0) = \theta_1$. Ce changement de variables n'affecte pas les développements ε et ε^2 décrits par (2.36) et le troisième ordre s'écrit :

$$\frac{d^2\Theta_3}{dt^2} + \omega_0^2 \Theta_3 = \left(2i\omega_0 \frac{d\Theta_1}{dT_2} + \frac{|\Theta_1|^2\Theta_1}{2} \right) e^{-i\omega_0 t} + \frac{\Theta_1^3}{6} e^{-3i\omega_0 t} + \text{c. c.} . \quad (2.42)$$

Le terme résonnant peut alors s'annuler si l'amplitude $\Theta_1(T_2)$ est solution de la **condition de solvabilité** :

$$\boxed{\frac{d\Theta_1}{dT_2} = -\frac{i}{4\omega_0} |\Theta_1|^2 \Theta_1} \quad (2.43)$$

et l'équation (2.42) est alors résolue par la solution particulière d'amplitude finie :

$$\Theta_3(t) = -\frac{\Theta_1^3}{48\omega_0^2} e^{-3i\omega_0 t} + \text{c. c.} . \quad (2.44)$$

La condition de solvabilité (2.43) est simplement remplie en définissant l'amplitude $\Theta_1(T_2)$ par :

$$\Theta_1(T_2) = \theta_1 \exp\left(-i \frac{\theta_1^2}{4\omega_0} T_2\right) , \quad (2.45)$$

qui conduit, une fois exprimée dans la bonne coordonnée : $T_2 \rightarrow \varepsilon^2 t$, à la solution

$$\theta(t) = \left(\varepsilon \theta_1 \exp\left[-i\omega_0 \left(1 + \frac{\varepsilon^2 \theta_1^2}{4\omega_0^2}\right) t\right] + \text{c. c.} \right) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) . \quad (2.46)$$

La lente oscillation de l'enveloppe est assurée par la condition $\varepsilon\theta_1 \ll \omega_0$. L'approche perturbative correspond dans ce cas à une simple correction de la pulsation de l'oscillateur harmonique. L'intérêt de cette technique réside dans l'obtention de l'équation de la dynamique de l'enveloppe du paquet d'onde (2.43). Cette équation est particulièrement triviale dans le cas du mouvement à un corps $\theta(t)$ mais devient beaucoup plus riche dans le cas de la dynamique d'un champs $\theta(x, t)$.

2.b. Coordonnées *lentes* – *rapides*

De façon similaire à l'analyse multi-échelle développée pour le pendule, on considère les ordres $\varepsilon^2, \varepsilon^3, \dots$ du traitement perturbatif des équations de Gross-Pitaevskii négligés lors de la détermination du spectre des excitations en définissant :

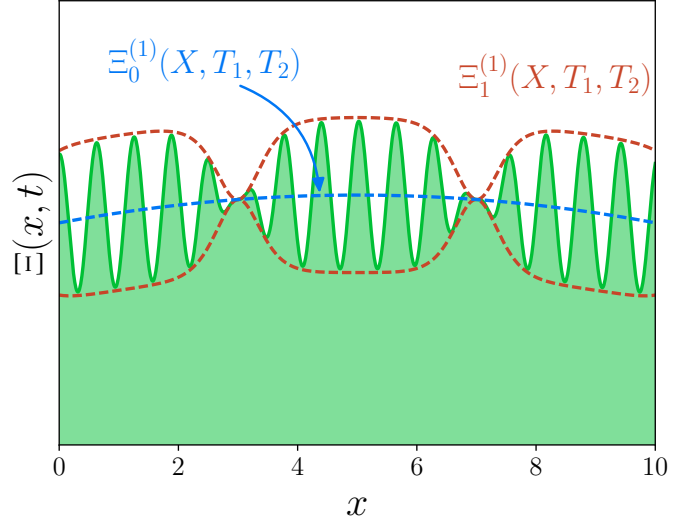
$$\Xi(x, t) = \Xi^{(0)} + \Xi'(x, t) \quad \text{avec} \quad \Xi'(x, t) = \sum_{n \geq 1} \varepsilon^n \Xi^{(n)}(x, t, X, T_1, T_2) \quad (2.47)$$

où on introduit le petit paramètre $\varepsilon \ll 1$ pour caractériser la faible amplitude de la perturbation. La perturbation $\Xi^{(1)}(x, t, X, T_1, T_2)$ d'amplitude ε se sépare en deux contributions :

$$\Xi^{(1)}(x, t, X, T_1, T_2) = \Xi_0^{(1)}(X, T_1, T_2) + \left(\Xi_1^{(1)}(X, T_1, T_2) e^{i\beta(x, t)} + \text{c. c.} \right) , \quad (2.48)$$

8. Il faudrait en théorie prendre en compte la variation de Θ_1 en fonction de $T_1 = \varepsilon t$ (ce que l'on fera par la suite), mais on trouverait ici dans le développement à l'ordre ε^2 que $\frac{d\Theta_1}{dT_1} = 0$.

FIGURE 2.8 – Représentation schématique de l'ansatz défini par l'Eq. (2.48). L'enveloppe $\Xi_1^{(1)}$ est représentée en pointillés rouges (---) et la lente modulation de l'état stationnaire $\Xi_0^{(1)}$ est représentée en pointillés bleus (---). L'analyse multi-échelle consiste à déterminer les équations de la dynamique des champs $\Xi_0^{(1)}$ et $\Xi_1^{(1)}$.



où $\Xi_0^{(1)}(X, T_1, T_2) \in \mathbb{R}^4$ est un vecteur *constant* de composantes :

$$\Xi_0^{(1)} = \left(\rho_0^{(1)}, \Phi_0^{(1)}, \theta_0^{(1)}, \phi_0^{(1)} \right), \quad (2.49)$$

et $\Xi_1^{(1)}(X, T_1, T_2) \in \mathbb{C}^4$ un vecteur *enveloppe* de composantes :

$$\Xi_1^{(1)} = \left(\rho_1^{(1)}, \Phi_1^{(1)}, \theta_1^{(1)}, \phi_1^{(1)} \right). \quad (2.50)$$

D'une manière générale, les champs ou les vecteurs dénotés par $\Lambda_k^{(n)}$ dépendent des coordonnées (X, T_1, T_2) . Suivant la convention introduite par (2.48), l'indice k indique que $\Lambda_k^{(n)}$ correspond à l'amplitude d'une onde $e^{ik\beta}$ et l'exposant n indique que cette amplitude contribue à la correction d'ordre ε^n de la solution (2.47). La variation rapide du paquet d'onde est décrite par la phase β définie par :

$$\beta(x, t) \equiv kx - \omega_p(k)t \quad (2.51)$$

et la variation lente des amplitudes $\Xi_0^{(1)}(X, T_1, T_2)$ et $\Xi_1^{(1)}(X, T_1, T_2)$ par les coordonnées *lentes* :

$$X = \varepsilon x, T_1 = \varepsilon t \quad \text{et} \quad T_2 = \varepsilon^2 t \quad (2.52)$$

Dans ces nouvelles coordonnées, les dérivations par rapport à x et à t s'écrivent :

$$\partial_x = k \partial_\beta + \varepsilon \partial_X \quad \text{et} \quad \partial_t = -\omega_p(k) \partial_\beta + \varepsilon \partial_{T_1} + \varepsilon^2 \partial_{T_2}. \quad (2.53)$$

Au contraire du paquet d'onde décrit par l'expression (2.29), l'ansatz (2.48) décrit la propagation d'un paquet d'onde dont l'enveloppe $\Xi_1^{(1)}(X, T_1, T_2)$ varie lentement sur un état stationnaire lui aussi lentement modulé $\Xi_0^{(1)}(X, T_1, T_2)$. On verra que le terme $\Xi_0^{(1)}$ est nécessaire à la consistance de l'analyse multi-échelle et qu'il correspond à l'interaction non-linéaire entre les excitations du mode de polarisation et les phonons du mode de densité. De façon similaire à la dérivation de la dynamique du pendule, les équations sur l'enveloppe $\Xi_1^{(1)}$ et sur la *constante* $\Xi_0^{(1)}$ de la perturbation sont obtenues en éliminant les termes résonnants apparaissant dans le développement des équations de Gross-Pitaevskii (2.8) aux ordres $\varepsilon^{n \geq 2}$.

Remarque 2.4. l'analyse multi-échelle se base sur la même séparation en échelle de temps que l'analyse de Fourier du paquet d'onde (2.31). Dans cette analyse, la hiérarchie : $\tau_0 \ll \tau_1 \ll \tau_2$ est incluse dans la dynamique par la définition des variables t, T_1 et T_2 par (2.52), et l'élimination des termes résonants (apparaissant aux temps longs T_1 et T_2) permet alors de trouver les corrections non-linéaires de l'équation du paquet d'onde (2.30).

2.c. Ordre linéaire

Le développement à l'ordre ε des équations de Gross-Pitaevskii (2.8) s'écrit⁹ :

$$\mathbb{M}[0, 0] \cdot \Xi_0^{(1)}(X, T_1, T_2) + \left(\mathbb{M}[ik, -i\omega_p(k)] \cdot \Xi_1^{(1)}(X, T_1, T_2) e^{i\beta(x,t)} + \text{c. c.} \right) = 0, \quad (2.54)$$

où on a utilisé la simplification :

$$\mathbb{M}[\partial_x, \partial_t] \cdot \left(\Xi_n^{(1)} e^{ni\beta(x,t)} \right) = \left(\mathbb{M}[nik, -ni\omega] \cdot \Xi_1^{(1)} \right) e^{ni\beta(x,t)}. \quad (2.55)$$

Dans un souci de concision, on introduit la notation suivante :

$$\mathbb{M}_n \equiv \mathbb{M}[nik, -ni\omega_p(k)], \quad (2.56)$$

et en identifiant les coefficients des ondes planes $e^{in\beta}$ de l'équation (2.54), l'ordre ε s'écrit :

$$\boxed{\mathbb{M}_0 \cdot \Xi_0^{(1)}(X, T_1, T_2) = 0} \quad (2.57a)$$

$$\boxed{\mathbb{M}_1 \cdot \Xi_1^{(1)}(X, T_1, T_2) = 0} \quad (2.57b)$$

Par définition du mode de polarisation, seule \mathbb{M}_1 possède un noyau non vide : $\det \mathbb{M}_1 = 0$ et l'équation (2.57b) a pour solution

$$\Xi_1^{(1)}(X, T_1, T_2) = \Xi_p \theta_1^{(1)}(X, T_1, T_2), \quad (2.58)$$

où Ξ_p est définie par le vecteur propre (2.25) et $\theta_1^{(1)}$ reste une amplitude à déterminer. En utilisant la séparation par blocs introduite précédemment, on peut écrire la matrice \mathbb{M}_0 de la façon suivante :

$$\mathbb{M}_0 = \begin{pmatrix} \mathbb{M}_d[0, 0] & 0 \\ 0 & \mathbb{M}_p[0, 0] \end{pmatrix}. \quad (2.59)$$

Bien que $(k, \omega) = (0, 0)$ ne corresponde pas à une excitation du mode de polarisation (on rappelle qu'il faut une énergie minimum $\sqrt{\Omega(\Omega + g_2)}$ pour exciter le mode de polarisation), cette énergie correspond à celle d'un phonon de densité de grande longueur d'onde $k \rightarrow 0$. L'équation (2.57a) possède alors une solution non nulle $\propto \Xi_d(k \rightarrow 0)$ [cf. l'Eq. (1.58)] et on obtient :

$$\Xi_0^{(1)}(X, T_1, T_2) = (0, 1, 0, 0)^T \Phi_0^{(1)}(X, T_1, T_2). \quad (2.60)$$

D'après les expressions (2.58) et (2.60), les composantes $\Phi_1^{(1)}$ du vecteur **enveloppe** et $\theta_0^{(1)}$ du vecteur **constant** sont nulles, et on pourra définir sans ambiguïté la notation plus concise :

$$\boxed{\bar{\Phi} \equiv \Phi_0^{(1)}(X, T_1, T_2) \quad \text{et} \quad \tilde{\theta} \equiv \theta_0^{(1)}(X, T_1, T_2)} \quad (2.61)$$

9. Cet ordre correspond aux équations déjà dérivées lors de la linéarisation du système (2.14)

Les notations $\bar{\Phi}$ et $\tilde{\theta}$ sont là pour rappeler que $\bar{\Phi}$ ne module par une onde porteuse au contraire de $\tilde{\theta}$. Au final, l'ordre linéaire de l'approche perturbative est résolu par :

$$\Xi^{(1)}(x, t, X, T_1, T_2) = \left(0, \bar{\Phi}(X, T_1, T_2), \tilde{\theta} e^{i\beta(x,t)} + c. c., i \Delta \tilde{\theta} e^{i\beta(x,t)} + c. c. \right)^T, \quad (2.62)$$

où on a introduit ici le coefficient Δ défini par :

$$\Delta(k) \equiv \sqrt{\frac{g_2}{k^2/2 + \Omega} + 1}. \quad (2.63)$$

2.d. Ordre quadratique : propagation à la vitesse de groupe

i. Solution particulière

À l'ordre ε^2 , les équations de Gross-Pitaevskii s'écrivent :

$$\mathbb{M} \cdot \Xi^{(2)}(x, t, X, T_1, T_2) = C_0(X, T_1, T_2) + \sum_{n=1}^2 \left(C_n(X, T_1, T_2) e^{ni\beta(x,t)} + c. c. \right), \quad (2.64)$$

où $C_0(X, T_1, T_2)$, $C_1(X, T_1, T_2)$ et $C_2(X, T_1, T_2)$ sont des coefficients lentement modulés :

$$C_0 = \left(0, \partial_{T_1} \bar{\Phi} + g_2 |\tilde{\theta}|^2, 0, 0 \right)^T, \quad (2.65a)$$

$$C_1 = \left(0, 0, \partial_{T_1} \tilde{\theta} + k \Delta \partial_X \tilde{\theta}, i \Delta \partial_{T_1} \tilde{\theta} + i k \partial_X \tilde{\theta} \right)^T, \quad (2.65b)$$

$$C_2 = \left(i \Delta k^2 \tilde{\theta}^2, \left[\frac{k^2/2 - \Omega}{k^2/2 + \Omega} \frac{g_2}{2} - \frac{k^2}{2} - \Omega \right] \tilde{\theta}^2, 0, 0 \right)^T. \quad (2.65c)$$

L'équation (2.64) a pour solution particulière **non-résonante** le vecteur de la forme suivante :

$$\Xi_{\text{part.}}^{(2)}(x, t, X, T_1, T_2) = \Xi_0^{(2)}(X, T_1, T_2) + \sum_{n=1}^2 \left(\Xi_n^{(2)}(X, T_1, T_2) e^{ni\beta(x,t)} + c. c. \right), \quad (2.66)$$

où $\Xi_0^{(2)}$, $\Xi_1^{(2)}$ et $\Xi_2^{(2)}$ sont des fonctions de (X, T_1, T_2) à déterminer. En identifiant les coefficient des ondes planes $e^{in\beta}$ de l'équation (2.64), on obtient les équations sur les champs $\Xi_0^{(2)}$, $\Xi_1^{(2)}$ et $\Xi_2^{(2)}$:

$$\mathbb{M}_0 \cdot \Xi_0^{(2)}(X, T_1, T_2) = C_0(X, T_1, T_2) \quad (2.67a)$$

$$\mathbb{M}_1 \cdot \Xi_1^{(2)}(X, T_1, T_2) = C_1(X, T_1, T_2) \quad (2.67b)$$

$$\mathbb{M}_2 \cdot \Xi_2^{(2)}(X, T_1, T_2) = C_2(X, T_1, T_2) \quad (2.67c)$$

Le déterminant de \mathbb{M}_2 ne s'annulant pas uniformément, l'équation (2.67c) se résout immédiatement par :

$$\Xi_2^{(2)}(X, T_1, T_2) = \mathbb{M}_2^{-1} C_2(X, T_1, T_2). \quad (2.68)$$

ii. **Élimination des termes résonants**

Au contraire, puisque $\det \mathbb{M}_0 = \det \mathbb{M}_1 = 0$, les équations (2.67a) et (2.67b) ne sont pas nécessairement solubles et il faut imposer le condition de solvabilité :

$$C_0(X, T_1, T_2) \in \text{Im } \mathbb{M}_0 \quad \text{et} \quad C_1(X, T_1, T_2) \in \text{Im } \mathbb{M}_1 . \quad (2.69)$$

Les conditions (2.69) assurent ainsi que la solution **non-résonante** (2.66) existe et peuvent être rapprochées de la condition (2.43) de l'exemple de l'oscillateur perturbé. Les conditions sont ici moins triviales car l'opérateur linéaire \mathbb{M} est matriciel, au contraire de $\frac{d^2}{dt^2} + \omega_0^2$. Afin d'explicitier ces deux conditions, on rappelle l'équivalence suivante :

$$C_i \in \text{Im } \mathbb{M}_i \Leftrightarrow C_i \in \left(\text{Ker } \mathbb{M}_i^T \right)^\perp , \quad (2.70)$$

où $\text{Im } \mathbb{M}_i$ correspond à l'espace image de \mathbb{M}_i et $\text{Ker } \mathbb{M}_i^T$ au noyau de \mathbb{M}_i^T . Le noyau de \mathbb{M}_0^T étant dirigé selon le vecteur :

$$L_0 = (1, 0, 0, 0)^T , \quad (2.71)$$

la condition de solvabilité sur C_0 (2.69) est ici trivialement vérifiée :

$$L_0^T \cdot C_0(X, T_1, T_2) \equiv 0 , \quad (2.72)$$

C_0 étant bien dans l'espace image de \mathbb{M}_0 , on choisit la solution particulière de (2.67a) suivante :

$$\Xi_0^{(2)} = \left(\frac{1}{g_1} \partial_{T_1} \bar{\Phi} + \frac{g_2}{g_1} |\tilde{\theta}|^2, 0, 0, 0 \right)^T . \quad (2.73)$$

Le noyau de \mathbb{M}_1^T est dirigé, quant à lui, selon le vecteur :

$$L_1 = (0, 0, 1, -i\Delta) , \quad (2.74)$$

et la condition de solvabilité sur C_1 (2.69) s'écrit :

$$\boxed{L_1^T \cdot C_1(X, T_1, T_2) = 0 \Leftrightarrow \partial_{T_1} \tilde{\theta} + \omega'_p(k) \partial_X \tilde{\theta} = 0} \quad (2.75)$$

Cette condition, au contraire de (2.72), n'est pas trivialement respectée et correspond à la propagation du paquet d'onde à la vitesse de groupe $\omega'_p(k)$. En supposant que le paquet d'onde se propage bien à la vitesse de groupe $\omega'_p(k)$, on définit la solution particulière de (2.67b) :

$$\Xi_1^{(2)} = \left(0, 0, \frac{ikg_2}{\omega_p(k)^2} \partial_X \tilde{\theta}, 0 \right)^T . \quad (2.76)$$

Jusqu'à maintenant les équations dérivées correspondent à celles déterminées durant l'analyse de Fourier et on aurait pu simplifier l'analyse en travaillant dans le référentiel se déplaçant à la vitesse de groupe du paquet d'onde. On préfère présenter l'analyse *systematique* de la méthode multi-échelle qui consiste à dériver les dynamiques aux temps $T_1 = \varepsilon t$, $T_2 = \varepsilon^2 t$, ... et de clore la dérivation à la première correction non-linéaire rencontrée.

iii. Solution générale

La solution non-résonante (2.66) n'est pas unique et est définie à une solution homogène de l'équation (2.64) près :

$$\Xi_{\text{hom.}}^{(2)}(x, t, X, T_1, T_2) = \Pi_0^{(2)} + \left(\Pi_0^{(2)} e^{i\beta} + \text{c. c.} \right), \quad (2.77)$$

$$\text{avec } \mathbb{M}_i \cdot \Pi_i^{(2)}(X, T_1, T_2) = 0. \quad (2.78)$$

Bien que ces solutions existent, elles restent d'ordre ε^2 et sont négligeables par rapport à l'ordre précédent $\Xi^{(1)}$ d'amplitude ε . Dans la méthode des échelles multiples, la résolution des ordres supérieurs $\Xi^{(2)}, \Xi^{(3)}, \dots$ est nécessaire uniquement à la détermination des conditions de solvabilité régissant la dynamique des enveloppes $\Xi_0^{(1)}$ et $\Xi_1^{(1)}$ et on peut se limiter dans la suite à considérer seulement la solution particulière¹⁰ :

$$\Xi^{(2)}(x, t, X, T_1, T_2) = \Xi_{\text{part.}}^{(2)}(x, t, X, T_1, T_2). \quad (2.79)$$

2.e. Ordre cubique : effets non-linéaires

Le développement à l'ordre ε^3 s'écrit :

$$\mathbb{M} \cdot \Xi^{(3)}(x, t, X, T_1, T_2) = D_0(X, T_1, T_2) + \sum_{i=1}^3 \left(D_n(X, T_1, T_2) e^{ni\beta(x,t)} + \text{c. c.} \right), \quad (2.80)$$

où les composantes du vecteur *constant* $D_0(X, T_1, T_2)$ sont définies par :

$$D_{0,\rho} = \frac{k((g_1 + g_2)(k^2 + 2\Omega + g_2) + g_1g_2)}{2g_1\omega_p(k)} \partial_X |\tilde{\theta}|^2 + \frac{1}{2} \partial_X^2 \bar{\Phi} - \frac{1}{g_1} \partial_{T_1}^2 \bar{\Phi}, \quad (2.81)$$

$$D_{0,\Phi} = \frac{ig_2^2 k}{2\omega_p^2(k)} \partial_X |\tilde{\theta}|^2 + \partial_{T_2} \bar{\Phi}, \quad (2.82)$$

$$D_{0,\theta} = D_{0,\phi} = 0, \quad (2.83)$$

et les composantes du vecteur enveloppe $D_1(X, T_1, T_2)$ par :

$$D_{0,\rho} = D_{0,\Phi} = 0, \quad (2.84)$$

$$D_{0,\theta} = \partial_{T_2} \tilde{\theta} + iP(k) |\tilde{\theta}|^2 \tilde{\theta} - i \frac{8g_2\Omega(g_2 + k^2 + 2\Omega) + (k^2 + 2\Omega)^3}{16\omega_p^3(k)} \partial_X^2 \tilde{\theta} + \frac{ik}{2} \tilde{\theta} \partial_X \bar{\Phi}, \quad (2.85)$$

$$D_{0,\phi} = i\Delta \partial_{T_2} \tilde{\theta} + Q(k) |\tilde{\theta}|^2 \tilde{\theta} + \frac{\omega_p^2(k) + k^2 g_2}{2\omega_p^2(k)} \partial_X^2 \tilde{\theta} + \tilde{\theta} \left(-\frac{\Delta k}{2} \partial_X \bar{\Phi} + \frac{g_2}{g_1} \partial_{T_1} \bar{\Phi}^{(1)} \right). \quad (2.86)$$

Les polynômes $P(k)$ et $Q(k)$ introduits dans les expressions (2.85) et (2.86) respectivement sont définis par :

$$P(k) \equiv \frac{-\sqrt{2g_2 + k^2 + 2\Omega}}{4(k^2 + 2\Omega)^{3/2} F(k)} \times \left[(k^2 + 2\Omega) 4g_2 (-2g_2\Omega + k^4 - 4k^2\Omega - 4\Omega^2) + (k^2 + 2\Omega)^2 (3k^2 + 2\Omega) (k^2 - 2\Omega) + 2g_1 k^2 (4g_2\Omega + (k^2 + 2\Omega)^2) \right],$$

10. De façon similaire, on a considéré dans le cas du pendule perturbé la solution particulière : $\Theta_2(t) = \Theta_{2,\text{part.}}(t) \equiv 0$ [cf. l'Eq. (2.38)].

$$Q(k) \equiv \frac{1}{4g_1(k^2 + 2\Omega)F(k)} \times \left[-8g_2^3(k^2 + 2\Omega)^2 + 4g_2^2g_1(5k^4 - 2k^2\Omega - 8\Omega^2) \right. \\ \left. + 4g_2^2(k^2 + 2\Omega)(3k^2 + 2\Omega)(k^2 - 2\Omega) + 2g_1^2g_2(6k^4 + 8k^2\Omega) \right. \\ \left. - g_1(k^2 + 2\Omega)^2(2g_1k^2 + (3k^2 + 2\Omega)(k^2 - 2\Omega)) \right. \\ \left. + 2g_1g_2(k^2 + 2\Omega)(7k^4 - 4k^2\Omega - 4\Omega^2) \right],$$

où le coefficient au dénominateur F est défini par : $F(k) \equiv -2g_2(k^2 + 2\Omega) + 2g_1k^2 + (3k^2 + 2\Omega)(k^2 - 2\Omega)$. La détermination des vecteurs D_2 et D_3 n'est pas nécessaire, les conditions de solvabilité sur D_0 et D_1 étant suffisantes pour déterminer la dynamique des fonctions $\bar{\Phi}$ et $\tilde{\theta}$. Comme précédemment une solution particulière non-résonante de (2.80) s'écrit :

$$\Xi^{(3)}(x, t, X, T_1, T_2) = \Xi_0^{(3)}(X, T_1, T_2) + \sum_{n=1}^3 \left(\Xi_n^{(3)}(X, T_1, T_2) e^{ni\beta(x,t)} + \text{c. c.} \right), \quad (2.87)$$

et puisque $\det \mathbb{M}_0$ et $\det \mathbb{M}_1$ s'annulent uniformément, l'existence de cette solution est toujours contrainte par les conditions de solvabilité suivantes (cf. la Section 2.d) :

$$L_0^T \cdot D_0(X, T_1, T_2) = 0 \quad \text{et} \quad L_1^T \cdot D_1(X, T_1, T_2) = 0, \quad (2.88)$$

où L_0 et L_1 sont les vecteurs définis par (2.71) et (2.74).

i. Couplage non-linéaire entre le mode de densité et le mode de polarisation

À l'inverse de la condition déterminée à l'ordre ε^2 , la première condition de (2.88) n'est pas nécessairement remplie et s'écrit :

$$\partial_{T_1}^2 \bar{\Phi} - \frac{g_1}{2} \partial_X^2 \bar{\Phi} = S(k) \partial_X |\tilde{\theta}|^2 \quad (2.89)$$

où le facteur $S(k)$ est défini par :

$$S(k) \equiv \frac{(g_1 + g_2)(k^2 + 2\Omega + g_2) + g_1g_2}{2\omega_p(k)/k}. \quad (2.90)$$

On reconnaît dans le membre de gauche de l'équation (2.89) l'équation de propagation d'un paquet d'onde composé de phonons (cf. la Section 1.b) :

$$\omega_d(k) \underset{k \rightarrow 0}{\sim} \sqrt{g_1/2} |k| \quad \text{et} \quad \Xi_d(k) \underset{k \rightarrow 0}{\sim} (0, 1, 0, 0)^T. \quad (2.91)$$

Au contraire de l'approche linéaire, l'approche multi-échelle montre qu'au temps caractéristique des effets dispersifs (c.à.d. $t \sim 1/\varepsilon^2$) on ne peut plus découpler la dynamique de densité (caractérisée ici par la perturbation du potentiel vitesse $\bar{\Phi}$) de la dynamique de polarisation. Dans un premier temps on cherche une solution particulière $\bar{\Phi}_{\text{part.}}$ de l'équation (2.89) localisée au niveau du paquet d'onde d'enveloppe $\tilde{\theta}$, c.à.d. une solution de (2.89) se propageant à la vitesse de groupe du mode de polarisation :

$$\partial_{T_1} \bar{\Phi}_{\text{part.}} + \omega'_p(k) \partial_X \bar{\Phi}_{\text{part.}} = 0. \quad (2.92)$$

L'équation (2.89) se simplifie et s'écrit après intégration :

$$\bar{\Phi}_{\text{part.}}(X, T_1, T_2) = \frac{S(k)}{\omega'_p(k)^2 - c_d^2} \int dX |\tilde{\theta}(X, T_1, T_2)|^2 \quad (2.93)$$

où on a introduit la vitesse du son de densité $c_d = \sqrt{g_1/2}$. La solution (2.93) n'est pas unique et est définie à la solution homogène près :

$$\bar{\Phi}_{\text{hom.}}(X, T_1, T_2) = f\left(X \pm \frac{g_1}{2}T_1\right), \quad (2.94)$$

où f est une fonction quelconque. La solution homogène correspond ici à l'excitation des phonons de densité, indépendamment du couplage non-linéaire avec le mode de polarisation et peut être négligée par la suite :

$$\bar{\Phi}(X, T_1, T_2) = \bar{\Phi}_{\text{part.}}(X, T_1, T_2). \quad (2.95)$$

Remarque 2.5. L'intégrale définie précédemment diverge pour $X \rightarrow \pm\infty$ dans le cas où l'enveloppe $\tilde{\theta}(X, T_1, T_2)$ est une constante et semble contredire alors l'approche perturbative de l'analyse multi-échelle. Cependant comme il a été évoqué précédemment, la dynamique du condensat [cf. les Eqs. (2.8a–2.8d)] dépend uniquement du gradient de la phase globale $U = \partial_x \bar{\Phi}$ qui reste fini même dans le cas où $\bar{\Phi}$ croît linéairement avec X .

ii. Équation non-linéaire de Schrödinger

En prenant en compte que la perturbation de *grande longueur d'onde* du mode de densité $\bar{\Phi}$ se déplace avec le paquet d'onde [cf. l'Eq. (2.92)], la deuxième condition de l'équation (2.88) s'écrit :

$$i \partial_{T_2} \tilde{\theta} = -\frac{\omega_p''(k)}{2} \partial_X^2 \tilde{\theta} + \left(P(k) - \frac{Q(k)}{\Delta}\right) \frac{|\tilde{\theta}|^2 \tilde{\theta}}{2} + \left(1 + \frac{g_2}{g_1} \frac{k^2 + 2\Omega + g_2}{k^2 + 2\Omega + 2g_2}\right) \frac{k \tilde{\theta}}{2} \partial_X \bar{\Phi}. \quad (2.96)$$

La dynamique de l'enveloppe du paquet d'onde s'avère plus riche que celle déterminée par l'approche linéaire. En effet, s'ajoute au terme dispersif $\partial_X^2 \tilde{\theta}$:

- un terme non-linéaire dû aux interactions entre les excitations du mode de polarisation $\propto |\tilde{\theta}|^2 \tilde{\theta}$. Ce terme non-linéaire provient directement des termes constants C_0 et C_2 [définis par les expressions (2.65a) et (2.65c)] correspondant respectivement à l'annihilation de deux excitations $-\beta + \beta$ et à la génération de la seconde harmonique $\beta + \beta$,
- un terme non-linéaire dû à l'interaction entre le mode de densité aux grandes longueurs d'onde et le mode de polarisation $\propto \tilde{\theta} \partial_X \bar{\Phi}$.

Le système formé des équations (2.89) et (2.96) correspond plus généralement au système de Zakharov [137] dérivé initialement pour décrire la propagation des ondes de Langmuir à l'intérieur des plasmas ionisés. À l'aide de la solution déterminée précédemment (2.95), on peut réécrire le couplage $\tilde{\theta} \partial_X \bar{\Phi}$ en fonction de $\tilde{\theta}$ seulement et introduire ainsi pour $\tilde{\theta}$ l'équation **non-linéaire de Schrödinger**¹¹ suivante :

$$i \partial_{T_2} \tilde{\theta} = -\frac{\omega_p''(k)}{2} \partial_X^2 \tilde{\theta} + g_{\text{eff}}(k) |\tilde{\theta}|^2 \tilde{\theta} \quad (2.97)$$

où le coefficient non-linéaire effectif $g_{\text{eff}}(k)$ dépendant de l'impulsion de la porteuse (cf. la Fig. 2.9) est défini par $g_{\text{eff}}(k) \equiv g_p(k) + g_\Phi(k)$ avec :

$$g_p(k) = \frac{1}{2} \left(P(k) - \frac{Q(k)}{\Delta}\right), \quad (2.98)$$

$$g_\Phi(k) = \frac{k}{2} \left(1 + \frac{g_2}{g_1} \frac{k^2 + 2\Omega + g_2}{k^2 + 2\Omega + 2g_2}\right) \frac{S(k)}{\omega_p'(k)^2 - g_1/2}. \quad (2.99)$$

11. On utilisera la dénomination équation non-linéaire de Schrödinger afin de faire la distinction avec les équations de Gross-Pitaevskii initiales (2.8).

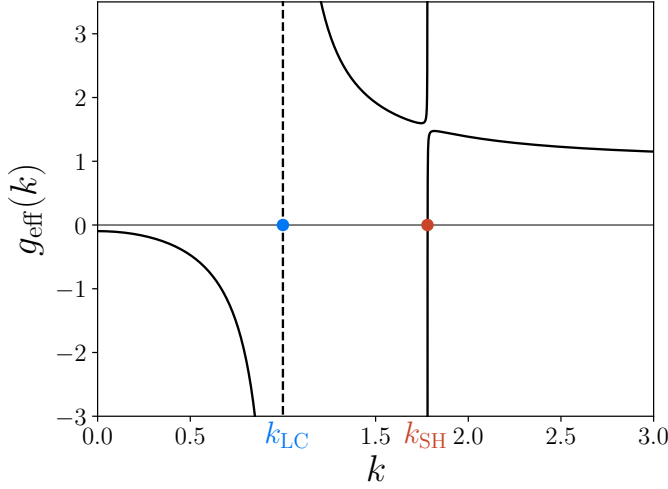


FIGURE 2.9 – Variation du coefficient non-linéaire effectif $g_{\text{eff}}(k)$ en fonction de l'impulsion de la porteuse pour un choix de paramètres typique : $(g_1, g_2, \Omega) = (2, 0.1, 2)$. Le coefficient diverge en deux impulsions : $k = k_{\text{LC}} \simeq 1.0$ (indiqué par un disque bleu \bullet) et $k = k_{\text{SH}} \simeq 1.8$ (indiqué par un disque rouge \bullet). L'impulsion $k = k_{\text{LC}}$ divise ici la dynamique de l'enveloppe en deux régimes : une régime attractif $g_{\text{eff}} < 0$ et un régime répulsif $g_{\text{eff}} > 0$.

Le système d'équations sur $\tilde{\theta}, \bar{\Phi}$ composé de (2.92) et (2.97) est ainsi clos terminant ainsi l'analyse multi-échelle. Afin de discuter la dynamique décrite par (2.97), on se propose de réécrire cette équation dans les coordonnées x et t [à l'aide des changements de variables (2.52)] et d'éliminer le paramètre de contrôle ε en définissant [cf. l'Eq. (2.47)] :

$$\begin{aligned} \Xi(x, t) &= \Xi^{(0)} + \Xi'(x, t), \\ \text{avec } \begin{cases} \Xi'(x, t) = \bar{\Xi}(\xi, t) + \left(\tilde{\Xi}(\xi, t) e^{i(kx - \omega_p(k)t)} + \text{c. c.} \right) \\ \xi = x - \omega'_p(k)t \end{cases} \end{aligned} \quad (2.100)$$

où les vecteurs $\bar{\Xi}$ et $\tilde{\Xi}$ correspondent simplement à :

$$\bar{\Xi}(\xi, t) = \Xi_d(0) \bar{\Phi}(\xi, t) = \left(0, \bar{\Phi}(\xi, t), 0, 0 \right)^T, \quad (2.101)$$

$$\tilde{\Xi}(\xi, t) = \Xi_p(k) \tilde{\theta}(\xi, t) = \left(0, 0, \tilde{\theta}(\xi, t), i \Delta(k) \tilde{\theta}(\xi, t) \right)^T. \quad (2.102)$$

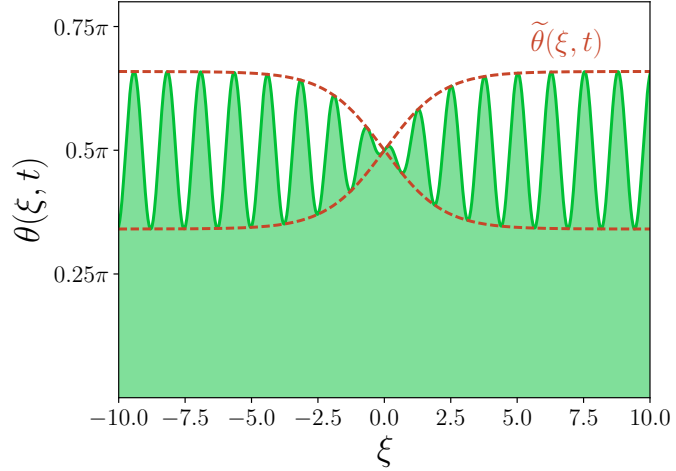
Les quantités $\bar{\Phi}$ et $\tilde{\theta}$ sont ici exprimées dans le référentiel se déplaçant à la vitesse de groupe $\omega'_p(k)$ dans lequel l'équation de modulation du paquet d'onde (2.97) s'écrit :

$$i \partial_t \tilde{\theta} = -\frac{\omega''_p(k)}{2} \partial_\xi^2 \tilde{\theta} + g_{\text{eff}}(k) |\tilde{\theta}|^2 \tilde{\theta} \quad (2.103)$$

$$\bar{\Phi}(\xi, t) = \frac{S(k)}{\omega'_p(k)^2 - g_1/2} \int d\xi |\tilde{\theta}(x, t)|^2 \quad (2.104)$$

Remarque 2.6. L'obtention d'une équation non-linéaire de Schrödinger gouvernant la dynamique de l'enveloppe d'un paquet d'onde est très standard : comme il a été expliqué précédemment le terme non-linéaire $|\tilde{\theta}|^2 \tilde{\theta}$ apparaît dès lors qu'il y a génération de seconde harmonique ou annihilation de deux excitations de même énergie. On peut citer concernant les nombreuses occurrences de l'équation de non-linéaire Schrödinger une citation attribuée à D.K. Campbell [138] : « Live by Non-Linear Schrödinger, die by Non-Linear Schrödinger ».

FIGURE 2.10 – Paquet d’onde dans la configuration soliton-enveloppe sombre (2.106) où $(g_1, g_2, \Omega) = (2, 0.1, 2)$; l’impulsion de la porteuse est $k = 5$ (et $g_{\text{eff}}(k) = 0.82$) et son amplitude $\tilde{\theta}_0 = 0.5$. $\theta(\xi, t)$ est représentée en trait plein vert (—) et l’enveloppe $\tilde{\theta}(\xi, t)$ est représentée en pointillés rouges (--).



3. Discussion

3.a. Soliton-enveloppes

On s’intéresse ici aux enveloppes se propageant à vitesse constante $\tilde{\theta}(\xi, t) = \tilde{\theta}(\xi - Vt)$ et plus particulièrement ici aux solutions **localisées** de l’équation non-linéaire de Schrödinger : les solitons (cf. e.g. la Section 1.d du Chapitre 1). Le paquet d’onde dont l’enveloppe décrit un soliton est souvent appelé dans la littérature **soliton-enveloppe**. Les solitons de l’équation (2.103) sont classés dans deux catégories dépendantes du signe de $\omega_p''(k)g_{\text{eff}}(k)$.

i. Cas $\omega_p''(k)g_{\text{eff}}(k) > 0$: soliton sombre

Par analogie avec un condensat de Bose-Einstein de masse effective $\omega_p''(k) > 0$ et de densité caractéristique $\tilde{\theta}_0^2$, on introduit une longueur de cicatrisation effective ξ_{eff} ainsi qu’une vitesse du son effective c_{eff} ¹² :

$$\xi_{\text{eff}}(k) \equiv \sqrt{\frac{\omega_p''(k)}{|g_{\text{eff}}(k)|\tilde{\theta}_0^2}} \quad \text{et} \quad c_{\text{eff}}(k) \equiv \frac{\omega_p''(k)}{\xi_{\text{eff}}(k)} = \sqrt{g_{\text{eff}}(k)\tilde{\theta}_0^2\omega_p''(k)}. \quad (2.105)$$

Quand $g_{\text{eff}} > 0$, l’enveloppe décrit un soliton sombre (cf. la Fig. 2.10) d’équation :

$$\tilde{\theta}(\xi, t) = \tilde{\theta}_0 e^{-i g_{\text{eff}}(k)\tilde{\theta}_0^2 t} \left[\sqrt{1 - \beta^2} \tanh\left(\sqrt{1 - \beta^2} \frac{\xi - V_{\text{sol}} t}{\xi_{\text{eff}}}\right) + i\beta \right], \quad (2.106)$$

$$\bar{\Phi}(\xi, t) = \frac{\tilde{\theta}_0^2}{\xi_{\text{eff}}} \left[\frac{\xi - V_{\text{sol}} t}{\xi_{\text{eff}}} - \sqrt{1 - \beta^2} \tanh\left(\sqrt{1 - \beta^2} \frac{\xi - V_{\text{sol}} t}{\xi_{\text{eff}}}\right) \right], \quad (2.107)$$

où $\beta = V_{\text{sol}}/c_{\text{eff}}$ et V_{sol} est la vitesse du soliton. Ici le soliton correspond à une diminution locale de l’amplitude du paquet d’onde (cf. la Fig. 2.10); le soliton-enveloppe conserve ici un caractère localisé dans le sens où la solution correspond à une déformation locale de l’onde plane.

12. Cette vitesse est définie seulement dans le cas où $g_{\text{eff}} \geq 0$.

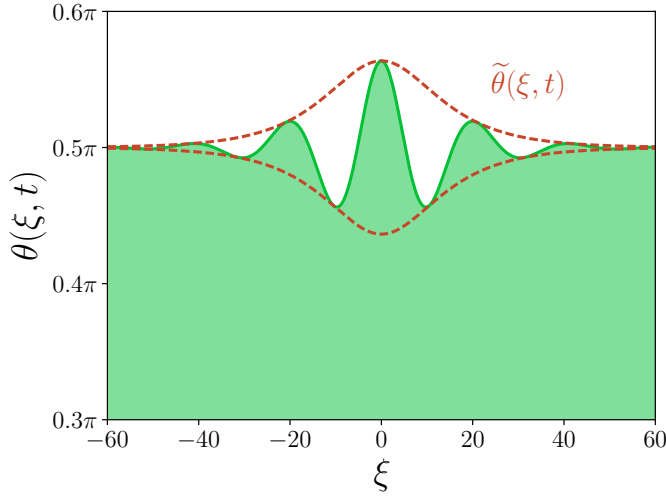


FIGURE 2.11 – Paquet d’onde dans la configuration soliton-enveloppe brillant (2.106) où $(g_1, g_2, \Omega) = (2, 0.1, 2)$; l’impulsion de la porteuse est $k = 0.3$ (et $g_{\text{eff}}(k) = -0.21$) et son amplitude $\theta_0 = 0.2$. $\theta(\xi, t)$ est représentée en trait plein vert (—) et l’enveloppe $\tilde{\theta}(\xi, t)$ est représentée en pointillés rouges (--).

ii. Cas $\omega_p''(k)g_{\text{eff}}(k) < 0$: soliton brillant

Quand $g_{\text{eff}}(k) < 0$, l’enveloppe décrit un soliton *brillant* (cf. la Fig. 2.11) d’équation :

$$\tilde{\theta}(x, t) = \tilde{\theta}_0 e^{-i(g_{\text{eff}}(k)\tilde{\theta}_0^2 - V_{\text{sol}}^2/\omega_p'')t/2} \frac{\exp\left(i\frac{V_{\text{sol}}}{\omega_p'(k)}\xi - V_{\text{sol}}t\right)}{\cosh\left(\frac{\xi - V_{\text{sol}}t}{\xi_{\text{eff}}}\right)}, \quad (2.108)$$

$$\bar{\Phi}(x, t) = \frac{\tilde{\theta}_0^2}{\xi_{\text{eff}}} \tanh\left(\frac{\xi - V_{\text{sol}}t}{\xi_{\text{eff}}}\right), \quad (2.109)$$

où V_{sol} est la vitesse du soliton. Au contraire du soliton sombre, cette solution correspond à une augmentation localisée de la polarisation : $\tilde{\theta}(\xi \rightarrow \pm\infty) = 0$. Dans la section suivante on va montrer en effet que la solution $\tilde{\theta} = \tilde{\theta}_0$ est dynamiquement instable et que seule les paquets d’onde localisés d’enveloppe (2.108) peuvent subsister. On peut remarquer ici que même si la vitesse de groupe $\omega_p'(k \sim 0)$ est nulle, le condensat peut propager une perturbation de polarisation **de vitesse finie** V_{sol} . Cette propagation à faible k est une signature explicite des interactions non-linéaires entre les excitations du mode de polarisation caractérisées par $g_p(k)$ mais aussi des interactions non-linéaires entre les deux modes caractérisées par $g_{\Phi}(k)$.

3.b. Instabilité modulationnelle

Afin d’expliquer l’instabilité dynamique subie par les excitations de polarisation dans le *régime attractif*, on propose ici un scénario similaire à celui déterminé initialement par T. Benjamin et J. Feir [139]. Dans le problème étudié dans la référence [139], un train d’onde en eau peu profonde est déstabilisé par son interaction avec des excitations d’énergie proche de la porteuse. Les ondes planes de polarisation sont représentées ici par une enveloppe d’amplitude constante $\tilde{\theta}_0$ (à une phase près correspondant à la correction non-linéaire de la pulsation des excitations, cf. e.g. la Section 2.a) :

$$\tilde{\theta}(\xi, t) = \tilde{\theta}_0 \exp\left(-i g_{\text{eff}}(k)\tilde{\theta}_0^2 t\right). \quad (2.110)$$

L’instabilité de Benjamin-Feir peut être exposée en étudiant la stabilité de la solution d’amplitude constante (2.110) par rapport à une perturbation :

$$\tilde{\theta}(\xi, t) = \tilde{\theta}_0 e^{-i g_{\text{eff}}(k)\tilde{\theta}_0^2 t} + \left(\delta e^{i(q\xi - \varpi t)} + \text{c. c.}\right), \quad (2.111)$$

FIGURE 2.12 – Variation de la pulsation des excitations (2.112) pour le choix de paramètres $(g_1, g_2, \Omega) = (2, 0.1, 2)$ et on choisit une amplitude exceptionnellement grande : $\tilde{\theta}_0 = 1$ afin de rendre la différence entre les différents cas visibles. Deux cas sont considérés : le cas $k = 1.5$ (pour lequel $g_{\text{eff}}(k) > 0$) représenté en trait plein rouge (—) et le cas $k = 0.7$ ($g_{\text{eff}}(k) < 0$) représenté en trait plein bleu (—). Dans ce dernier cas, le minimum $q_0 = 1.6$ est représenté par un point bleu (•).

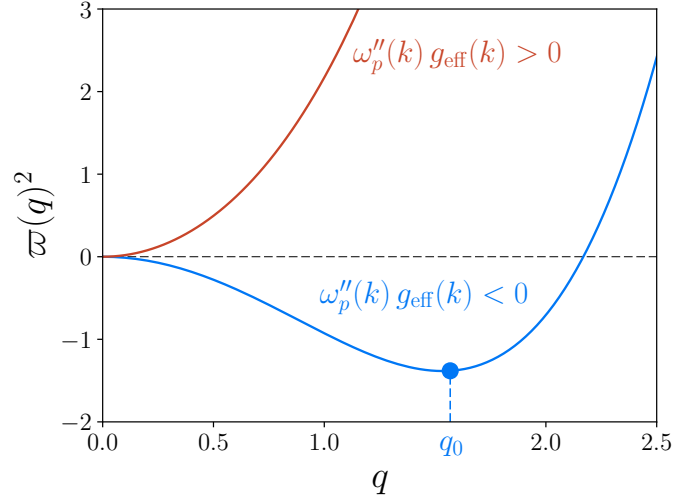
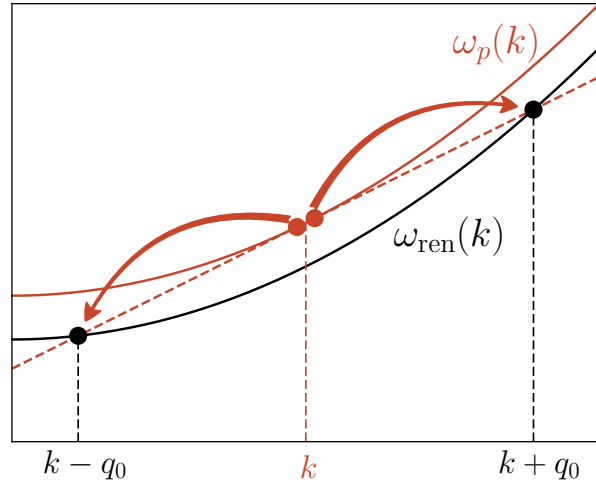


FIGURE 2.13 – Illustration du processus à deux ondes décrit par (2.116). La relation de dispersion du mode de polarisation $\omega_p(k)$ est tracée en trait plein rouge (—) et son développement de Taylor proche de k en pointillés rouges (---); la relation de dispersion renormalisée $\omega_{\text{ren}}(k)$ en trait plein noir (—). Dans le cas $\omega_{\text{ren}} < \omega_p$ présenté ici, une excitation de polarisation d'énergie $2\omega_p$ peut se désintégrer en deux excitations du mode $\omega_{\text{ren}}(k)$.



où $\delta \ll \theta_0$ et dont la pulsation $\varpi(q)$ est déterminée par la linéarisation de l'équation non-linéaire de Schrödinger¹³ :

$$\varpi(q)^2 = \left(\frac{\omega_p''(k) q^2}{2} \right)^2 + \omega_p''(k) g_{\text{eff}}(k) \tilde{\theta}_0^2 q^2. \quad (2.112)$$

On remarque ainsi que pour (cf. la Fig. 2.12) :

$$\omega_p''(k) g_{\text{eff}}(k) < 0, \quad (2.113)$$

$\varpi(q)$ peut devenir complexe; dans ce cas, la valeur maximale de la pulsation $|\varpi(q)|$ est atteinte pour :

$$q_0^2 = -\frac{2g_{\text{eff}}(k) \tilde{\theta}_0^2}{\omega_p''(k)}. \quad (2.114)$$

Le train d'onde d'amplitude (2.110) développe alors des excitations de pulsation imaginaire (de taux de croissance maximal $|\varpi(q_0)|$) et devient dynamiquement instable. Cette

13. Cette relation est simplement le spectre de Bogoliubov d'un condensat décrit par le coefficient non-linéaire $g_{\text{eff}}(k)$.

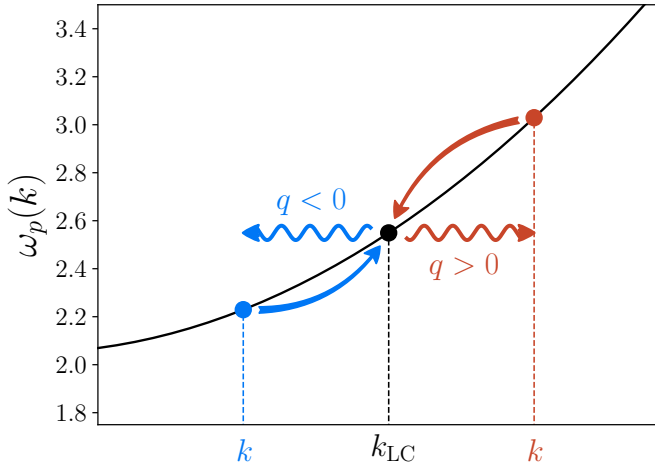


FIGURE 2.14 – Processus (2.118) d'interaction onde longue - onde courte pour $(g_1, g_2, \Omega) = (2, 0.1, 2)$. Deux cas sont considérés : en bleu (resp. en rouge) l'impulsion initiale de la porteuse respecte $k < k_{LC}$ (resp. $k > k_{LC}$) où $k_{LC} = 1.0$ et l'impulsion q échangée avec le mode de densité est négative (resp. positive).

condition de stabilité constitue le **critère de Lighthill-Benjamin-Feir** [140]. Une façon plus intuitive de comprendre cette condition est de remarquer que l'équation non-linéaire de Schrödinger (2.103) correspond à la *renormalisation* de la relation de dispersion du mode de polarisation (2.25) :

$$\omega_{\text{ren}}(k) = \omega_p(k) + g_{\text{eff}}(k)\tilde{\theta}_0^2. \quad (2.115)$$

Deux excitations du paquet d'onde de pulsation $\omega_p(k)$ et d'amplitude $\tilde{\theta}_0$ peuvent alors interagir par le truchement des effets non-linéaires, suivant le processus :

$$\begin{array}{ccccccc} \omega_p(k) & + & \omega_p(k) & \rightarrow & \omega_{\text{ren}}(k - q_0) & + & \omega_{\text{ren}}(k + q_0), \\ k & + & k & \rightarrow & (k - q_0) & + & (k + q_0), \end{array} \quad (2.116)$$

où $q_0 \ll k$ est défini par (2.114). Le processus (2.116) n'est possible que si $\omega''(k)g_{\text{eff}}(k) < 0$. Cette condition devient évidente quand la courbure de la relation de dispersion est fixée $\omega_p''(k) > 0$: si $g_{\text{eff}}(k) < 0$ l'énergie des excitations renormalisée $\omega_{\text{ren}}(k)$ est plus faible que l'énergie du mode de polarisation $\omega_p(k)$ et la seconde harmonique $2\omega_p(k)$ peut se désintégrer dans le mode renormalisé suivant le processus (2.116) comme le montre la figure 2.13.

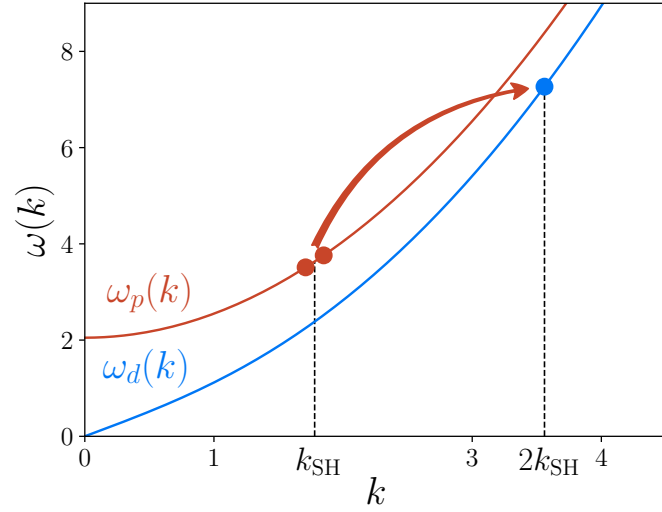
3.c. Résonance onde longue - onde courte

Comme le montre la variation du coefficient $g_{\text{eff}}(k)$ dans la figure 2.9, le signe de g_{eff} dépend de la position relative de l'impulsion de la porteuse k par rapport à l'impulsion que l'on note k_{LC} . Cette impulsion sépare ainsi le mode de polarisation en deux régimes :

- un régime $k > k_{LC}$ stable ($g_{\text{eff}} > 0$) où la propagation des excitations de polarisation est bien décrite par l'analyse linéaire (modulo une correction de la phase),
- un régime $k < k_{LC}$ instable ($g_{\text{eff}} < 0$) selon le critère de Lighthill-Benjamin-Feir.

Afin de comprendre ce changement de signe, il faut revenir à la composition du terme non-linéaire : $g_{\text{eff}}(k)\tilde{\theta}^2$ [cf. l'Eq. (2.97)]. Le premier terme $g_p(k)\tilde{\theta}^2$ [défini par l'Eq. (2.98)], provenant de l'*auto-interaction* entre les excitations du mode de polarisation, est uniformément positif et s'oppose au processus de désintégration (2.116). Au contraire, le second terme $g_\Phi(k)\tilde{\theta}^2$ [défini par l'Eq. (2.99)] est le produit de l'interaction entre le mode de polarisation et les phonons de densité ; il change de signe selon la position relative de

FIGURE 2.15 – Processus (2.118) de génération de seconde harmonique pour $(g_1, g_2, \Omega) = (2, 0.1, 2)$. Deux excitations du mode de polarisation d'impulsion k_{SH} représentées par deux points rouges (•) peuvent interagir et créer une excitation dans le mode de densité représentée par un point bleu (•).



la vitesse de groupe du paquet d'onde $\omega'_p(k)$ par rapport à la vitesse du son des phonons $\sqrt{g_1/2}$. Ce terme est résonnant quand il y a égalité entre ces deux vitesses en $k = k_{\text{LC}}$:

$$\omega'_p(k_{\text{LC}}) \equiv \sqrt{g_1/2} . \quad (2.117)$$

On peut associer à cette résonance le processus suivant ($|q| \ll k_{\text{LC}}$) :

$$\begin{aligned} \omega_p(k) &\rightarrow \omega_p(k_{\text{LC}}) \pm \omega_d(q) , \\ k &\rightarrow k_{\text{LC}} + q , \end{aligned} \quad (2.118)$$

où une excitation du mode de polarisation de longueur d'onde $2\pi/k$ peut perdre de l'énergie au profit d'un phonon du mode de densité d'énergie $\omega_d(q)$; ce processus, appelé **résonance onde longue - onde courte** (*long wave - short wave resonance* en anglais, cf. e.g. la Ref.[141]), est illustré dans la figure 2.14. Cette résonance a été mise en évidence initialement lors de l'étude de la propagation des paquets d'onde de gravité à travers un fluide stratifié [142] : de manière générale, cette résonance est le résultat de l'interaction entre le mode des excitations du paquet d'onde et le mouvement global du fluide décrit ici par la vitesse $U = \partial_x \Phi = \partial_\xi \bar{\Phi}$. Le terme $g_\Phi(k)\tilde{\theta}^2 \propto k\partial_x \Phi$ peut être interprété ici comme l'énergie Doppler associée à une excitation d'impulsion k se propageant dans un milieu de vitesse $U = \partial_x \Phi$. Quand $k < k_{\text{LC}}$, l'impulsion q impartie à la dynamique globale du condensat à travers le processus (2.118) est négative et la contribution Doppler associée $k\partial_x \Phi = kq\Phi$ aussi. Au contraire, pour $k > k_{\text{LC}}$, l'impulsion impartie à la dynamique globale devient positive, **stabilisant** alors la propagation des excitations à travers le condensat.

3.d. Génération de seconde harmonique

On observe dans la figure 2.9 une autre résonance en $k = k_{\text{SH}}$ provenant du terme $g_p(k)$. Cette résonance est associée au processus à trois ondes suivant :

$$\begin{aligned} \omega_p(k_{\text{SH}}) + \omega_p(k_{\text{SH}}) &\rightarrow \omega_d(2k_{\text{SH}}) , \\ k_{\text{SH}} + k_{\text{SH}} &\rightarrow 2k_{\text{SH}} , \end{aligned} \quad (2.119)$$

correspondant à la génération de seconde harmonique et apparaît naturellement dans le terme d'interactions $\propto \tilde{\theta}^2$. On peut cependant déterminer l'origine de cette résonance plus

formellement. Proche de la résonance $k \sim k_{\text{SH}}$, la condition de solvabilité de l'équation (2.67c) n'est plus respectée. En effet, on a d'après le processus (2.119) :

$$\det \mathbb{M}_2 = \det \mathbb{M}[2ik_{\text{SH}}, -2i\omega_p(k_{\text{SH}})] = \det \mathbb{M}[2ik_{\text{SH}}, -i\omega_d(2k_{\text{SH}})] \equiv 0, \quad (2.120)$$

par définition du mode de densité. En explicitant alors la solution (2.68) à l'aide du déterminant de \mathbb{M}_2 :

$$\Xi_2^{(2)} = \mathbb{M}_2^{-1} C_2 = \begin{pmatrix} \frac{\text{adj } \mathbb{M}_{2d}}{\omega_d(2k)^2 - (2\omega_p(k))^2} \cdot \left(\frac{k^2/2 - \Omega}{k^2/2 + \Omega} \frac{g_2}{2} - \frac{k^2}{2} - \Omega \right) \tilde{\theta}^2 \\ \frac{\text{adj } \mathbb{M}_{2p}}{\omega_p(2k)^2 - (2\omega_p(k))^2} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}, \quad (2.121)$$

où $\mathbb{M}_{2d} \equiv \mathbb{M}_d[2ik, 2i\omega_p(k)]$, $\mathbb{M}_{2p} \equiv \mathbb{M}_p[2ik, 2i\omega_p(k)]$ et $\text{adj } \mathbb{M}$ est la matrice adjacente de \mathbb{M} , on remarque que la solution $\Xi_2^{(2)}$ diverge quand $k = k_{\text{SH}}$ et par conséquent que le coefficient d'auto-interaction $g_p(k)$ diverge aussi à l'ordre suivant. L'ansatz proposé pour l'analyse multi-échelle (2.48) n'est pas adéquat proche de la résonance, et afin de traiter cette interaction avec la seconde harmonique du mode de polarisation, il faudrait inclure dans la forme de la perturbation (2.48) la contribution¹⁴ :

$$\Xi_0^{(2)}(X, T_1, T_2) e^{2i\beta_{\text{SH}}(x,t)} \quad \text{avec} \quad \beta_{\text{SH}}(x, t) = k_{\text{SH}}x - \omega_p(k_{\text{SH}})t. \quad (2.122)$$

3.e. Conclusion

Contrairement au mode de polarisation, le mode de densité est bien stable quel que soit l'impulsion des excitations constituant le paquet d'onde. Le profil du coefficient de non-linéarité effective $g_{\text{eff}}(k)$ a été déterminé pour le mode de densité dans l'Article 1. On peut mentionner ici que la variation de $g_{\text{eff}}(k) > 0$ pour le mode de densité est semblable à la variation de ce même coefficient dérivé pour les excitations non-linéaires d'un condensat **à une composante**. Cela confirme en parti l'intuition développée dans le Chapitre 1 : les excitations du mode de densité possèdent un comportement similaire aux excitations des condensats à une composante à un niveau *non-linéaire*.

La phénoménologie des excitations non-linéaires du mode de polarisation en présence du couplage Rabi est très riche. Dans un premier temps, on a montré que le mode de polarisation permet de propager des soliton-enveloppes dans un régime *focalisant* ($\omega_p'' g_{\text{eff}} > 0$) et un régime *dé-focalisant* ($\omega_p'' g_{\text{eff}} < 0$)¹⁵. On a vu notamment que les excitations du mode de polarisation peuvent propager une perturbation de vitesse finie sous la forme d'un soliton dans un régime où la vitesse de groupe $\omega_p'(k)$ est négligeable. La propagation d'une perturbation de la polarisation à vitesse finie devient un effet purement non-linéaire en présence du couplage Rabi (pour lequel $\omega_p'(0) \simeq 0$) et caractérise directement les interactions non-linéaires entre les excitations. Dans un registre plus fondamental, on a montré que la dynamique du mode de polarisation est couplée avec le mode de densité à travers un échange de phonons de faible énergie. De façon remarquable, l'instabilité aux temps longs $t \propto 1/\tilde{\theta}_0^2$ mise en évidence par l'analyse multi-échelle est **stabilisée** par une résonance onde longue - onde courte et la propagation du mode de polarisation reste bien définie

14. De façon similaire à l'introduction initiale du terme de pulsation 0 : $\Xi_0^{(1)}$.

15. On reprend ici la terminologie développée en optique non-linéaire où les solitons observés modulent une onde porteuse et correspondent ainsi intrinsèquement à des soliton-enveloppes.

pour des impulsions suffisamment grandes $k > k_{LC}$ modulo la renormalisation de la relation de dispersion par $\omega_p \rightarrow \omega_p + g_{\text{eff}}(k)\tilde{\theta}_0^2$.

D'un point de vue pratique, l'analyse multi-échelle confirme bien l'existence d'ondes plane de polarisation, en faible interaction avec le mode de densité. Dans le chapitre suivant on montrera, dans une limite proche de la limite de Manakov ($g_2 \ll g_1$) et sans couplage cohérent, que la dynamique de polarisation peut être dérivée au niveau non-linéaire des équations de Gross-Pitaevskii.

Article 1 : Nonlinear waves in coherently coupled Bose-Einstein condensates

Le travail présenté dans ce chapitre a fait l'objet de la publication présentée ci-dessous. Nous avons montré qu'en présence d'un couplage cohérent de Rabi, les effets non-linéaires modifient la dynamique du mode de polarisation : nous avons déterminé que le mode de polarisation subit une instabilité de Benjamin-Feir. Cet effet est stabilisée aux grandes impulsions par une résonance onde longue – onde courte qui est une conséquence directe de l'interaction non-linéaire entre le mode de polarisation et le mode de densité. Nous avons aussi montré que ce couplage non-linéaire entre les deux modes se manifeste à travers la génération d'une seconde harmonique.

Nous avons ensuite généralisé cette étude aux excitations non-linéaires de polarisation et de densité du condensat en présence du couplage Rabi et du **couplage spin-orbite** dans la phase dite *single-minimum* (cf. la Ref. [116]). Dans ce cas plus général, il existe une deuxième génération de seconde harmonique de polarisation, indépendante cette fois-ci du couplage entre les deux modes. Nous avons notamment étudié dans cette nouvelle configuration les excitations non-linéaires du mode de densité et montré que leur dynamique, dans le régime des grandes longueurs d'onde, est gouvernée par une équation de Korteweg-de Vries modifiée dont la non-linéarité peut être quartique.

Nonlinear waves in coherently coupled Bose-Einstein condensatesT. Congy,¹ A. M. Kamchatnov,² and N. Pavloff¹¹*LPTMS, CNRS, Univ. Paris-Sud, Université Paris-Saclay, 91405 Orsay, France*²*Institute of Spectroscopy, Russian Academy of Sciences, Troitsk, Moscow 108840, Russia*

(Received 19 February 2016; published 11 April 2016)

We consider a quasi-one-dimensional two-component Bose-Einstein condensate subject to a coherent coupling between its components, such as realized in spin-orbit coupled condensates. We study how nonlinearity modifies the dynamics of the elementary excitations. The spectrum has two branches, which are affected in different ways. The upper branch experiences a modulational instability, which is stabilized by a long-wave–short-wave resonance with the lower branch. The lower branch is stable. In the limit of weak nonlinearity and small dispersion it is described by a Korteweg–de Vries equation or by the Gardner equation, depending on the value of the parameters of the system.

DOI: [10.1103/PhysRevA.93.043613](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.93.043613)**I. INTRODUCTION**

The Bose-Einstein condensation of a mixture of different hyperfine states of the same element (first realized by the JILA group [1]) offers the possibility to transfer atoms from an internal state to another one in a macroscopic matter wave. This feature has driven a rich body of experimental studies of phenomena such as the formation of spin domains, vortices, and other nonlinear structures [2], internal Josephson effect [3], formation of squeezed and entangled states [4], motion of spin impurities [5], persistent currents [6], effective gauge potentials [7], and spin-orbit coupled systems [8], which has itself opened an avenue of new research: observation of a superfluid Hall effect [9], of Zitterbewegung [10], of spin Hall effect [11], of tunable Landau-Zener transitions [12], of a Dicke-type phase transition [13], of the softening of a rotonlike dispersion relation, etc. [14]. In some of the above cited works, the change of internal state is only due to spin-dependent collisions, but in others the coupling is externally driven by a combination of radio frequency and microwave fields [15] or by using Raman coupling lasers [16]. In the present study we concentrate on an effective spin 1/2 system in which two internal states are coherently coupled by an external potential. In such a system, the coupling explicitly breaks the $U(1) \times U(1)$ symmetry originating from the irrelevance of global phase factors of each the two components: the relative phase is no longer free and only remains a $U(1)$ symmetry for the global phase of the spinor. As a consequence, the two-branched spectrum of the system has a single Goldstone mode and the other branch is gapped. The mean-field dynamics of the system is described by two coupled Gross-Pitaevskii equations accounting for intraspecies and interspecies collisions for the external coupling field and also possibly for a spin-orbit term. The ground state of the system and the associated possible phase transitions and the elementary excitations have been theoretically studied in Refs. [17] and [18], as well as a rich variety of nonlinear structures (Refs. [19] and [20]).

The reason for the protean aspect of the theoretical approaches of the system lies in the fact that its dynamics is described by a nonintegrable set of coupled Gross-Pitaevskii equations, which do not admit simple integrable equations as limiting cases. Even in the simpler case of a spinor condensate in the absence of spin-orbit and Raman coupling, the integrable

limit is the so-called Manakov system (obtained when all the nonlinear interaction constants are equal), which does not pertain to the well-studied Ablowitz-Kaup-Newell-Segur hierarchy and for which all the types of solutions are not yet fully classified (see, e.g., Refs. [21]). The aim of the present work is to partially clarify the rich nonlinear behavior of the system by presenting a systematic study revealing how nonlinear effects modify the elementary excitations of the system.

The paper is organized as follows. The model, its ground state, and linear excitations are described in Sec. II. We then use a singular perturbation theory to describe in Sec. III how excitations in the upper branch of the dispersion relation are affected by nonlinear effects. The method is exposed in Secs. III A, III B, and III C and the results are summarized and discussed in Sec. III D. The technique used in Sec. III can also be employed for describing the effects of nonlinearity on the lower branch of the spectrum. However, for this branch another approach can be used, which is more appropriate in the long wave length limit. This is explained in Sec. IV and we show in Secs. IV A and IV B how to deal with this issue. The general doctrine is presented in Sec. IV C where we also discuss the different regimes accessible in present-day experiments. Our conclusions are summarized in Sec. V and some technical aspects are detailed in Appendixes A and B.

II. MODEL AND ELEMENTARY EXCITATIONS

We consider a one-dimensional (1D) system described by a two-component spinor order parameter $\Psi(x, t) = (\psi_\uparrow, \psi_\downarrow)^t$ (where the superscript t denotes the transposition) obeying the following coupled Gross-Pitaevskii equations

$$i \hbar \partial_t \Psi = H_0 \Psi + \begin{pmatrix} \alpha_1 |\psi_\uparrow|^2 & \alpha_2 \psi_\downarrow^* \psi_\uparrow \\ \alpha_2 \psi_\uparrow^* \psi_\downarrow & \alpha_1 |\psi_\downarrow|^2 \end{pmatrix} \Psi, \quad (1)$$

where H_0 is the single-particle Hamiltonian:

$$H_0 = \frac{1}{2m} \left(\frac{\hbar}{i} \partial_x - \hbar k_0 \sigma_z \right)^2 + \frac{\hbar \Omega}{2} \sigma_x, \quad (2)$$

σ_x and σ_z being Pauli matrices. This corresponds to a system with equal contribution of Rashba and Dresselhaus coupling, as realized in spin-orbit coupled condensates (see,

e.g., Ref. [22]). In Eq. (1), $\alpha_2 = \alpha_{\uparrow\downarrow}$ is the interspecies interaction coefficient, and for simplicity we have assumed equal intraspecies interaction: $\alpha_{\uparrow\uparrow} = \alpha_{\downarrow\downarrow} \equiv \alpha_1$. In the following we will consider the case of repulsive intraspecies interaction: $\alpha_1 > 0$.

It is convenient to reparametrize the spinor wave function [23]:

$$\Psi(x,t) = \begin{pmatrix} \psi_{\uparrow} \\ \psi_{\downarrow} \end{pmatrix} = \sqrt{\rho} e^{i\Phi/2} \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} e^{-i\varphi/2} \\ \sin \frac{\theta}{2} e^{i\varphi/2} \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Here $\rho(x,t) = |\psi_{\uparrow}|^2 + |\psi_{\downarrow}|^2$ denotes the total density of the condensate and $\Phi(x,t)$ has the meaning of the velocity potential of its in-phase motion; the angle $\theta(x,t)$ is the variable describing the relative density of the two components [$\cos \theta = (|\psi_{\uparrow}|^2 - |\psi_{\downarrow}|^2)/\rho$] and the phase $\varphi(x,t)$ is the potential of their relative (counterphase) motion. Accordingly, the densities of the components of the condensate are given by

$$\begin{aligned} \rho_{\uparrow}(x,t) &= |\psi_{\uparrow}|^2 = \rho \cos^2(\theta/2), \\ \rho_{\downarrow}(x,t) &= |\psi_{\downarrow}|^2 = \rho \sin^2(\theta/2). \end{aligned} \quad (4)$$

Their velocities are defined as

$$\begin{aligned} v_{\uparrow}(x,t) &= \frac{1}{2}(\Phi_x - \varphi_x) - k_0, \\ v_{\downarrow}(x,t) &= \frac{1}{2}(\Phi_x + \varphi_x) + k_0. \end{aligned} \quad (5)$$

It will also be convenient to define the following velocity fields

$$U(x,t) = \Phi_x \quad \text{and} \quad v(x,t) = \varphi_x. \quad (6)$$

Equation (1), expressed in terms of the real fields Φ , ρ , θ , and φ , reads

$$\rho_t = \frac{1}{2}[\rho(\varphi_x + 2k_0)\cos\theta]_x - \frac{1}{2}(\rho\Phi_x)_x, \quad (7a)$$

$$\begin{aligned} -\Phi_t &= -\frac{1}{2}\cot\theta\left(\frac{\rho\theta_x}{\rho}\right)_x + \frac{1}{2}\left(\frac{\rho_x^2}{2\rho^2} - \frac{\rho_{xx}}{\rho}\right) \\ &\quad + \frac{1}{4}[\Phi_x^2 + \theta_x^2 + (\varphi_x + 2k_0)^2] \\ &\quad + (\alpha_1 + \alpha_2)\rho + \Omega \frac{\cos\varphi}{\sin\theta}, \end{aligned} \quad (7b)$$

$$-\theta_t = \frac{1}{2}\Phi_x\theta_x + \frac{1}{2\rho}[\rho(\varphi_x + 2k_0)\sin\theta]_x + \Omega \sin\varphi, \quad (7c)$$

$$\begin{aligned} \varphi_t &= \frac{1}{2\sin\theta}\left(\frac{\rho\theta_x}{\rho}\right)_x - \frac{1}{2}\Phi_x(\varphi_x + 2k_0) \\ &\quad + (\alpha_1 - \alpha_2)\rho \cos\theta - \Omega \cos\varphi \cot\theta, \end{aligned} \quad (7d)$$

where we have used units such that $\hbar = 1 = m$.

In all the following we will assume that the different parameters of the Hamiltonian are fixed in such a way that the ground state of the system corresponds to a configuration in which both components are homogeneous ($\rho = \rho_0$ and $\theta = \theta_0$), in phase ($\varphi = 0$), stationary (ρ , Φ_x , θ , and φ_x are time independent) with equal densities ($\theta_0 = -\pi/2$ [24]). In this case, one obtains $\Phi = -2\mu t$, where

$$\mu = \frac{k_0^2}{2} + \frac{g_1}{2} - \frac{\Omega}{2} \quad (8)$$

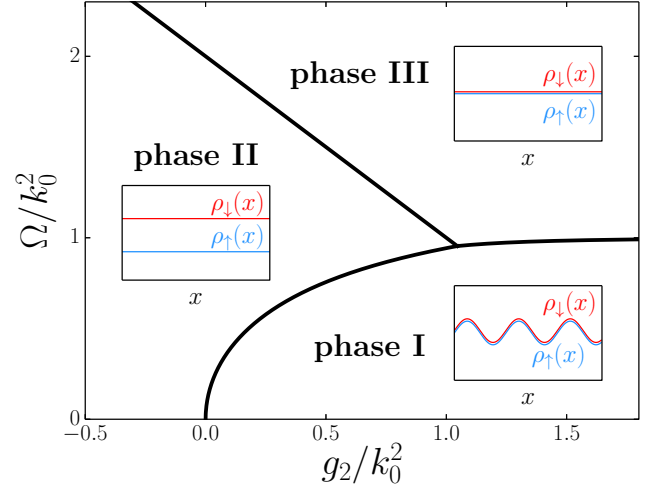


FIG. 1. Schematic phase space of the spin-orbit coupled system as a function of the parameters Ω/k_0^2 and g_2/k_0^2 . For each phase the inset represents a typical density pattern. The boundary between phases III and II corresponds to $\Omega + g_2 = 2k_0^2$.

is the chemical potential. In this expression we have used the notation $g_1 = (\alpha_1 + \alpha_2)\rho_0$. It will also be convenient to define $g_2 = (\alpha_1 - \alpha_2)\rho_0$ and to introduce a rescaled density $n(x,t) = \rho(x,t)/\rho_0$.

In the absence of spin-orbit coupling ($k_0 = 0$) this ground state is stable provided $\Omega + g_2 > 0$ [17]. For a spin-orbit coupled system, this ground state is denoted as the “single minimum” or “zero momentum” or “phase III” ground state. It is the true ground state of the system in a region of parameters, which is schematically depicted in Fig. 1 (adapted from Ref. [22]).

Although the present work is devoted to the study of nonlinear effects in phase III, we note that the methods we use also apply—with unessential modifications—in phase II, which is a spin polarized phase where the system condensates in a single plane-wave state with nonzero momentum. Phase I (the so-called striped phase), which has a modulated ground-state density deserves a special treatment.

A first insight in the dynamics of the system can be obtained by linearizing Eqs. (7). For simplifying the notations we introduce the column vector

$$\Xi(x,t) = \begin{pmatrix} n \\ \Phi \\ \theta \\ \varphi \end{pmatrix}, \quad \text{with} \quad \Xi^{(0)}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2\mu t \\ -\pi/2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (9)$$

being the ground state value of $\Xi(x,t)$. We write

$$\Xi(x,t) = \Xi^{(0)}(x,t) + \Xi'(x,t), \quad (10)$$

where $\Xi'(x,t)$ describes a small departure of the fields n , Φ , θ , and φ from their ground-state values. Inserting this *Ansatz*

into (7) one obtains at first order in Ξ' a system of the form

$$\mathbb{M}(\partial_x, \partial_t) \Xi' = 0, \quad (11)$$

where

$$\mathbb{M} = \begin{pmatrix} \partial_t & \frac{\partial_x^2}{2} & -k_0 \partial_x & 0 \\ -\frac{\partial_x^2}{2} + g_1 & \partial_t & 0 & k_0 \partial_x \\ -k_0 \partial_x & 0 & \partial_t & -\frac{\partial_x^2}{2} + \Omega \\ 0 & k_0 \partial_x & \frac{\partial_x^2}{2} - \Omega - g_2 & \partial_t \end{pmatrix}. \quad (12)$$

Equation (11) being linear one can expand $\Xi'(x, t)$ on a basis of plane waves of wave-vector k and angular frequency ω . This amounts to look for solutions of the form $\Xi'(x, t) = \hat{\Xi}' \exp[i(kx - \omega t)] + \text{c. c.}$, where c. c. stands for complex conjugate and $\hat{\Xi}'$ is a constant column vector whose entries are possibly complex. One then obtains a system of linear equations, which reads

$$\mathbb{M}_1 \hat{\Xi}' = 0, \quad (13)$$

where

$$\begin{aligned} \mathbb{M}_1 &= \mathbb{M}(ik, -i\omega) \\ &= \begin{pmatrix} -i\omega & -\frac{k^2}{2} & -ik_0k & 0 \\ \frac{k^2}{2} + g_1 & -i\omega & 0 & ik_0k \\ -ik_0k & 0 & -i\omega & \frac{k^2}{2} + \Omega \\ 0 & ik_0k & -\frac{k^2}{2} - \Omega - g_2 & -i\omega \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (14)$$

The system (13) has nontrivial solutions only if the determinant of \mathbb{M}_1 vanishes. This fixes the dispersion relation of the elementary excitations, with two branches $\omega = \omega_{\pm}(k)$, which are represented in Fig. 2. They are solutions of

$$\begin{aligned} 0 &= \omega^4 - \omega^2 \left[\frac{k^4}{2} + 2k_0^2 k^2 + \Omega k^2 + \Omega^2 + (g_1 + g_2) \frac{k^2}{2} + \Omega g_2 \right] \\ &+ \frac{k^2}{2} \left[\frac{k^2}{2} + \Omega + g_2 - 2k_0^2 \right] \\ &\times \left[\left(\frac{k^2}{2} + \Omega \right) \left(\frac{k^2}{2} + g_1 \right) - k^2 k_0^2 \right]. \end{aligned} \quad (15)$$

The upper branch $\omega = \omega_+(k)$ is gapped, with a dispersion relation of the form

$$\omega_+(k) = \sqrt{\Omega(\Omega + g_2)} + O(k^2). \quad (16)$$

The lower branch $\omega = \omega_-(k)$ is not gapped: it accounts for the Goldstone mode corresponding to the spontaneous breaking of the global $U(1)$ symmetry of the system. One sees in Fig. 2 that the upper branch is not qualitatively affected by interaction effects, contrarily to the lower branch whose long wavelength dispersion relation would be quadratic in the absence of interaction and becomes linear in its presence. The lower branch admits, for the positive k portion of the spectrum, the following expansion (corresponding to linear waves propagating in the positive- x direction):

$$\omega_-(k) = ck + c_3 k^3 + O(k^5), \quad (17)$$

where

$$c = \sqrt{\frac{g_1}{2} \left(1 - \frac{2k_0^2}{\Omega + g_2} \right)} \quad (18)$$

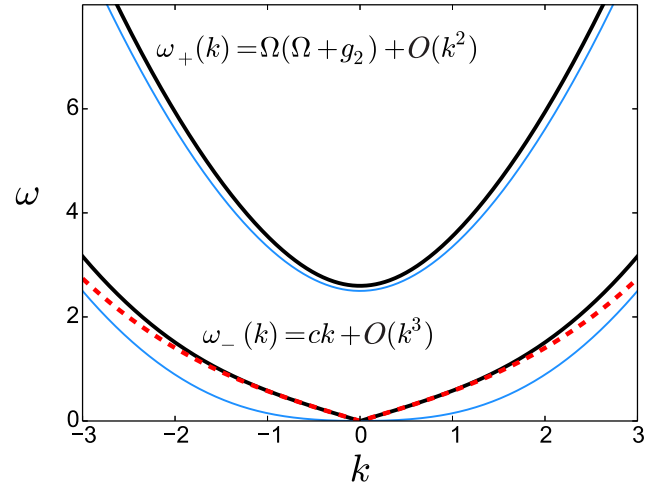


FIG. 2. The black solid lines represent the exact dispersion relations $\omega_+(k)$ (upper branch) and $\omega_-(k)$ (lower branch), solutions of Eq. (15). The figure is drawn in the case $\alpha_1 \rho_0 = 1.2$, $\alpha_2 \rho_0 = 1.0$, $k_0 = 1.0$, and $\Omega = 2.5$. The (red) dashed line represent the long wavelength expansion (17). The thin (blue) lines represent the spectrum of the single particle Hamiltonian H_0 [cf. Eq. (2)]. They are obtained by taking $g_1 = g_2 = 0$ in Eq. (15): in this case one obtains $\omega_{\pm}(k) = k^2/2 + \Omega/2 \pm [k_0^2 k^2 + \Omega^2/4]^{1/2}$.

is the sound velocity, and the parameter c_3 verifies

$$\begin{aligned} 4cc_3 &= \frac{1}{2} - \frac{2k_0^2}{\Omega(\Omega + g_2)} \left[2\Omega + g_1 + g_2 \right. \\ &- \frac{(\Omega + g_1 + g_2)(2\Omega - g_1 + g_2)}{2(\Omega + g_2)} \\ &\left. - k_0^2 \frac{(\Omega + g_1 + g_2)^2}{(\Omega + g_2)^2} \right]. \end{aligned} \quad (19)$$

III. NONLINEAR PERTURBATION THEORY FOR EXCITATIONS PROPAGATING IN THE UPPER BRANCH

We study in the present section how nonlinear effects modify the structure of an excitation propagating in the upper branch of the spectrum. For instance, one can anticipate that nonlinear terms cause some modulations or anharmonicities of this wave, and make it interact with the other branch of the spectrum. Instead of the simple linear analysis of Sec. II [Eqs. (9), (10) and following], we perform here a singular perturbative expansion by writing the term $\Xi'(x, t)$ in Eq. (10) under the form (see, e.g., Refs. [25–29]):

$$\Xi'(x, t) = \sum_{n \geq 1} \epsilon^n \Xi^{(n)}(x, t, X, T_1, T_2). \quad (20)$$

In this expansion ϵ is a small parameter.

$$X = \epsilon x \quad \text{and} \quad T_2 = \epsilon T_1 = \epsilon^2 t, \quad (21)$$

are multiscale coordinates aiming at describing the slow spatial and temporal modulations of a wave packet of finite amplitude.

$\Xi^{(0)}$ in (20) is the same as in (9) and we make the following *Ansatz* for the form of the $O(\epsilon)$ term:

$$\begin{aligned} \Xi^{(1)}(x,t,X,T_1,T_2) &= \bar{\Xi}_0^{(1)}(X,T_1,T_2) \\ &+ (\tilde{\Xi}_1^{(1)}(X,T_1,T_2)e^{i\beta(x,t)} + \text{c. c.}), \end{aligned} \quad (22)$$

where

$$\beta(x,t) = kx - \omega t. \quad (23)$$

This means that we assume that the $O(\epsilon)$ solution of (7) consists in a slowly varying contribution ($\bar{\Xi}_0^{(1)}$, [30]) plus an oscillating term with a smoothly varying amplitude $\tilde{\Xi}_1^{(1)}$. We will see below that the nonoscillating contribution $\bar{\Xi}_0^{(1)}$ is necessary for the consistency of the approach, meaning that nonlinearity not only modifies the shape of a finite amplitude wave but also affects the background on top of which the wave propagates.

We enforce a behavior of type (22) only at order ϵ ; it then will be automatically verified at higher orders, with also possible contributions from higher harmonics: see (34) for the form of the $O(\epsilon^2)$ solution.

The multiscale analysis consists in considering that the time variables t , T_1 , and T_2 (and also the spatial coordinates x and X) are independent. One thus writes

$$\begin{aligned} \partial_x &= k \partial_\beta + \epsilon \partial_X, \\ \text{and } \partial_t &= -\omega \partial_\beta + \epsilon \partial_{T_1} + \epsilon^2 \partial_{T_2}. \end{aligned} \quad (24)$$

The method applies for any value of k_0 , provided one remains in phase III, but the general expressions are quite cumbersome: For legibility we present the computation in the simpler case $k_0 = 0$.

A. Order ϵ

At this order, Eq. (7) reads [as already obtained in Eq. (11)]

$$\mathbb{M}(k\partial_\beta, -\omega\partial_\beta) \Xi^{(1)} = 0, \quad (25)$$

where \mathbb{M} is defined in (12). Using the matrix \mathbb{M}_1 of Eq. (14) and defining \mathbb{M}_0 by

$$\mathbb{M}_0 = \mathbb{M}(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ g_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Omega \\ 0 & 0 & -\Omega - g_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad (26)$$

one can rewrite Eq. (25) as

$$\begin{aligned} \mathbb{M}_0 \bar{\Xi}_0^{(1)}(X,T_1,T_2) &= 0, \\ \text{and } \mathbb{M}_1 \tilde{\Xi}_1^{(1)}(X,T_1,T_2) &= 0. \end{aligned} \quad (27)$$

For (27) to have nontrivial solutions we need to impose $\det \mathbb{M}_1 = 0$ (we already have $\det \mathbb{M}_0 = 0$). As was seen in Sec. II, this determines the dispersion relation. We study here a wave propagating in the upper branch of the spectrum, that is, in the expression (23) for $\beta(x,t)$, one has $\omega = \omega_+(k)$. We then obtain for the solutions $\bar{\Xi}_0^{(1)}$ and $\tilde{\Xi}_1^{(1)}$ of Eqs. (27) expressions

of the form:

$$\begin{aligned} \bar{\Xi}_0^{(1)}(X,T_1,T_2) &= \begin{pmatrix} \bar{n}^{(1)} \\ \bar{\Phi}^{(1)} \\ \bar{\theta}^{(1)} \\ \bar{\varphi}^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \bar{\Phi}^{(1)} \\ &\equiv \bar{R}_0 \bar{\Phi}^{(1)}(X,T_1,T_2), \end{aligned} \quad (28)$$

and

$$\begin{aligned} \tilde{\Xi}_1^{(1)}(X,T_1,T_2) &= \begin{pmatrix} \tilde{n}^{(1)} \\ \tilde{\Phi}^{(1)} \\ \tilde{\theta}^{(1)} \\ \tilde{\varphi}^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ i \Delta \end{pmatrix} \tilde{\theta}^{(1)} \\ &\equiv \tilde{R}_1 \tilde{\theta}^{(1)}(X,T_1,T_2), \end{aligned} \quad (29)$$

where $\Delta = (1 + \frac{2g_2}{k^2+2\Omega})^{1/2}$. At this point $\bar{\Phi}^{(1)}(X,T_1,T_2)$ and $\tilde{\theta}^{(1)}(X,T_1,T_2)$ in expressions (28) and (29) are still unknown, but we already collected some useful pieces of information on the form of the wave: we see that $\bar{n}^{(1)} = \bar{\theta}^{(1)} = \bar{\varphi}^{(1)} = \tilde{n}^{(1)} = \tilde{\Phi}^{(1)} = 0$ and that $\tilde{\varphi}^{(1)}$ is proportional to $\tilde{\theta}^{(1)}$. In the case $k_0 \neq 0$, $\bar{n}^{(1)}$ and $\tilde{\Phi}^{(1)}$ are nonzero, but both are proportional to $\bar{\theta}^{(1)}$, as well as $\tilde{\varphi}^{(1)}$.

B. Order ϵ^2

At this order Eq. (7) reads

$$\begin{aligned} \mathbb{M}(k\partial_\beta, -\omega\partial_\beta)[\Xi^{(2)}(x,t,X,T_1,T_2)] \\ = \bar{C}_0(X,T_1,T_2) + [\tilde{C}_1(X,T_1,T_2)e^{i\beta(x,t)} + \text{c. c.}] \\ + [\tilde{C}_2(X,T_1,T_2)e^{2i\beta(x,t)} + \text{c. c.}] \end{aligned} \quad (30)$$

with

$$\begin{aligned} \bar{C}_0(X,T_1,T_2) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \partial_{T_1} \bar{\Phi}^{(1)} + \begin{pmatrix} 0 \\ g_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} |\bar{\theta}^{(1)}|^2, \\ \tilde{C}_1(X,T_1,T_2) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ i \Delta \end{pmatrix} \partial_{T_1} \tilde{\theta}^{(1)} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \Delta k \\ i k \end{pmatrix} \partial_X \tilde{\theta}^{(1)}, \end{aligned} \quad (31)$$

and

$$\tilde{C}_2(X,T_1,T_2) = \begin{pmatrix} i \Delta k^2 \\ \frac{1}{2} \left(\frac{k^2 - 2\Omega}{k^2 + 2\Omega} g_2 - k^2 - 2\Omega \right) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} (\tilde{\theta}^{(1)})^2. \quad (33)$$

In expressions (32) and (33) we have used the same notation Δ as in (29). The precise expressions (31), (32), and (33) for \bar{C}_0 , \tilde{C}_1 , and \tilde{C}_2 result from the formulas (28) and (29) for $\bar{\Xi}_0^{(1)}$ and $\tilde{\Xi}_1^{(1)}$.

Since the operator $\mathbb{M}(\partial_x, \partial_t)$ is linear, the solution of equation (30) consists of three contributions, one for each of the source terms. Hence $\Xi^{(2)}$ is of the form

$$\begin{aligned} \Xi^{(2)} &= \bar{\Xi}_0^{(2)}(X,T_1,T_2) + [\tilde{\Xi}_1^{(2)}(X,T_1,T_2)e^{i\beta} + \text{c. c.}] \\ &+ [\tilde{\Xi}_2^{(2)}(X,T_1,T_2)e^{2i\beta} + \text{c. c.}], \end{aligned} \quad (34)$$

the different components being solutions of

$$\mathbb{M}_0 \bar{\Xi}_0^{(2)}(X, T_1, T_2) = \bar{C}_0(X, T_1, T_2), \quad (35)$$

$$\mathbb{M}_1 \tilde{\Xi}_1^{(2)}(X, T_1, T_2) = \tilde{C}_1(X, T_1, T_2), \quad (36)$$

and

$$\mathbb{M}_2 \tilde{\Xi}_2^{(2)}(X, T_1, T_2) = \tilde{C}_2(X, T_1, T_2); \quad (37)$$

where \mathbb{M}_2 is defined similarly to \mathbb{M}_1 in Eq. (14) and \mathbb{M}_0 in Eq. (26):

$$\mathbb{M}_2 = \mathbb{M}(2ik, -2i\omega_+(k)). \quad (38)$$

Equation (37) is easily solved because $\det \mathbb{M}_2 \neq 0$ [31]. We do not write its solution explicitly, but it is necessary for next order in ϵ : it contributes to the right-hand side of Eq. (44), in particular to the expression (46) for the coefficient D_1 .

Solving Eqs. (35) and (36) is more complicated than solving Eq. (37) because $\det \mathbb{M}_0 = 0$ and $\det \mathbb{M}_1 = 0$. Hence, if \bar{C}_0 is not in the image space of \mathbb{M}_0 (or if \tilde{C}_1 is not in the image space of \mathbb{M}_1) one cannot find a solution. One must thus impose that \bar{C}_0 is in the image space of \mathbb{M}_0 and that \tilde{C}_1 is in the image space of \mathbb{M}_1 . This can be done conveniently through the following technique. Let us define \bar{L}_0 and \tilde{L}_1 such that

$$\begin{aligned} \mathbb{M}_0^t \bar{L}_0 = 0 &\Rightarrow \bar{L}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \mathbb{M}_1^t \tilde{L}_1 = 0 &\Rightarrow \tilde{L}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -i/\Delta \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (39)$$

Multiplying (35) by the transposed row vector \bar{L}_0^t and (36) by \tilde{L}_1^t one obtains [32]

$$\bar{L}_0^t \cdot \bar{C}_0(X, T_1, T_2) = 0, \quad \text{and} \quad \tilde{L}_1^t \cdot \tilde{C}_1(X, T_1, T_2) = 0. \quad (40)$$

The first of these equations is trivially satisfied. The second imposes that

$$\partial_{T_1} \tilde{\theta}^{(1)} + \omega'_+(k) \partial_X \tilde{\theta}^{(1)} = 0, \quad (41)$$

which implies the important physical result that the envelope of the wave packet propagates with the group velocity $\omega'_+(k) = d\omega_+/dk$.

Once Eq. (41) is satisfied, the compatibility condition (40) is fulfilled and one can solve Eqs. (35) and (36). One obtains

$$\bar{\Xi}_0^{(2)}(X, T_1, T_2) = \begin{pmatrix} \frac{1}{g_1} \partial_{T_1} \bar{\Phi}^{(1)} + \frac{g_2}{g_1} |\tilde{\theta}^{(1)}|^2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (42)$$

and

$$\tilde{\Xi}_1^{(2)}(X, T_1, T_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{ikg_2}{\omega'_+(k)} \partial_X \tilde{\theta}^{(1)} \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (43)$$

C. Order ϵ^3

At this order one obtains an equation whose form is quite similar to that of Eq. (30) with additional harmonics:

$$\begin{aligned} &\mathbb{M}(k\partial_\beta, -\omega\partial_\beta)[\Xi^{(3)}(x, t, X, T_1, T_2)] \\ &= \bar{D}_0(X, T_1, T_2) + [\tilde{D}_1(X, T_1, T_2)e^{i\beta(x, t)} + \text{c. c.}] \\ &\quad + [\tilde{D}_2(X, T_1, T_2)e^{2i\beta(x, t)} + \text{c. c.}] \\ &\quad + [\tilde{D}_3(X, T_1, T_2)e^{3i\beta(x, t)} + \text{c. c.}]. \end{aligned} \quad (44)$$

We need not write the expressions for \tilde{D}_2 and \tilde{D}_3 because they are not necessary to determine the dynamic of $\tilde{\theta}^{(1)}$. The terms \bar{D}_0 and \tilde{D}_1 read (remember that for legibility we give the explicit expressions only in the case $k_0 = 0$)

$$\begin{aligned} \bar{D}_0 &= \begin{pmatrix} \frac{k(g_1(k^2+2\Omega+2g_2)+g_2(k^2+2\Omega+g_2))}{2g_1\omega_+(k)} \\ \frac{ig_2^2k}{2\omega_+^2(k)} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \partial_X |\tilde{\theta}^{(1)}|^2 \\ &\quad + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \partial_X^2 \bar{\Phi}^{(1)} - \frac{1}{g_1} \partial_{T_1}^2 \bar{\Phi}^{(1)} \\ \partial_{T_2} \bar{\Phi}^{(1)} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (45)$$

and

$$\begin{aligned} \tilde{D}_1 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ i\Delta \end{pmatrix} \partial_{T_2} \tilde{\theta}^{(1)} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ iP(k) \\ Q(k) \end{pmatrix} |\tilde{\theta}^{(1)}|^2 \tilde{\theta}^{(1)} \\ &\quad + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -i \frac{8g_2\Omega(g_2+k^2+2\Omega)+(k^2+2\Omega)^3}{16\omega_+^2(k)} \\ \frac{1}{2} + \frac{k^2g_2}{2\omega_+^2(k)} \end{pmatrix} \partial_X^2 \tilde{\theta}^{(1)} \\ &\quad + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{ik}{2} \\ -\frac{\Delta k}{2} \end{pmatrix} \tilde{\theta}^{(1)} \partial_X \bar{\Phi}^{(1)} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{g_2}{g_1} \end{pmatrix} \tilde{\theta}^{(1)} \partial_{T_1} \bar{\Phi}^{(1)}. \end{aligned} \quad (46)$$

In the above expression for \tilde{D}_1 the quantities $P(k)$ and $Q(k)$ are defined as

$$\begin{aligned} P(k) &= -\frac{\sqrt{2g_2+k^2+2\Omega}}{4(k^2+2\Omega)^{3/2}F(k)} \\ &\quad \times [(k^2+2\Omega)4g_2(-2g_2\Omega+k^4-4k^2\Omega-4\Omega^2) \\ &\quad + (k^2+2\Omega)^2(3k^2+2\Omega)(k^2-2\Omega) \\ &\quad + 2g_1k^2(4g_2\Omega+(k^2+2\Omega)^2)], \end{aligned} \quad (47)$$

and

$$\begin{aligned} Q(k) &= \frac{1}{4g_1(k^2+2\Omega)F(k)} \{ -8g_2^3(k^2+2\Omega)^2 \\ &\quad - g_1(k^2+2\Omega)^2[2g_1k^2+(3k^2+2\Omega)(k^2-2\Omega)] \\ &\quad + 4g_2^2g_1(5k^4-2k^2\Omega-8\Omega^2) \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 4g_2^2(k^2 + 2\Omega)(3k^2 + 2\Omega)(k^2 - 2\Omega) \\
& + 2g_1^2g_2(6k^4 + 8k^2\Omega) \\
& + 2g_1g_2(k^2 + 2\Omega)(7k^4 - 4k^2\Omega - 4\Omega^2)\}, \quad (48)
\end{aligned}$$

where

$$F(k) = -2g_2(k^2 + 2\Omega) + 2g_1k^2 + (3k^2 + 2\Omega)(k^2 - 2\Omega). \quad (49)$$

Following the same method as in Sec. III B, we write

$$\begin{aligned}
\Xi^{(3)} = & \bar{\Xi}_0^{(3)}(X, T_1, T_2) + [\tilde{\Xi}_1^{(3)}(X, T_1, T_2)e^{i\beta(x,t)} + \text{c. c.}] \\
& + [\tilde{\Xi}_2^{(3)}(X, T_1, T_2)e^{2i\beta(x,t)} + \text{c. c.}] \\
& + [\tilde{\Xi}_3^{(3)}(X, T_1, T_2)e^{3i\beta(x,t)} + \text{c. c.}]. \quad (50)
\end{aligned}$$

We will not need to consider the contribution of the second and third harmonics in (44) and (50). However, the contributions of the first harmonic [$\tilde{D}_1(X, T_1, T_2)$ and $\tilde{\Xi}_1^{(3)}$] and of the zero harmonic [$\bar{D}_0(X, T_1, T_2)$ and $\bar{\Xi}_0^{(3)}$] are important. Reinserting expression (50) in (44) yields:

$$\mathbb{M}_0 \bar{\Xi}_0^{(3)}(X, T_1, T_2) = \bar{D}_0(X, T_1, T_2), \quad (51)$$

and

$$\mathbb{M}_1 \tilde{\Xi}_1^{(3)}(X, T_1, T_2) = \tilde{D}_1(X, T_1, T_2). \quad (52)$$

Again, for solving Eq. (51) one must make sure that \bar{D}_0 is in the image space of \mathbb{M}_0 : this yields

$$\bar{L}_0^t \cdot \bar{D}_0(X, T_1, T_2) = 0, \quad (53)$$

which writes

$$\partial_{T_1}^2 \bar{\Phi}^{(1)} - c^2 \partial_X^2 \bar{\Phi}^{(1)} = S(k) \partial_X |\tilde{\theta}^{(1)}|^2, \quad (54)$$

where c is the speed of sound [cf. Eq. (18)] and

$$S(k) = \frac{(g_1 + g_2)(k^2 + 2\Omega + g_2) + g_1g_2}{2\omega_+(k)/k}. \quad (55)$$

The solution of (54) reads (computations are explained in Appendix A):

$$\bar{\Phi}^{(1)}(X, T_1, T_2) = W(k) \int^X dX |\tilde{\theta}^{(1)}|^2, \quad (56)$$

where

$$W(k) = \frac{S(k)}{[\omega_+(k)]^2 - c^2}. \quad (57)$$

Expression (56) combined with Eq. (41) shows that

$$\partial_{T_1} \bar{\Phi}^{(1)} + \omega_+'(k) \partial_X \bar{\Phi}^{(1)} = 0. \quad (58)$$

This result shows that the deformation of the background propagates with the group velocity, as does the envelope of the wave [which obeys the same equation, cf. (41)].

Finally, for being able to solve Eq. (52) we need \tilde{D}_1 be in the image space of \mathbb{M}_1 :

$$\tilde{L}_1^t \cdot \tilde{D}_1(X, T_1, T_2) = 0. \quad (59)$$

This reads

$$\begin{aligned}
i \partial_{T_2} \tilde{\theta}^{(1)} = & -\frac{\omega_+'(k)}{2} \partial_X^2 \tilde{\theta}^{(1)} + \left[\left(P(k) - \frac{Q(k)}{\Delta} \right) |\tilde{\theta}^{(1)}|^2 \right. \\
& \left. + k \left(1 + \frac{g_2}{g_1} \frac{k^2 + 2\Omega + g_2}{k^2 + 2\Omega + 2g_2} \right) \partial_X \bar{\Phi}^{(1)} \right] \frac{\tilde{\theta}^{(1)}}{2}, \quad (60)
\end{aligned}$$

where $\omega_+'(k) = d^2\omega_+/dk^2$. One can reexpress the term $\partial_X \bar{\Phi}^{(1)}$ using Eq. (56). One then obtains a nonlinear Schrödinger equation (NLS) for $\tilde{\theta}^{(1)}(X, T_1, T_2)$:

$$i \partial_{T_2} \tilde{\theta}^{(1)} = -\frac{\omega_+'(k)}{2} \partial_X^2 \tilde{\theta}^{(1)} + g_{\text{eff}}(k) |\tilde{\theta}^{(1)}|^2 \tilde{\theta}^{(1)}, \quad (61)$$

with

$$\begin{aligned}
g_{\text{eff}}(k) = & \frac{1}{2} \left(P(k) - \frac{Q(k)}{\Delta} \right) \\
& + \frac{k}{2} \left(1 + \frac{g_2}{g_1} \frac{k^2 + 2\Omega + g_2}{k^2 + 2\Omega + 2g_2} \right) W(k). \quad (62)
\end{aligned}$$

One has reached a point where the approach is self-contained, as far as the first-order term $\Xi^{(1)}$ in expansion (20) is concerned. One just needs to return to the actual variables x and t using the reverse of transformations (24) [33]. We give below final formulas valid even when $k_0 \neq 0$.

D. Final formulas and discussion

A nonlinear wave packet propagating in the upper branch is described by a set of fields $\Xi(x, t)$ of the form (10) with

$$\Xi'(x, t) = \bar{\Xi}(x, t) + [\tilde{\Xi}(x, t)e^{i(kx - \omega_+(k)t)} + \text{c. c.}]. \quad (63)$$

The component $\tilde{\theta}(x, t)$ of the envelope $\tilde{\Xi}(x, t)$ is solution of

$$i \partial_t \tilde{\theta} = -\frac{\omega_+'(k)}{2} \partial_y^2 \tilde{\theta} + g_{\text{eff}}(k) |\tilde{\theta}|^2 \tilde{\theta}, \quad (64)$$

where $y = x - \omega_+'(k)t$ is the space coordinate in a frame moving at the group velocity.

Once $\tilde{\theta}(x, t)$ has been determined, the component $\bar{\Phi}(x, t)$ of the background deformation is obtained as

$$\bar{\Phi}(x, t) = W(k) \int^x dx |\tilde{\theta}|^2. \quad (65)$$

The other components of the background and of the envelope are given by

$$\bar{\Xi}(x, t) = \begin{pmatrix} \bar{n}(x, t) \\ \bar{\Phi}(x, t) \\ \bar{\theta}(x, t) \\ \bar{\varphi}(x, t) \end{pmatrix} = \bar{R} \bar{\Phi}(x, t), \quad (66)$$

and

$$\tilde{\Xi}(x, t) = \begin{pmatrix} \tilde{n}(x, t) \\ \tilde{\Phi}(x, t) \\ \tilde{\theta}(x, t) \\ \tilde{\varphi}(x, t) \end{pmatrix} = \tilde{R} \tilde{\theta}(x, t), \quad (67)$$

where $\bar{R}^t = (0, 1, 0, 0)$ and

$$\tilde{R} = \begin{pmatrix} \frac{k(k^2+2\Omega)(2g_2+k^2-4k_0^2+2\Omega)-4k\omega_+^2(k)}{8k_0(k^2+\Omega)\omega_+(k)} \\ -\frac{i((2g_2+k^2+2\Omega)(k^2+2\Omega)+4k^2k_0^2-4\omega_+(k)^2)}{4kk_0(k^2+\Omega)} \\ 1 \\ \frac{i(k^2(2g_2+k^2-4k_0^2+2\Omega)+4\omega_+^2(k))}{4(k^2+\Omega)\omega_+(k)} \end{pmatrix}. \quad (68)$$

We do not write here the explicit forms of $W(k)$ and $g_{\text{eff}}(k)$ for $k_0 \neq 0$ because they are too cumbersome. However, it is important for subsequent discussions to stress that Eq. (57) still holds for $k_0 \neq 0$, but with a numerator $S(k)$ whose expression is different from the one given in Eq. (55) for the case $k_0 = 0$. On the other hand, the formulas (66), (67), and (68) are valid even when $k_0 \neq 0$. Note that \tilde{R} is identical to \bar{R}_0 defined in (28) and that \tilde{R} reduces to \bar{R}_1 defined in (29) when $k_0 = 0$. In this case, the first two components of \tilde{R} cancel and the nonlinear structure corresponds to a polarization signal, with oscillations of ρ_\uparrow and ρ_\downarrow preserving a fixed total density.

The nonlinear Schrödinger equation (64) describes the spatiotemporal evolution of the envelope wave, which is advected by the group velocity $\omega'_+(k)$ while dispersion and nonlinearity give corrections to the dynamics of the wave train, in particular for large times. It has been obtained through a multiscale expansion assuming the existence of well-separated spatial and temporal scales. The two spatial scales are the wavelength $\sim k^{-1}$ [associated with the x dependence of the phase $\beta(x, t)$ (23)] and the length a characteristic of the spatial variations of the envelope of the wave packet (associated to coordinate X). These length scales should be widely different and this corresponds to defining our small parameter as

$$\epsilon = \frac{1}{ak} \ll 1. \quad (69)$$

The three time scales legitimating the introduction of the three different time coordinates t , T_1 , and T_2 are:

$$\tau \ll \tau_1 \ll \tau_2, \quad (70)$$

where $\tau \sim 1/\omega_+(k)$ is the period of the carrier wave. The characteristic time τ_1 is associated to the group motion of the envelope. The time τ_2 accounts for the fact that the envelope not only propagates with the group velocity, but also changes form because of higher-order dispersive effects and of nonlinearity (both effects typical balance in a nonlinear wave such as the soliton solutions discussed below). From Eqs. (41) and (61) one can check that when the condition (69) is fulfilled one has $\tau/\tau_1 \sim \tau_1/\tau_2 \sim \epsilon$, thus legitimating *a posteriori* the introduction of the three time coordinates (21).

When $g_{\text{eff}}(k)$ is positive, periodic wave trains with constant amplitude formed in the upper branch of the spectrum are dynamically stable. They can support nonlinear excitations such as dark solitons. In this case θ —solution of (64)—is of the form

$$\tilde{\theta}(y, t) = \Theta_0 e^{-i g_{\text{eff}}(k) \Theta_0^2 t} [\cos \alpha \tanh(Y) + i \sin \alpha], \quad (71)$$

where $\Theta_0 \in \mathbb{R}^+$ is the amplitude of the wave train and $\alpha \in [0, \pi/2]$; $\sin \alpha$ is the dimensionless velocity of the dark soliton,

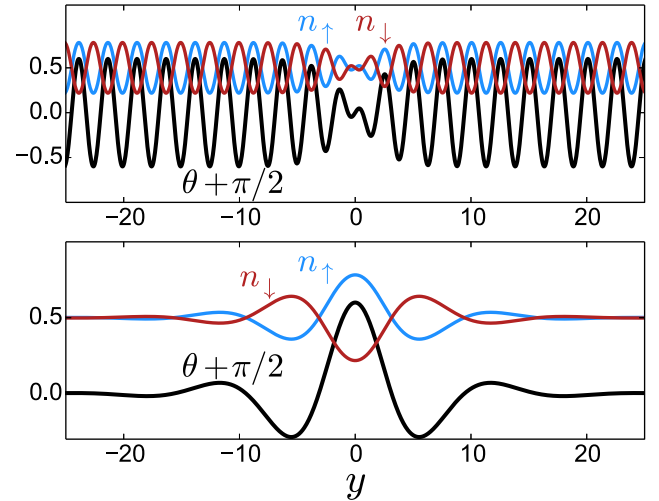


FIG. 3. θ , n_\uparrow , and n_\downarrow as functions of y for a dark envelope soliton (71) (top) and a bright envelope one (73) (bottom). The system's parameters are the same as in Fig. 4. For both plots $\Theta_0 = 0.3$. The dark soliton is plotted for $k = 2.5$ [$g_{\text{eff}}(k) = 1.4$] and $V_{\text{sol}} = 0$ (black soliton) and the bright soliton for $k = 0.5$ [$g_{\text{eff}}(k) = -0.6$].

cf. Eq. (72). The argument Y in (71) is

$$Y = \frac{y - V_{\text{sol}} t}{\xi_{\text{eff}}(k)} \cos \alpha, \quad \text{where } V_{\text{sol}} = \sin \alpha c_{\text{eff}}(k), \quad (72)$$

and $c_{\text{eff}}(k) = \Theta_0 \sqrt{g_{\text{eff}}(k) \omega_+''(k)} = \omega_+''(k) / \xi_{\text{eff}}(k)$.

In the case where $g_{\text{eff}}(k) < 0$, wave trains in the upper branch are dynamically unstable (they experience a modulational instability, see below), but one may observe stable bright envelope solitons, for which the solution of (64) is of the form

$$\tilde{\theta}(y, t) = \frac{\Theta_0 \exp\left(-i \frac{g_{\text{eff}}(k)}{2} \Theta_0^2 t\right)}{\cosh\left(\Theta_0 \sqrt{\frac{-g_{\text{eff}}(k)}{\omega_+''(k)}} y\right)}, \quad (73)$$

where Θ_0 is a positive real parameter governing the amplitude of the soliton. Once $\tilde{\theta}$ is known, the corresponding values of the other fields describing the system are then given by (65), (66), and (67). The density profiles of typical envelope solitons are plotted in Fig. 3.

In order to get better insight on the type of dynamics described by the envelope NLS equation (64), we show in Fig. 4 how the effective nonlinear constant g_{eff} depends on k .

We see that $g_{\text{eff}}(k)$ starts at low k with a negative value, and since $\omega_+''(k) > 0$, this means that wave trains in the upper branch experience a modulational instability, see, e.g., Ref. [34] and references therein. Modulational instability in Bose-Einstein condensates with repulsive interaction have already been studied in the presence of an external optical lattice potential [35] and for the counterflow of two miscible species [36]. Here we consider a scenario closer to the original Benjamin-Feir configuration [37], where nonlinearity destabilizes a periodic wave train through generation of spectral sidebands [see the discussion below, around Eqs. (76) and (77)].

When discussing the physical origin of the modulational instability in the present context, it is interesting to note that $g_{\text{eff}}(k)$ diverges and changes sign for a value of k , which is

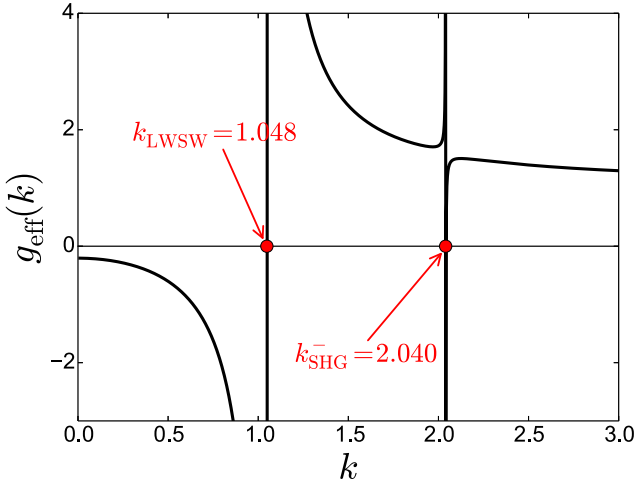


FIG. 4. The solid line represents $g_{\text{eff}}(k)$ for the choice of parameters $k_0 = 0$, $g_1 = 2.2$, $g_2 = 0.2$, and $\Omega = 2.5$.

denoted as k_{LWSW} in Fig. 4. For this value of k , the system displays a so-called long-wave–short-wave resonance [38]. In the present configuration this corresponds to a case where the wave in the upper branch (with wave vector k) decays into two waves, one in the same branch with a similar wave vector (k'), and another one in the lower branch, with a small wave vector (q , the long wave). The conditions of conservation of momentum and energy read $k = k' + q$ and

$$\omega_+(k) = \omega_+(k - q) + \omega_-(q). \quad (74)$$

Since q is small one can expand the first term of the right-hand side of (74) as: $\omega_+(k - q) \simeq \omega_+(k) - q \omega'_+(k)$, and also write $\omega_-(q) \simeq cq$. Hence, the phenomenon occurs at $k = k_{\text{LWSW}}$ such that

$$\omega'_+(k_{\text{LWSW}}) = c, \quad (75)$$

meaning that the condition of resonance is that the group velocity of the short wave is equal to the phase velocity of the long wave.

The location of the resonance is clearly seen in Fig. 4, at a value of k in exact agreement with the value k_{LWSW} determined by (75). From the derivation leading to the NLS Eq. (64), one can locate the mathematical origin of the resonance phenomenon in Eq. (65), where $W(k)$ as given by (57) clearly diverges exactly at resonance. The phenomenological analysis just presented assumes that this divergence corresponds to a transfer of excitation from the upper branch to the lower one, but one should ascertain that this is indeed the case in our mathematical treatment. Indeed, it might seem from Eq. (54) that the divergence is connected to a resonance with a deformation of the background (of $\bar{\Phi}^{(1)}$), which might not be exactly connected to the lower branch of excitation. A first clue of this connection comes from the left-hand side of Eq. (54) itself: in this equation, the zero mode of the operator acting on $\bar{\Phi}^{(1)}$ corresponds to a dispersion relation, which is the long wave length approximation of the lower branch: $\omega'_-(k) \simeq ck$. The second and final reason explaining why in this context $\bar{\Phi}^{(1)}$ indeed represents the lower branch excitation comes from the very reason for its appearance in (54): it originates

from Eq. (28), more precisely, from the specific form of $\bar{\Xi}_0^{(1)}$, which is tailored to be representative of the kernel of \mathbb{M}_0 . Additionally, as can be checked by a comparison of the forms and definitions of \mathbb{M}_1 (14) and \mathbb{M}_0 (26), \mathbb{M}_0 is the $k \rightarrow 0$ limit of \mathbb{M}_1 when $\omega = \omega_-(k)$: hence the background contributions in the Ansatz (22) (and in the higher-order terms) is indeed a low- k contribution in the lowest branch and the divergence of $W(k)$ in (57) indeed corresponds to a resonance between the upper branch and the (long wavelength limit of) the lower branch.

It is remarkable that the occurrence of the long-wave–short-wave resonance is connected to a disappearance of the modulational instability of the upper branch: as one can see from Fig. 4 the nonlinear parameter $g_{\text{eff}}(k)$ is positive when k is larger than k_{LWSW} and wave trains in the upper branch are thus stable when their wave vector is larger than the one of the long-wave–short-wave resonance. In order to appreciate the origin of this phenomenon one first needs to get some physical insight on the cause of the modulational instability. Since the reasoning presented below is quite general, and for simplifying the notations, we will here for a moment denote the dispersion relation as $\omega(k)$ instead of $\omega_+(k)$.

If one studies a wave train with wave vector k and constant (real) amplitude Θ_0 , one finds from (64) that the corresponding $\theta(x, t)$ is equal to $\Theta_0 \exp[-i g_{\text{eff}}(k) \Theta_0^2 t]$. Then, a perturbative treatment of Eq. (64) readily shows (see, e.g., Refs. [39–41]) that small amplitude modulations of the carrier wave with relative wave vector q and angular frequency ϖ obey the dispersion relation

$$(\varpi - \omega'(k)q)^2 = \left(\frac{\omega''(k)q^2}{2} \right)^2 + g_{\text{eff}}(k) \Theta_0^2 \omega''(k) q^2. \quad (76)$$

If $g_{\text{eff}}(k)$ is negative, ϖ will be imaginary (for low enough values of q), meaning that the wave train is dynamically unstable. The value q^* of q corresponding to the largest imaginary part of ϖ , i.e., to the greatest growth rate of the perturbations, verifies

$$\frac{\omega''(k)}{2} (q^*)^2 = -g_{\text{eff}}(k) \Theta_0^2. \quad (77)$$

One gets here a confirmation that the wave train is unstable when $\omega''(k) g_{\text{eff}}(k)$ is negative. This corresponds to the so-called Lighthill-Benjamin-Feir criterion of modulational instability [34], which can be given the following intuitive interpretation: one assumes that a wave train of finite amplitude Θ_0 corresponds to the renormalized dispersion relation

$$\omega_{\text{ren}}(k) = \omega(k) + g_{\text{eff}}(k) \Theta_0^2. \quad (78)$$

The initial carrier wave at angular frequency $\omega(k)$ and wave vector k may decay into two side bands according to the following process:

$$\begin{aligned} \omega(k) + \omega(k) &\rightarrow \omega_{\text{ren}}(k - q^*) + \omega_{\text{ren}}(k + q^*), \\ k + k &\rightarrow (k - q^*) + (k + q^*), \end{aligned} \quad (79)$$

where q^* as given by (77) enforces the energy and momentum conservation relations in the process (79), as can be checked analytically (by an expansion in q^*) and is graphically demonstrated in Fig. 5. It is clear that, when $\omega''(k) > 0$,

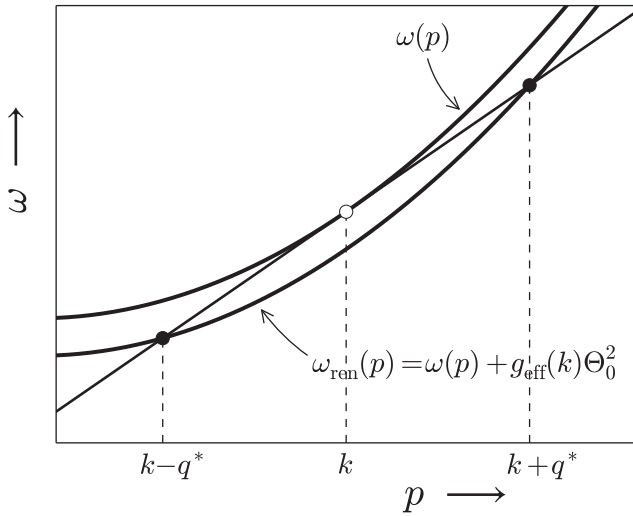


FIG. 5. Illustration of the modulational instability process. The straight solid line is the tangent to $\omega(p)$ at $p = k$. Two initial elementary excitations $[k, \omega(k)]$ can decay into $[k - q^*, \omega_{\text{ren}}(k - q^*)]$ and $[k + q^*, \omega_{\text{ren}}(k + q^*)]$ provided q^* verifies the above construction, i.e., that the two black points are the intersections of the straight solid line with the renormalized dispersion relation $\omega_{\text{ren}}(p)$. An expansion of $\omega(p)$ at second order in the vicinity of k shows that (i) the white point is the middle of the two black points [and this automatically implies momentum and energy conservation in the process (79)] and that (ii) q^* defined by the above construction verifies Eq. (77).

the geometrical construction of Fig. 5 is only possible if $g_{\text{eff}}(k) < 0$: in this case the wave train is modulationally unstable.

Hence, we understand why the change of sign of $g_{\text{eff}}(k)$ observed in Fig. 4 when k crosses k_{LWSW} changes the stability of the wave train. Now it remains to understand the physical reason for this change of sign. Actually, the reason for it becomes clear when one focuses on the nonlinear term in brackets in Eq. (60). The first part of this term [with the $P(k)$ and $Q(k)$ contributions] is a genuine nonlinear self-interaction, but the second part is proportional to $k \partial_X \bar{\Phi}^{(1)}$, i.e., to $k \bar{U}^{(1)}$, which is a Doppler contribution to the energy of an excitation moving over a background of velocity $\bar{U}^{(1)}$. For $k < k_{\text{LWSW}}$, the momentum q imparted to the lower branch is negative, and the corresponding value of $\bar{U}^{(1)}$ is also, as physically clear and mathematically demonstrated by the fact that in this case $W(k) < 0$ [see Eq. (57)]. It so happens that this Doppler contribution is dominant over the self-interaction terms, and, as a result, $g_{\text{eff}}(k < k_{\text{LWSW}}) < 0$. On the contrary, for $k > k_{\text{LWSW}}$ the momentum imparted to the lower branch is positive, $\bar{U}^{(1)} > 0$ and $g_{\text{eff}}(k > k_{\text{LWSW}}) > 0$. This ends our discussion of the behavior of $g_{\text{eff}}(k)$ around $k \simeq k_{\text{LWSW}}$ and the explanation for the disappearance of the modulational instability when $k \gtrsim k_{\text{LWSW}}$.

Besides the long-wave–short-wave resonance, one can notice another resonantlike structure in Fig. 4. It corresponds to a generation of second harmonic according to the three waves process

$$k + k \rightarrow 2k, \quad \omega_+(k) + \omega_+(k) \rightarrow \omega_-(2k). \quad (80)$$

The condition of conservation of momentum and energy in the above process determines the value of the resonant wave vector k_{SHG}^- in excellent agreement with the location of the divergence of $g_{\text{eff}}(k)$ observed in Fig. 4. In the vicinity of k_{SHG}^- our approach [and the envelope NLS equation (64) is not relevant] because the determinant of \mathbb{M}_2 vanishes, contrarily to what has been stated after Eq. (38), and the procedure that has been used for determining $\tilde{\Xi}_2^{(2)}$ from Eq. (37) is incorrect. In this case the assumption that higher-order harmonics have a very small contribution is wrong. The fact that second harmonic generation is associated with vanishing of the determinant of \mathbb{M}_2 is an immediate result of the definition (38) and of energy conservation in the process (80): at resonance one has $\mathbb{M}_2 \equiv \mathbb{M}[2i k_{\text{SHG}}^-, -2i \omega_+(k_{\text{SHG}}^-)] = \mathbb{M}[2i k_{\text{SHG}}^-, -i \omega_-(2k_{\text{SHG}}^-)]$. The determinant of this last matrix is zero, because, for any p , $\det \mathbb{M}[ip, -i \omega_-(p)] = 0$, since $\omega = \omega_-(p)$ is one of the dispersion relations of the system.

For concluding the discussion, it is interesting to notice that, besides the second harmonic generation identified in Fig. 4, there exists another possible generation of second harmonics, which only involves excitations of the upper branch:

$$k + k \rightarrow 2k, \quad (81)$$

$$\omega_+(k) + \omega_+(k) \rightarrow \omega_+(2k).$$

This new process should induce a divergence of $g_{\text{eff}}(k)$ at the wave vector $k = k_{\text{SHG}}^+$, which ensures energy conservation in (81). Indeed, in this case we have a linear system $\mathbb{M}[2i k_{\text{SHG}}^+, -2i \omega_+(k_{\text{SHG}}^+)] = \mathbb{M}[2i k_{\text{SHG}}^+, -i \omega_+(2k_{\text{SHG}}^+)]$ that has a zero determinant because $\omega = \omega_+(p)$ is one of the dispersion relations of the system. For the set of parameters corresponding to Fig. 4, this second harmonic generation should occur at $k_{\text{SHG}}^+ = 1.612$. It is then surprising that this resonance is not seen in this figure. However, it is clearly seen when $k_0 \neq 0$ (see Fig. 6), at the value predicted by the conservation of energy in (81).

Actually, in the case where $k_0 = 0$, at $k = k_{\text{SHG}}^+$ one has $\det \mathbb{M}_2 = 0$, and the divergent factor involved in the

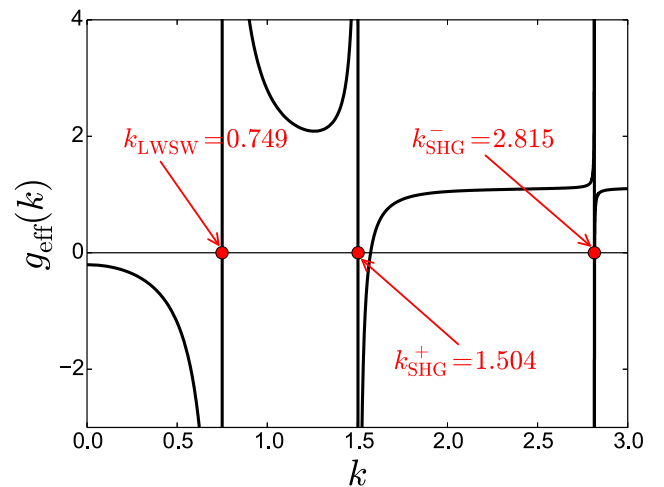


FIG. 6. The solid line represents $g_{\text{eff}}(k)$ for the choice of parameters $k_0 = 0.5$, $g_1 = 2.2$, $g_2 = 0.2$, and $\Omega = 2.5$. The location of the resonances is determined by momentum and energy conservation in the processes (74) (for k_{LWSW}), (80) (for k_{SHG}^-), and (81) (for k_{SHG}^+).

determination of $\tilde{\Xi}_2^{(2)}$ from Eq. (37) [and which results in a divergence in the expression of $g_{\text{eff}}(k)$] is canceled by another contribution. This can be easily understood by noticing that \mathbb{M} defined in Eq. (12) is a block matrix when $k_0 = 0$:

$$\mathbb{M} = \begin{pmatrix} \mathbb{M}_- & 0 \\ 0 & \mathbb{M}_+ \end{pmatrix}, \quad (82)$$

where \mathbb{M}_- and \mathbb{M}_+ are 2×2 matrices accounting for the lower and the upper excitation branches. We are here interested in second harmonic generation, i.e., in the specific matrix $\mathbb{M}_2 = \mathbb{M}(2ik, -2i\omega_+(k))$. In this case, we denote the matrices \mathbb{M}_- and \mathbb{M}_+ as \mathbb{M}_{2-} and \mathbb{M}_{2+} and their inverses are

$$\mathbb{M}_{2-}^{-1} = \frac{1}{\omega_-^2(2k) - [2\omega_+(k)]^2} \text{adj}(\mathbb{M}_{2-}), \quad (83a)$$

$$\mathbb{M}_{2+}^{-1} = \frac{1}{\omega_+^2(2k) - [2\omega_+(k)]^2} \text{adj}(\mathbb{M}_{2+}), \quad (83b)$$

where “adj” denotes the adjugate matrix. The divergence of $g_{\text{eff}}(k_{\text{SHG}}^+)$ is associated with the divergence of the denominator in (83b), corresponding to energy conservation in the process (81). In the special case $k_0 = 0$, the solution of Eq. (37) reads:

$$\tilde{\Xi}_2^{(2)} = \begin{pmatrix} \mathbb{M}_{2-}^{-1} & 0 \\ 0 & \mathbb{M}_{2+}^{-1} \end{pmatrix} \tilde{\mathcal{C}}_2, \quad (84)$$

where $\tilde{\mathcal{C}}_2$ is given by Eq. (33) when $k_0 = 0$: in this case its last two components are zero. Eq. (84) then reads

$$\tilde{\Xi}_2^{(2)} = \begin{pmatrix} \mathbb{M}_{2-}^{-1} \left(\frac{1}{2} \begin{pmatrix} i \Delta k^2 \\ \frac{k^2 - 2\Omega}{k^2 + 2\Omega} g_2 - k^2 - 2\Omega \end{pmatrix} \right) \\ \mathbb{M}_{2+}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} (\tilde{\theta}^{(1)})^2 \quad (85)$$

and the possible divergence of the denominator of \mathbb{M}_{2+}^{-1} is masked. This is the reason for the inhibition of the second harmonic generation process (81) when $k_0 = 0$.

IV. NONLINEAR PERTURBATION THEORY FOR EXCITATIONS PROPAGATING IN THE LOWER BRANCH

We now study the propagation of a sound pulse which, in a linear approximation, would lie on the lower excitation branch. The method used in Sec. III can be employed in the present case. It yields for the nonlinear coefficient $g_{\text{eff}}(k)$ a behavior represented in Fig. 7.

The nonlinear coefficient diverges at large wavelength. This is due to the fact that, for the lower branch, the analog of the coefficient $W(k)$ (57) diverges when $k \rightarrow 0$ since $\omega'_-(0) = c$. In this case the nonlinear time $t_{\text{NL}} \propto g_{\text{eff}}(k)^{-1}$ associated to Eq. (64) diverges indicating that nonlinear structures form extremely rapidly. t_{NL} may become even smaller than the period of the wave (except for waves of extremely small amplitude) and in this case the technique of the envelope NLS fails.

In this long wavelength limit one can suggest an alternative method consisting in deriving equations for the interacting fields themselves instead of an effective equation for the envelope. This method is based on the following reasoning: In the linear regime and at the level of accuracy at which the expansion (17) holds, any of the components of $\Xi'(x, t) - n'$,

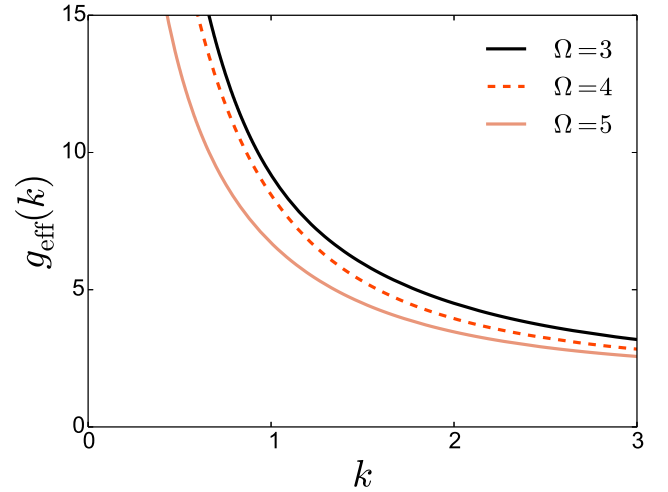


FIG. 7. Nonlinear coefficient $g_{\text{eff}}(k)$ for the envelope NLS equation describing a wave packet propagating in the lower excitation branch. The curves are drawn for different values of Ω ; the other parameters are $k_0 = 1$, $g_1 = 2.2$, and $g_2 = 0.2$.

say—satisfies the linear equation

$$n'_t + c n'_x - c_3 n'_{xxx} = 0, \quad (86)$$

where the last term describes a small dispersive correction to the propagation with constant velocity c . If the amplitude n' is small but finite and such that this term has the same order of magnitude as the leading nonlinear correction to (86) (which is typically quadratic in n'), then nonlinear effects cannot be omitted for correctly describing the propagation of the pulse. In this regime one can try to derive an equation of the type (86) with additional terms taking into account weak nonlinear effects. The most natural extension of (86) is a Korteweg–de Vries (KdV) equation in which a nonlinear term of the form $n' n'_x$ accounts for a dependence in density fluctuations ($\propto n'$) of the velocity of sound.

A. Quadratic nonlinearity: KdV regime

It now is appropriate to work in a reference frame moving at the speed of sound c , and to use $x - ct$ and t as coordinates. In order that the derivatives in equations of type (86) appear at the same order, we define

$$\xi = \epsilon^{1/2}(x - ct), \quad \text{and} \quad \tau = \epsilon^{3/2}t. \quad (87)$$

where ϵ will henceforth be a small positive parameter. The choice of the specific powers $\epsilon^{1/2}$ and $\epsilon^{3/2}$ in (87) (instead of ϵ and ϵ^3 for instance) will make sure that the derivatives in equations of type (86) appear at the same order as the quadratic nonlinear contribution [$\propto n' n'_x$, see Eq. (104) below]. In terms of the new variables ξ and τ and of the velocities U and v defined in Eq. (6), the system (7) reads

$$\begin{aligned} \epsilon^{3/2} n_\tau &= \epsilon^{1/2} c n_\xi + \epsilon^{1/2} k_0 [n \cos \theta]_\xi \\ &\quad - \frac{1}{2} \epsilon^{1/2} [n(U - v \cos \theta)]_\xi, \end{aligned} \quad (88a)$$

$$\begin{aligned} \epsilon^{3/2} U_\tau &= \epsilon^{1/2} c U_\xi - \epsilon^{1/2} k_0 v_\xi \\ &- \epsilon^{1/2} \left[\frac{\epsilon n_\xi^2}{4 n^2} - \frac{\epsilon n_{\xi\xi}}{2 n} - \epsilon \frac{\cot \theta}{2} \frac{[n \theta_\xi]_\xi}{n} \right]_\xi \\ &- \epsilon^{1/2} \left[\frac{\epsilon \theta_\xi^2 + U^2 + v^2}{4} + g_1 n \right]_\xi \\ &+ \epsilon^{1/2} \theta_\xi \frac{\Omega \cos \theta}{\sin^2 \theta} \cos \varphi + \frac{\Omega}{\sin \theta} v \sin \varphi, \end{aligned} \quad (88b)$$

$$\begin{aligned} \epsilon^{3/2} \theta_\tau &= \epsilon^{1/2} c \theta_\xi - \Omega \sin \varphi \\ &- \frac{1}{2} \epsilon^{1/2} \left(U \theta_\xi + \frac{[n(v + 2k_0) \sin \theta]_\xi}{n} \right), \end{aligned} \quad (88c)$$

$$\begin{aligned} \epsilon^{3/2} v_\tau &= \epsilon^{1/2} c v_\xi - \epsilon^{1/2} k_0 U_\xi \\ &+ \epsilon^{1/2} \left[\frac{\epsilon}{2 \sin \theta} \frac{[n \theta_\xi]_\xi}{n} - \frac{U v}{2} + g_2 n \cos \theta \right]_\xi \\ &+ \epsilon^{1/2} \theta_\xi \frac{\Omega \cos \varphi}{\sin^2 \theta} + \Omega v \cot \theta \sin \varphi. \end{aligned} \quad (88d)$$

We perform a multiscale analysis by expanding (n, U, θ, v) in the following way:

$$\begin{pmatrix} n(\xi, \tau) \\ U(\xi, \tau) \\ \theta(\xi, \tau) \\ v(\xi, \tau) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{\pi}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + \epsilon \begin{pmatrix} n^{(1)} \\ U^{(1)} \\ \theta^{(1)} \\ v^{(1)} \end{pmatrix} + \epsilon^2 \begin{pmatrix} n^{(2)} \\ U^{(2)} \\ \theta^{(2)} \\ v^{(2)} \end{pmatrix} + \dots \quad (89)$$

In agreement with the definitions (6) and (87) we have

$$U = \epsilon^{1/2} \Phi_\xi, \quad \text{and} \quad v = \epsilon^{1/2} \varphi_\xi. \quad (90)$$

Taking into account expansion (89) and the leading order (9) for Φ and φ we thus have

$$\begin{aligned} \Phi &= -2\epsilon^{-3/2} \mu \tau + \epsilon^{1/2} \Phi^{(1)} + \epsilon^{3/2} \Phi^{(2)} + \dots \\ \varphi &= \epsilon^{1/2} \varphi^{(1)} + \epsilon^{3/2} \varphi^{(2)} + \dots \end{aligned} \quad (91)$$

Once the *Ansätze* (89) and (91) are inserted back into (88), the leading term is $O(\epsilon^{1/2})$ and simply yields $\varphi^{(1)} = 0$ (and thus $v^{(1)} = 0$). At next order ($\epsilon^{3/2}$) one obtains

$$\mathbb{K} \begin{pmatrix} n_\xi^{(1)} \\ U_\xi^{(1)} \\ \theta_\xi^{(1)} \\ \varphi^{(2)} \end{pmatrix} = 0, \quad (92)$$

where

$$\mathbb{K} = \begin{pmatrix} c & -\frac{1}{2} & k_0 & 0 \\ -g_1 & c & 0 & 0 \\ k_0 & 0 & c & -\Omega \\ 0 & -k_0 & \Omega + g_2 & 0 \end{pmatrix}. \quad (93)$$

Since $\det \mathbb{K} = 0$, Eq. (92) has nontrivial solutions. The kernel of \mathbb{K} is one dimensional; as a result, the solution of Eq. (92) is of the form:

$$\begin{pmatrix} n_\xi^{(1)} \\ U_\xi^{(1)} \\ \theta_\xi^{(1)} \\ \varphi^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{g_1}{c} \\ \frac{1}{c} \frac{k_0 g_1}{\Omega + g_2} \\ \frac{k_0}{\Omega} \frac{\Omega + g_1 + g_2}{\Omega + g_2} \end{pmatrix} n_\xi^{(1)} \equiv R n_\xi^{(1)}. \quad (94)$$

We also need (for later use) to determine the column vector L such that

$$\mathbb{K}^t L = 0 \Leftrightarrow L^t \mathbb{K} = 0, \quad (95)$$

This fixes

$$L^t \propto \left(1, \frac{c}{g_1}, 0, -\frac{k_0}{\Omega + g_2} \right). \quad (96)$$

At order $\epsilon^{5/2}$ we obtain

$$\mathbb{K} \begin{pmatrix} n_\xi^{(2)} \\ U_\xi^{(2)} \\ \theta_\xi^{(2)} \\ \varphi^{(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{pmatrix}, \quad (97)$$

where

$$\begin{aligned} A_1 &= n_\tau^{(1)} + \frac{1}{2} [n^{(1)} U^{(1)}]_\xi - k_0 [n^{(1)} \theta^{(1)}]_\xi, \\ A_2 &= U_\tau^{(1)} + \frac{1}{2} U^{(1)} U_\xi^{(1)} - \Omega \theta^{(1)} \theta_\xi^{(1)} \\ &\quad + \frac{1}{2} n_{\xi\xi\xi}^{(1)} + k_0 v_\xi^{(2)}, \\ A_3 &= \theta_\tau^{(1)} + \frac{1}{2} U^{(1)} \theta_\xi^{(1)} - \frac{1}{2} v_\xi^{(2)} \\ &\quad + k_0 \theta^{(1)} \theta_\xi^{(1)} + k_0 n^{(1)} n_\xi^{(1)}, \\ A_4 &= -g_2 [n^{(1)} \theta^{(1)}]_\xi + \frac{1}{2} \theta_{\xi\xi\xi}^{(1)} - c v_\xi^{(2)}. \end{aligned} \quad (98)$$

Performing the substitution (94), we can express the system (97) in the following way:

$$\mathbb{K} \begin{pmatrix} n_\xi^{(2)} \\ U_\xi^{(2)} \\ \theta_\xi^{(2)} \\ \varphi^{(3)} \end{pmatrix} = C_\tau n_\tau^{(1)} + C_3 n_{\xi\xi\xi}^{(1)} + C_{nl} n^{(1)} n_\xi^{(1)}, \quad (99)$$

with

$$C_\tau = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{g_1}{c} \\ \frac{1}{c} \frac{k_0 g_1}{\Omega + g_2} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (100)$$

$$C_{nl} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2} \sqrt{g_1 (-2k_0^2 + \Omega + g_2)}}{\sqrt{\Omega + g_2}} \\ g_1 \left(\frac{\Omega}{\Omega + g_2} + \frac{g_2}{-2k_0^2 + \Omega + g_2} \right) \\ k_0 \left(\frac{g_1 (2k_0^2 + \Omega + g_2)}{(\Omega + g_2)(-2k_0^2 + \Omega + g_2)} + 1 \right) \\ -\frac{2\sqrt{2} \sqrt{g_1 g_2 k_0}}{\sqrt{\Omega + g_2} \sqrt{-2k_0^2 + \Omega + g_2}} \end{pmatrix}, \quad (101)$$

and

$$C_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{(\Omega + g_1 + g_2) k_0^2}{\Omega(\Omega + g_2)} - \frac{1}{2} \\ -\frac{(\Omega + g_1 + g_2) k_0}{2\Omega(\Omega + g_2)} \\ \frac{k_0 (2(\Omega + g_1 + g_2) k_0^2 - (\Omega + g_2)(g_1 + g_2))}{\sqrt{2}\Omega(\Omega + g_2)^{3/2} \sqrt{\frac{-2k_0^2 + \Omega + g_2}{g_1}}} \end{pmatrix}. \quad (102)$$

Left multiplication of Eq. (99) by L^t gives

$$0 = (L^t \cdot C_\tau) n_\tau^{(1)} + (L^t \cdot C_{nl}) n^{(1)} n_\xi^{(1)} + (L^t \cdot C_3) n_{\xi\xi\xi}^{(1)}. \quad (103)$$

Equation (103) is a consistency condition: Eq. (97) admits a solution only if the column vector A is in the image space of \mathbb{K} , which is implied by (103) [we used the same technique in Sec. III, see Eqs. (40), (53), and (59)]. Explicitly, Eq. (103) reads

$$n_\tau^{(1)} + \frac{3g_1}{4c} \left(1 - \frac{2\Omega k_0^2}{(\Omega + g_2)^2} \right) n^{(1)} n_\xi^{(1)} - c_3 n_{\xi\xi\xi}^{(1)} = 0, \quad (104)$$

where c_3 is the third-order coefficient of the dispersion relation (17). Going back to the original coordinates x and t and denoting $n'(x, t) = n(x, t) - 1$, we obtain the KdV equation

$$n'_t + c n'_x + \gamma_1 n' n'_x - c_3 n'_{xxx} = 0, \quad (105)$$

where

$$\gamma_1 = \frac{3g_1}{4c} \left(1 - \frac{2\Omega k_0^2}{(\Omega + g_2)^2} \right). \quad (106)$$

Once the solution of Eq. (105) is found, the other field variables can be obtained using relations (94), which we rewrite here for completeness in the final notation:

$$\begin{aligned} U(x, t) &= \frac{g_1}{c} n'(x, t), \\ \theta(x, t) &= -\frac{\pi}{2} + \frac{k_0 g_1}{c(\Omega + g_2)} n'(x, t), \\ \varphi(x, t) &= \frac{k_0}{\Omega} \frac{\Omega + g_1 + g_2}{\Omega + g_2} n'_x(x, t). \end{aligned} \quad (107)$$

Note that when n' becomes of order of the nonlinear coefficient in the KdV Eq. (105), that is when $\gamma_1 \sim |n'| \ll 1$, the level of accuracy accepted here is not sufficient: the cubic nonlinear terms ($\sim n'^2 n'_x$) neglected in the present treatment have the same order of magnitude as the quadratic term in Eq. (105). In this limit we have to consider the next order of approximation.

B. Cubic nonlinearity: Gardner regime

As advocated in Sec. IV A, cubic nonlinearities become important when $\gamma_1 \sim n'$ is small: their contributions can therefore be calculated from the system (7) choosing parameters such that $\gamma_1 = 0$. This is achieved when

$$k_0 = \frac{\Omega + g_2}{\sqrt{2\Omega}}. \quad (108)$$

For this choice of parameters, the sound velocity (18) reads

$$c = c^* \equiv \sqrt{\frac{-g_1 g_2}{2\Omega}}. \quad (109)$$

In this case the system can sustain long wavelength perturbations only if $g_2 < 0$, that is if $\alpha_2 > \alpha_1$, which we assume henceforth (see however the discussion at the end of Sec. IV C and Appendix B).

In this regime the coordinates defined in (87) are no longer appropriate for the description of nonlinear excitations.

One should instead perform the computations with the new coordinates:

$$\xi = \epsilon(x - ct), \quad \text{and} \quad \tau = \epsilon^3 t. \quad (110)$$

Then the system (88) rewrites:

$$\begin{aligned} \epsilon^3 n_\tau &= \epsilon c n_\xi + \epsilon k_0 [n \cos \theta]_\xi \\ &\quad - \frac{1}{2} \epsilon [n(U - v \cos \theta)]_\xi, \end{aligned} \quad (111a)$$

$$\begin{aligned} \epsilon^3 U_\tau &= \epsilon c U_\xi - \epsilon k_0 v_\xi \\ &\quad - \epsilon \left[\frac{\epsilon^2 n_\xi^2}{4 n^2} - \frac{\epsilon^2 n_{\xi\xi}}{2 n} - \epsilon^2 \frac{\cot \theta}{2} \frac{[n \theta_\xi]_\xi}{n} \right]_\xi \\ &\quad - \epsilon \left[\frac{\epsilon^2 \theta_\xi^2 + U^2 + v^2}{4} + g_1 n \right]_\xi \\ &\quad + \epsilon \theta_\xi \frac{\Omega \cos \theta}{\sin^2 \theta} \cos \varphi + \frac{\Omega}{\sin \theta} v \sin \varphi, \end{aligned} \quad (111b)$$

$$\begin{aligned} \epsilon^3 \theta_\tau &= \epsilon c \theta_\xi - \Omega \sin \varphi \\ &\quad - \frac{1}{2} \epsilon \left(U \theta_\xi + \frac{[n(v + 2k_0) \sin \theta]_\xi}{n} \right), \end{aligned} \quad (111c)$$

$$\begin{aligned} \epsilon^3 v_\tau &= \epsilon c v_\xi - \epsilon k_0 U_\xi \\ &\quad + \epsilon \left[\frac{\epsilon^2}{2 \sin \theta} \frac{[n \theta_\xi]_\xi}{n} - \frac{U v}{2} + g_2 n \cos \theta \right]_\xi \\ &\quad + \epsilon \theta_\xi \frac{\Omega \cos \varphi}{\sin^2 \theta} + \Omega v \cot \theta \sin \varphi. \end{aligned} \quad (111d)$$

We perform a multiscale analysis using the *Ansätze* (89); U and v now read:

$$U = \epsilon \Phi_\xi, \quad \text{and} \quad v = \epsilon \varphi_\xi. \quad (112)$$

The leading term in (111) is now $O(\epsilon)$ and reads, as previously, $\varphi^{(1)} = 0$. The next order $O(\epsilon^2)$ is described by the same system as in Eq. (92). Substituting $U_\xi^{(1)}$, $\theta_\xi^{(1)}$, and $\varphi^{(2)}$ by their expression in $n^{(1)}$ defined in (94), the order $O(\epsilon^3)$ then reads:

$$\mathbb{K} \begin{pmatrix} n_\xi^{(2)} \\ U_\xi^{(2)} \\ \theta_\xi^{(2)} \\ \varphi^{(3)} \end{pmatrix} = C_{nl} n^{(1)} n_\xi^{(1)}, \quad (113)$$

where C_{nl} is defined in Eq. (101). Since in this subsection k_0 is fixed such that the non-linearity ($\gamma_1 \propto L^t C_{nl}$) in Eq. (105) cancels, the choice of parameter (108) automatically implies $L^t \cdot C_{nl} = 0$ and from Eq. (113) one can only deduces that

$$\begin{pmatrix} n_\xi^{(2)} \\ U_\xi^{(2)} \\ \theta_\xi^{(2)} \\ \varphi^{(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{2\sqrt{g_1(-g_2)}}{\Omega + g_2} \\ \frac{g_1(3g_2\Omega - g_2^2 + 2\Omega^2) - g_2(g_2 + \Omega)^2}{\sqrt{2g_2\Omega(g_2 + \Omega)}} \end{pmatrix} n^{(1)} n_\xi^{(1)}. \quad (114)$$

Equation (113) is thus not conclusive and the expansion at order $O(\epsilon^3)$ is not sufficient to describe the dynamic of nonlinear excitations. At next order [$O(\epsilon^4)$], taking into

account the formula (114), we obtain:

$$\mathbb{K} \begin{pmatrix} n_\xi^{(3)} \\ U_\xi^{(3)} \\ \theta_\xi^{(3)} \\ \varphi^{(4)} \end{pmatrix} = C_\tau n_\tau^{(1)} + D_{\text{nl}} n^{(1)2} n_\xi^{(1)} + C_3 n_{\xi\xi\xi}^{(1)}, \quad (115)$$

where C_τ and C_3 are defined in Eqs. (100), (102) and

$$D_{\text{nl}} = \begin{pmatrix} \frac{\Omega\sqrt{-g_1^3 g_2 + \sqrt{-g_1 g_2 g_2}(g_1 - 6g_2)}}{2\sqrt{2}\sqrt{\Omega g_2^2}} \\ -\frac{3\Omega g_1}{\Omega + g_2} \\ -\frac{2g_2(\Omega + g_2)^2 + g_1(\Omega^2 - 8g_2\Omega - 5g_2^2)}{2\sqrt{2}\sqrt{\Omega g_2}(\Omega + g_2)} \\ \frac{\sqrt{-g_1 g_2}(-6g_2^3 - g_1(2\Omega - g_2)(\Omega + g_2))}{2g_2^2(\Omega + g_2)} \end{pmatrix}. \quad (116)$$

Left multiplication of Eq. (115) by L^t gives

$$0 = (L^t \cdot C_\tau) n_\tau^{(1)} + (L^t \cdot D_{\text{nl}}) n^{(1)2} n_\xi^{(1)} + (L^t \cdot C_3) n_{\xi\xi\xi}^{(1)}, \quad (117)$$

which reads

$$0 = n_\tau^{(1)} + \frac{3g_1}{8c^*|g_2|} \left(g_1 - \frac{4g_2^2}{\Omega + g_2} \right) n^{(1)2} n_\xi^{(1)} - c_3 n_{\xi\xi\xi}^{(1)}. \quad (118)$$

Going back to the original coordinates x and t we obtain the modified KdV (mKdV) equation

$$n'_t + c^* n'_x + \gamma_2 n'^2 n'_x - c_3 n'_{xxx} = 0, \quad (119)$$

where

$$\begin{aligned} \gamma_2 &= \frac{3g_1}{8c^*|g_2|} \left(g_1 - \frac{4g_2^2}{\Omega + g_2} \right) \\ &= \frac{3}{4\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\Omega g_1}{-g_2^3}} \left(g_1 - \frac{4g_2^2}{\Omega + g_2} \right). \end{aligned} \quad (120)$$

In the regime where γ_1 is not exactly zero, but of order n' , we also have to take into account the quadratic nonlinearity of Eq. (105), which finally yields

$$n'_t + c n'_x + \gamma_1 n' n'_x + \gamma_2 n'^2 n'_x - c_3 n'_{xxx} = 0. \quad (121)$$

This is the Gardner equation describing the evolution of nonlinear polarization pulses in a coherently coupled two-component condensate in the limit where the parameters of the system are close to satisfy the condition (108). This can be considered as an intermediate region where the quadratic and cubic nonlinearities make contributions of the same order of magnitude in the wave dynamics. In the limit of very small γ_1 , the quadratic nonlinearity effects can be neglected, the nonlinear polarization waves are correctly described by the modified KdV equation (119). If instead γ_1 is large, then the cubic nonlinearity effects are negligible and the evolution of nonlinear polarization pulses is described by the KdV equation (105). Note that for consistency reasons, the value of the sound velocity in (121) has to be evaluated as not being exactly equal to c^* , but has to include corrections $\propto \gamma_1^2$.

Once the solution of the Gardner equation (121) has been found, the other field variables can be expressed in terms of n' by the formulas (107) with account of (108).

C. Quartic nonlinearity: generalized KdV equation

The parameters of the system can be chosen in such a way that not only γ_1 , but also γ_2 cancels. This is achieved for the choice (108) with the additional constrain

$$g_1 = \frac{4g_2^2}{\Omega + g_2}, \quad (122)$$

which ensures that $\gamma_2 = 0$. Note that for having a positive value of g_1 , one must have $\Omega + g_2 > 0$, but this condition is automatically fulfilled in phase III [cf. the definition (18) of the sound velocity]. Computations very similar to the ones exposed in Secs. IV A and IV B now lead to a higher-order mKdV equation

$$0 = n_\tau^{(1)} + \gamma_3 n^{(1)3} n_\xi^{(1)} - c_3 n_{\xi\xi\xi}^{(1)}, \quad (123)$$

where

$$\gamma_3 = \frac{5\sqrt{2} g_2^2 \Omega (\Omega - 2g_2) (\Omega + g_2)^{9/2}}{\sqrt{-g_2 \Omega}}. \quad (124)$$

Finally, we can write the general form, which is able to account for choices of parameters such that $\gamma_1 \simeq 0$ and $\gamma_2 \simeq 0$:

$$n'_t + C(n') n'_x - c_3 n'_{xxx} = 0, \quad (125)$$

with

$$C(n') = c + \gamma_1 n' + \gamma_2 n'^2 + \gamma_3 n'^3. \quad (126)$$

Equation (125) is known as a generalized KdV equation [42].

At this point, it might be helpful to remind the strategy followed in the present section: we study excitations of the lower branch of the spectrum, which, in the linear regime and in the long wave limit, are described by Eq. (86). In order to analyze how nonlinearity affects these excitations, we consider the modifications of the pulse propagation velocity induced by the nonlinear effects: $c \rightarrow C(n')$ with an expansion of the form $C(n') = c + \sum_{\ell \geq 1} \gamma_\ell n'^\ell$. The multiscale analysis consists in rescaling the variable (x, t) in the following way:

$$\xi = \epsilon^a (x - ct) \quad \text{and} \quad \tau = \epsilon^b t, \quad (127)$$

transforming Eq. (86) into

$$\epsilon^b n'_\tau = \sum_{\ell \geq 1} \epsilon^{a+\ell} \gamma_\ell n'^\ell n'_\xi + \epsilon^{3a} c_3 n'_{\xi\xi\xi}. \quad (128)$$

The analysis amounts to determine the coefficients γ_ℓ ; this has been done in Eqs. (106), (120) and Eq. (124). The first correction is $\ell = 1$:

$$\epsilon^b n'_\tau = \epsilon^{a+1} \gamma_1 n' n'_\xi + \epsilon^{3a} c_3 n'_{\xi\xi\xi}. \quad (129)$$

The approach is coherent if all orders in ϵ in Eq. (129) are identical, i.e., if the stretched variables in (127) are chosen with $b = a + 1 = 3a \Rightarrow (a = 1/2, b = 3/2)$.

The parameter $\gamma_1(g_1, g_2, k_0, \Omega)$ can vanish or become small for a particular value of k_0 ; the first-order correction $\ell = 1$ is then no longer sufficient, and we must consider the correction $\ell = 2$, which corresponds, by the same argument as the one used after Eq. (129), to $(a = 1, b = 3)$; these are the exponents used in Sec. IV B. If $\gamma_2(g_1, g_2, k_0, \Omega)$ is also small, one has to consider the next order, as done in the beginning of the present section. The different orders considered and their regime of relevance are recalled in Table I.

TABLE I. List of the different nonlinear equations describing the weakly nonlinear and weakly dispersive dynamics of excitations which, in the linear regime, pertain to the lower dispersion branch. The right column shows their successive regime of relevance of the equations. The conditions $\gamma_1 = 0$ and $\gamma_2 = 0$ are precisely defined in Eqs. (108) and (122). Note that each row assumes that the regime of relevance of the upper rows is fulfilled.

Nonlinear equation	Regime of relevance
$\ell = 1$: KdV	phase III
$\ell = 2$: Gardner	$\gamma_1 \simeq 0$ and $g_2 < 0$
$\ell = 3$: generalized KdV	$\gamma_2 \simeq 0$ and $ g_2 < \Omega$

It is appropriate to discuss if the different regimes identified in Table I can be reached with present-day experimental realization of spin-orbit coupled BECs. The references [8] consider the two states $|m_F = 0\rangle = |\uparrow\rangle$ and $|m_F = -1\rangle = |\downarrow\rangle$ of a ^{87}Rb Bose-Einstein condensate in the $F = 1$ hyperfine structure. The s -wave scattering lengths are (in units of the Bohr radius) $a_{\uparrow\uparrow} = 101.41$ and $a_{\uparrow\downarrow} = a_{\downarrow\downarrow} = 100.94$. Since $a_{\uparrow\uparrow} - a_{\downarrow\downarrow} \ll \frac{1}{2}(a_{\uparrow\uparrow} + a_{\downarrow\downarrow})$ the simplifying assumption of a common value of the nonlinear coupling $\alpha_1 = \hbar\omega_{\perp}(a_{\uparrow\uparrow} + a_{\downarrow\downarrow})$ in (1) is legitimate (in this expression ω_{\perp} is the angular frequency corresponding to a tight harmonic radial trapping which ensures a quasi-1D behavior of the condensate [43]). Besides, if necessary, the present formalism can be extended to take into account the fact that $a_{\uparrow\uparrow}$ and $a_{\downarrow\downarrow}$ are not equal, see Ref. [44]. Note that the recoil energy is typically $\frac{1}{2}k_0^2 \sim 2$ kHz (it is monitored by the wavelength and the relative angle of the Raman lasers), whereas the interaction energy $\frac{1}{2}g_1 = \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2)\rho_0$ is of order (1/5) kHz (it depends on the value of the radial trapping frequency and on the linear atomic density).

One has $\alpha_2 = 2\hbar\omega_{\perp}a_{\uparrow\downarrow} < \alpha_1$, hence $g_2 > 0$, and it seems from the discussion in the beginning of Sec. IV B that one can never reach the interesting regime where $\gamma_1 = 0$ and where the nonlinear modulations of an excitation formed in the lower branch is described by Gardner equation. However, g_2 is small (since α_1 and α_2 are so close) and, as explained in Appendix B, generalizing the present approach by taking into account the small detuning δ from the Raman resonance—not considered in the main text—one can show that, even with a positive g_2 , it is possible to reach a regime where the nonlinearity coefficient γ_1 cancels by correctly fixing the value of δ . However, for keeping the discussion simple we will only consider here the case of a small negative g_2 . The more relevant case of a small positive g_2 in the presence of a small detuning is presented in Appendix B. The main conclusions are similar in both cases. Then, for negative g_2 , the condition (108) leads to $\Omega = 2k_0^2 - 2g_2 + O(g_2^2)$, which corresponds to a value of the Raman coupling frequency Ω typical in present-day experiments. We recall however that for the system to remain in the good side of the boundary between phase III and phase II one needs to impose $\Omega > 2k_0^2 - g_2$, which is verified by the above choice of Ω , but not by a large extent. Hence, one can reach a regime where the lower excitation branch is described by Gardner dynamics, but this is obtained at the expense of

getting close to the phase III–phase II boundary. Away from this boundary, the lower branch has a KdV dynamics.

V. CONCLUSION

In the present paper we have described how nonlinearity affects the dynamics of elementary excitations of a coherently coupled Bose-Einstein condensate. Excitations in the upper branch of the spectrum display a modulational instability. As discussed in the text, this instability is stabilized by a long-wave–short-wave resonance: the momentum imparted by the wave train formed in the upper branch to excitations in the lower branch has a stabilizing effect when it has the same sign that the velocity of the wave train. We also showed that the system can experience second harmonic generation, and that this mechanism may be inhibited by symmetry effects (namely by the complete separation between density and polarization modes, which occurs when $k_0 = 0$).

Excitations in the lower branch are stable. In the long wavelength limit they are affected by nonlinear effects in a manner, which can generically be described by KdV dynamics. For some specific configuration of the system’s parameters (close to the phase II–phase III boundary) one has to use a Gardner equation instead. It is interesting to note that the Gardner regime is realized in the lower branch, which is a mode mainly corresponding to density waves: hence, the wide range of nonlinear excitations of Gardner’s equation (see, e.g., Ref. [45]) can be generated by means of a simple scalar external potential, whereas for noncoherently coupled two component condensates, where the Gardner regime is obtained for a polarization mode [44], this can be achieved only thanks to a polarization potential [46].

ACKNOWLEDGMENTS

We thank G. Martone and A. Recati for fruitful discussions. A.M.K. thanks LPTMS, CNRS, Univ. Paris-Sud, Université Paris-Saclay, 91405 Orsay, France, where this work was started, for kind hospitality. This work was supported by the French ANR under Grants No. ANR-11-IDEX-0003-02 (Inter-Labex Grant QEAGE) and No. ANR-15-CE30-0017 (Haralab project).

APPENDIX A: SOLUTION OF EQ. (54)

In this Appendix we briefly explain how the solution of Eq. (54) is obtained. Let us assume that it is of the form

$$\overline{\Phi}^{(1)} = W(k) \int^X dX |\tilde{\theta}^{(1)}|^2, \quad (\text{A1})$$

where $W(k)$ is a constant [i.e., it depends on k , but not on (X, T_1, T_2)]. One first remarks that

$$\begin{aligned} \partial_{T_1} |\tilde{\theta}^{(1)}|^2 &= \tilde{\theta}^{(1)*} \partial_{T_1} \tilde{\theta}^{(1)} + \text{c. c.} \\ &\stackrel{\text{Eq. (41)}}{=} -\omega'_+(k) \tilde{\theta}^{(1)*} \partial_X \tilde{\theta}^{(1)} + \text{c. c.} \\ &= -\omega'_+(k) \partial_X |\tilde{\theta}^{(1)}|^2. \end{aligned} \quad (\text{A2})$$

It follows from this result and from the Ansatz (A1) that $\partial_{T_1}^2 \overline{\Phi}^{(1)} = W(k) [\omega'_+(k)]^2 \partial_X |\tilde{\theta}^{(1)}|^2$, and of course

$\partial_x^2 \overline{\Phi}^{(1)} = W(k) \partial_x |\tilde{\theta}^{(1)}|^2$ [this is a direct consequence of (A1)]. Hence

$$\begin{aligned} \partial_{T_1}^2 \overline{\Phi}^{(1)} - c^2 \partial_x^2 \overline{\Phi}^{(1)} \\ = W(k) ([\omega'_+(k)]^2 - c^2) \partial_x |\tilde{\theta}^{(1)}|^2. \end{aligned} \quad (\text{A3})$$

Equating the right-hand side of this expression to the right-hand side of (54) determines the value of $W(k)$ as given in Eq. (57).

APPENDIX B: TAKING INTO ACCOUNT A SMALL DETUNING FROM THE RAMAN RESONANCE

In this Appendix we rapidly present the treatment of the lower excitation branch for a spin-orbit coupled condensate ($k_0 \neq 0$) in the case where the system experiences a finite detuning $\hbar \delta$ from the Raman resonance. The single-particle Hamiltonian H_0 (2) has now an additional contribution: $\frac{1}{2} \hbar \delta \sigma_z$. The system (7) is not modified, except for Eq. (7d), which now reads

$$\begin{aligned} \varphi_t = \frac{1}{2 \sin \theta} \frac{(\rho \theta_x)_x}{\rho} - \frac{1}{2} \Phi_x (\varphi_x + 2k_0) \\ + (\alpha_1 - \alpha_2) \rho \cos \theta - \Omega \cos \varphi \cot \theta + \delta. \end{aligned} \quad (\text{B1})$$

The ground-state value of the fields is no longer given by Eq. (9). One has now

$$\Xi^{(0)}(x, t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2k_1 x - 2\mu t \\ \theta_0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{B2})$$

where k_1 is a variational parameter. Minimizing the energy per particle one obtains [22]

$$k_1 = k_0 \cos \theta_0. \quad (\text{B3})$$

The same result can be obtained in a different manner, by using dynamical arguments: one keeps k_1 as a free parameter, and one studies the linear excitations of the system. By demanding that the system is dynamically stable, i.e., that the frequency of elementary excitations remains real, one obtains the result (B3).

In the presence of a finite δ , the ground-state value θ_0 is no longer exactly equal to $-\pi/2$ as in (9) and μ is not given by Eq. (8). Instead one has [from (B1) and (7b)]

$$(2k_0^2 - g_2) \cos \theta_0 + \Omega \cot \theta_0 = \delta, \quad (\text{B4})$$

and

$$\mu = \frac{k_0^2}{2} (1 + \cos^2 \theta_0) + \frac{g_1}{2} + \frac{\Omega}{2 \sin \theta_0}. \quad (\text{B5})$$

Equation (B4) determines the value of θ_0 . Depending on the system's parameters it has either four or two solutions. In the first case, only one corresponds to the minimum of the energy per particle (the other is the maximum) and the system can be considered to be in the single minimum phase III. In the second case there are two nonequivalent minima and the system is in phase II. In the regime where k_0^2 is larger than $g_2/2$ and where $\Omega > 0$, one can show that the boundary between these two

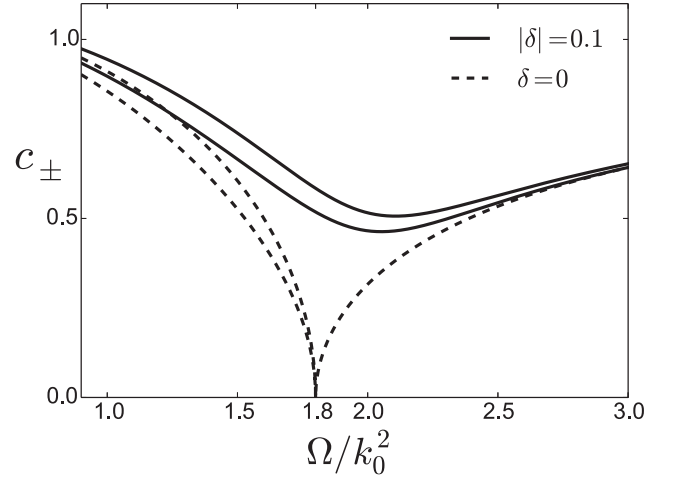


FIG. 8. Sound velocities c_{\pm} as a function of Ω . The systems' parameters are $k_0 = 1$, $g_1 = 2.2$, and $g_2 = 0.2$. When $\delta = 0$, the transition from phase III to phase II occurs at $\Omega = 2k_0^2 - g_2 = 1.8$, and above $\Omega = 1.8$ one is in phase III with a single sound velocity. When $\delta \neq 0$ one can show that $c_+(-\delta) = c_-(\delta)$ and $c_-(-\delta) = c_+(\delta)$. This is the reason why the sign of δ is not specified in the figure.

regimes corresponds to

$$(2k_0^2 - g_2)^{2/3} = \Omega^{2/3} + |\delta|^{2/3}. \quad (\text{B6})$$

In the case $\delta = 0$ the solution of (B4) is $\theta_0 = -\pi/2$ if $\Omega > 2k_0^2 - g_2$ and (B6) corresponds to the standard transition line between phases II and III, which is reproduced in Fig. 1. It is important to stress that in the presence of a finite detuning δ the second-order phase transition from phase III to phase II strictly speaking disappears because the system does not cross any phase transition line when Ω varies [47]. For instance, the velocity of sound vanishes at the transition region when $\delta = 0$ [cf. Eq. (18)], whereas it remains finite when $\delta \neq 0$ (cf. Fig. 8). Also, when $\delta \neq 0$, even in what has been identified above as the single minimum phase, the system has a small spin polarization and condensates into a state with a small but finite momentum.

The matrix \mathbb{K} of Eq. (93) now reads

$$\mathbb{K} = \begin{pmatrix} c & -\frac{1}{2} & -k_0 \sin \theta_0 & 0 \\ -g_1 & c - k_0 \cos \theta_0 & \Omega \cos \theta_0 \sin_0^{-2} & 0 \\ -k_0 \sin_0 & 0 & c - 2k_0 \cos \theta_0 & -\Omega \\ g_2 \cos \theta_0 & -k_0 & \Omega \sin_0^{-2} - g_2 \sin_0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{B7})$$

where, for gaining space, we have written \sin_0 and \cos_0 instead of $\sin \theta_0$ and $\cos \theta_0$. In formula (B7) the sound velocity c is not given by (18): it now depends on δ . It can be determined through the computation of the dispersion relation in the system, or more simply just by imposing the cancelation of $\det \mathbb{K}$. For nonzero δ the ground state breaks Galilean invariance and in our 1D configuration one obtains two velocities of sound, one for each direction of propagation. The first one, denoted as c_+ , corresponds to waves propagating in the same direction as the ground state (for which $U_x^{(0)} = 2k_1$) and the other (c_-) propagates in the opposite direction. A typical case is displayed in Fig. 8. Note that this figure is

interrupted at low values of Ω in order to prevent the system to get into phase I.

Following the procedure exposed in Sec. IV A one can determine the form of the KdV equation, which describes how long wavelength excitations propagating along the lower branch of the spectrum are affected by nonlinearity when $\delta \neq 0$. In this case the nonlinear parameter γ_1 is different from the value given by expression (106) (which corresponds to the $\delta = 0$ case). We do not write the explicit form of γ_1 when $\delta \neq 0$ because it is too cumbersome. Instead, we rather plot γ_1 as a function of Ω for different values of δ in Fig. 9.

As for the sound velocity, the value of the nonlinear coefficient depends of the direction of propagation of the wave. We denote as γ_1^+ (γ_1^-) the value of γ_1 corresponding to wave trains propagating in the same (the opposite) direction than the momentum of the ground state. One has the symmetry relation $\gamma_1^+(-\delta) = \gamma_1^-(\delta)$. When $\Omega < 2k_0^2 - g_2$ the nonlinear coefficient is discontinuous at $\delta = 0$, as θ_0 and k_1 are, and this corresponds to the crossing of the first-order transition line in the plane (Ω, δ) [47].

One sees in the figure that there exist values of δ for which the nonlinear coefficient cancels even for $\Omega > 2k_0^2 - g_2$, provided Ω is not too large. It is important to notice that this cancellation of γ_1 is obtained for a positive g_2 , contrarily to what occurs when $\delta = 0$. Note however, that for $\Omega = 2.5$ the nonlinear coefficient cannot be canceled by imposing a

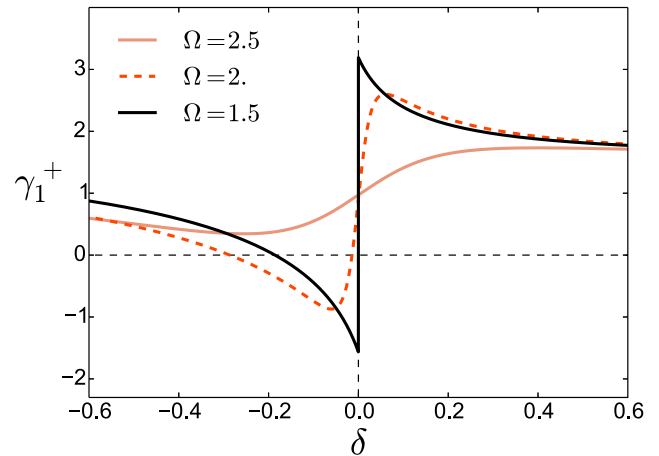


FIG. 9. γ_1^+ as a function of δ for several values of Ω . The system's parameters are $k_0 = 1$, $g_1 = 2.2$, and $g_2 = 0.2$. The curve is discontinuous when $\Omega < 2k_0^2 - g_2 = 1.8$ because in this case the system meets a first-order phase transition at $\delta = 0$. For the present choice of parameters γ_1^+ can be canceled by changing the value of δ when $\Omega = 1.5$ or 2.5 , but not when $\Omega = 2.5$.

finite value of the detuning δ . When γ_1 cancels, the effective nonlinear dynamics of the system is no longer described by a KdV equation, but rather by a Gardner equation.

-
- [1] C. J. Myatt, E. A. Burt, R. W. Ghrist, E. A. Cornell, and C. E. Wieman, *Phys. Rev. Lett.* **78**, 586 (1997).
- [2] J. Stenger, S. Inouye, D. M. Stamper-Kurn, H.-J. Miesner, A. P. Chikkatur, and W. Ketterle, *Nature (London)* **396**, 345 (1998); H.-J. Miesner, D. M. Stamper-Kurn, J. Stenger, S. Inouye, A. P. Chikkatur, and W. Ketterle, *Phys. Rev. Lett.* **82**, 2228 (1999); M. R. Matthews, B. P. Anderson, P. C. Haljan, D. S. Hall, C. E. Wieman, and E. A. Cornell, *ibid.* **83**, 2498 (1999); Z. Dutton, M. Budde, C. Slowe, L. Vestergaard Hau, *Science* **293**, 663 (2001); N. S. Ginsberg, J. Brand, and L. V. Hau, *Phys. Rev. Lett.* **94**, 040403 (2005); L. E. Sadler, J. M. Higbie, S. R. Leslie, M. Vengalattore, and D. M. Stamper-Kurn, *Nature (London)* **443**, 312 (2006); K. C. Wright, L. S. Leslie, A. Hansen, and N. P. Bigelow, *Phys. Rev. Lett.* **102**, 030405 (2009); D. M. Weld, P. Medley, H. Miyake, D. Hucul, D. E. Pritchard, and W. Ketterle, *ibid.* **103**, 245301 (2009); L. S. Leslie, A. Hansen, K. C. Wright, B. M. Deutsch, and N. P. Bigelow, *ibid.* **103**, 250401 (2009).
- [3] M.-S. Chang, Q. Qin, W. Zhang, L. You, and M. S. Chapman, *Nature Phys.* **1**, 111 (2005); T. Zibold, E. Nicklas, C. Gross, and M. K. Oberthaler, *Phys. Rev. Lett.* **105**, 204101 (2010).
- [4] P. Böhi, M. F. Riedel, J. Hoffrogge, J. Reichel, T. W. Hänsch, and P. Treutlein, *Nature Phys.* **5**, 592 (2009); C. Gross, T. Zibold, E. Nicklas, J. Estève, and M. K. Oberthaler, *Nature (London)* **464**, 1165 (2010); M. F. Riedel, P. Böhi, Y. Li, T. W. Hänsch, A. Sinatra, and P. Treutlein, *ibid.* **464**, 1170 (2010); C. Gross, H. Strobel, E. Nicklas, T. Zibold, N. Bar-Gill, G. Kurizki, and M. K. Oberthaler, *ibid.* **480**, 219 (2011).
- [5] S. Palzer, C. Zipkes, C. Sias, and M. Köhl, *Phys. Rev. Lett.* **103**, 150601 (2009); T. Fukuhara, A. Kantian, M. Endres, M. Cheneau, P. Schauß, S. Hild, D. Bellem, U. Schollwöck, T. Giamarchi, C. Gross, I. Bloch, and S. Kuhr, *Nature Phys.* **9**, 235 (2013).
- [6] S. Beattie, S. Moulder, R. J. Fletcher, and Z. Hadzibabic, *Phys. Rev. Lett.* **110**, 025301 (2013).
- [7] Y.-J. Lin, R. L. Compton, A. R. Perry, W. D. Phillips, J. V. Porto, and I. B. Spielman, *Phys. Rev. Lett.* **102**, 130401 (2009); Z. Fu, P. Wang, S. Chai, L. Huang, and J. Zhang, *Phys. Rev. A* **84**, 043609 (2011); M. W. Ray, E. Ruokokoski, S. Kandel, M. Möttönen, and D. S. Hall, *Nature (London)* **505**, 657 (2014).
- [8] Y.-J. Lin, K. Jiménez-García, and I. B. Spielman, *Nature (London)* **471**, 83 (2011); J.-Y. Zhang, S.-C. Ji, Z. Chen, L. Zhang, Z.-D. Du, B. Yan, G.-S. Pan, B. Zhao, Y.-J. Deng, H. Zhai, S. Chen, and J.-W. Pan, *Phys. Rev. Lett.* **109**, 115301 (2012); S.-C. Ji, J.-Y. Zhang, L. Zhang, Z.-D. Du, W. Zheng, Y.-J. Deng, H. Zhai, S. Chen, and J.-W. Pan, *Nature Phys.* **10**, 314 (2014).
- [9] L. J. LeBlanc, K. Jiménez-García, R. A. Williams, M. C. Beeler, A. R. Perry, W. D. Phillips, and I. B. Spielman, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **109**, 10811 (2012).
- [10] C. Qu, C. Hamner, M. Gong, C. Zhang, and P. Engels, *Phys. Rev. A* **88**, 021604(R) (2013); L. J. LeBlanc, M. C. Beeler, K. Jiménez-García, A. R. Perry, S. Sugawa, R. A. Williams, and I. B. Spielman, *New J. Phys.* **15**, 073011 (2013).
- [11] M. C. Beeler, R. A. Williams, K. Jiménez-García, L. J. LeBlanc, A. R. Perry, and I. B. Spielman, *Nature (London)* **498**, 201 (2013).
- [12] A. J. Olson, S.-J. Wang, R. J. Niffenegger, C.-H. Li, C. H. Greene, and Y. P. Chen, *Phys. Rev. A* **90**, 013616 (2014).

- [13] C. Hamner, C. Qu, Y. Zhang, J. Chang, M. Gong, C. Zhang, and P. Engels, *Nature Comm.* **5**, 4023 (2014).
- [14] M. A. Khamehchi, Y. Zhang, C. Hamner, T. Busch, and P. Engels, *Phys. Rev. A* **90**, 063624 (2014); S.-C. Ji, L. Zhang, X.-T. Xu, Z. Wu, Y. Deng, S. Chen, and J.-W. Pan, *Phys. Rev. Lett.* **114**, 105301 (2015).
- [15] M. R. Matthews, D. S. Hall, D. S. Jin, J. R. Ensher, C. E. Wieman, E. A. Cornell, F. Dalfovo, C. Minniti, and S. Stringari, *Phys. Rev. Lett.* **81**, 243 (1998); D. S. Hall, M. R. Matthews, C. E. Wieman, and E. A. Cornell, *ibid.* **81**, 1543 (1998).
- [16] K. C. Wright, L. S. Leslie, and N. P. Bigelow, *Phys. Rev. A* **77**, 041601(R) (2008); **78**, 053412 (2008); J. Higbie and D. M. Stamper-Kurn, *Phys. Rev. Lett.* **88**, 090401 (2002).
- [17] P. B. Blakie, R. J. Ballagh, and C. W. Gardiner, *J. Opt. B* **1**, 378 (1999); C. P. Search and P. R. Berman, *Phys. Rev. A* **63**, 043612 (2001); P. Tommasini, E. J. V. de Passos, A. F. R. de Toledo Piza, M. S. Hussein, and E. Timmermans, *ibid.* **67**, 023606 (2003); C. Lee, W. Hai, L. Shi, and K. Gao, *ibid.* **69**, 033611 (2004); M. Abad and A. Recati, *Eur. Phys. J. D* **67**, 148 (2013).
- [18] C. Wang, C. Gao, C.-M. Jian, and H. Zhai, *Phys. Rev. Lett.* **105**, 160403 (2010); T.-L. Ho and S. Zhang, *ibid.* **107**, 150403 (2011); Y. Zhang, L. Mao, and C. Zhang, *ibid.* **108**, 035302 (2012); W. Zheng and Z. Li, *Phys. Rev. A* **85**, 053607 (2012); Y. Li, L. P. Pitaevskii, and S. Stringari, *Phys. Rev. Lett.* **108**, 225301 (2012); G. I. Martone, Y. Li, L. P. Pitaevskii, and S. Stringari, *Phys. Rev. A* **86**, 063621 (2012); Y. Zhang, G. Chen, and C. Zhang, *Sci. Rep.* **3**, 1937 (2013); W. Zheng, Z.-Q. Yu, X. Cui, and H. Zhai, *J. Phys. B* **46**, 134007 (2013); Y. Li, G. I. Martone, L. P. Pitaevskii, and S. Stringari, *Phys. Rev. Lett.* **110**, 235302 (2013). S. Maronov, M. Modugno, and E. Y. Sherman, *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* **48**, 115302 (2015).
- [19] D. T. Son and M. A. Stephanov, *Phys. Rev. A* **65**, 063621 (2002); J. J. García-Ripoll, V. M. Pérez-García, and F. Sols, *ibid.* **66**, 021602(R) (2002); K. Kasamatsu, M. Tsubota, and M. Ueda, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 250406 (2004); B. Deconinck, P. G. Kevrekidis, H. E. Nistazakis, and D. J. Frantzeskakis, *Phys. Rev. A* **70**, 063605 (2004); V. A. Brazhnyi and V. V. Konotop, *Phys. Rev. E* **72**, 026616 (2005); I. M. Merhasin, B. A. Malomed, and R. Driben, *J. Phys. B* **38**, 877 (2005); K. Nakamura, A. Kohi, H. Yamasaki, V. M. Pérez-García, and V. V. Konotop, *Europhys. Lett.* **80**, 50005 (2007).
- [20] M. Merkl, A. Jacob, F. E. Zimmer, P. Öhberg, and L. Santos, *Phys. Rev. Lett.* **104**, 073603 (2010); X.-Q. Xu and J. H. Han, *ibid.* **107**, 200401 (2011); T. Kawakami, T. Mizushima, M. Nitta, and K. Machida, *ibid.* **109**, 015301 (2012); O. Fialko, J. Brand, and U. Zülicke, *Phys. Rev. A* **85**, 051605(R) (2012); V. Achilleos, D. J. Frantzeskakis, P. G. Kevrekidis, and D. E. Pelinovsky, *Phys. Rev. Lett.* **110**, 264101 (2013); V. Achilleos, J. Stockhofe, P. G. Kevrekidis, D. J. Frantzeskakis, and P. Schmelcher, *Europhys. Lett.* **103**, 20002 (2013); S. Maronov, E. Y. Sherman, J. G. Muga, H.-W. Wang, Y. Ban, and X. Chen, *Phys. Rev. A* **91**, 043604 (2015).
- [21] C. Polymilis, K. Hizanidis, and D. J. Frantzeskakis, *Phys. Rev. E* **58**, 1112 (1998); P. L. Christiansen, J. C. Eilbeck, V. Z. Enolskii, and N. A. Kostov, *Proc. R. Soc. London A* **456**, 2263 (2000); C. Eilbeck, V. Z. Enolskii, and N. A. Kostov, *J. Math. Phys.* **41**, 8236 (2000); A. M. Kamchatnov and V. V. Sokolov, *Phys. Rev. A* **91**, 043621 (2015).
- [22] Y. Li, G. I. Martone, and S. Stringari, *Annual Review of Cold Atoms and Molecules*, Vol. III, edited by K. W. Madison, K. Bongs, L. D. Carr, A. M. Ray, and H. Zhai (World Scientific, Singapore, 2015), p. 201.
- [23] K. Kasamatsu, M. Tsubota, and M. Ueda, *Phys. Rev. A* **71**, 043611 (2005).
- [24] The value $\theta_0 = +\pi/2$ also gives equal densities of the two components, but is unstable when $\Omega > 0$.
- [25] A. Jeffrey and T. Kawahara, *Asymptotic Methods in Nonlinear Wave Theory* (Pitman, London, 1982).
- [26] T. Taniuti and K. Nishihara, *Nonlinear Waves* (Pitman, Boston, 1983).
- [27] A. C. Newell, *Solitons in Mathematics and Physics* (Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 1985).
- [28] A. M. Kamchatnov, *Nonlinear Periodic Waves and Their Modulations - An Introductory Course* (World Scientific, Singapore, 2000).
- [29] M. J. Ablowitz, *Nonlinear Dispersive Waves, Asymptotic Analysis and Solitons* (Cambridge University Press, Cambridge, 2011).
- [30] The bar is not a complex conjugate. The complex conjugate is denoted in this work with a superscript *.
- [31] This is not always true: in some instances the determinant of \mathbb{M}_2 cancels. This occurs in the presence of second harmonic generation, as discussed in section III D [after Eqs. (80) and (81)].
- [32] We use the simple property that the image space of a given matrix \mathbb{M} is orthogonal—in the sense of the usual scalar product—to the kernel of \mathbb{M}^t , to which L belongs by (39). This property is easily demonstrated in \mathbb{R}^n : Let C be a column vector in the image space of a $n \times n$ matrix \mathbb{M} ; this means that there exists a column vector V such that $C = \mathbb{M}V$. Let L be a column vector in the kernel of \mathbb{M}^t . This means that $\mathbb{M}^t L = 0 \Leftrightarrow L^t \mathbb{M} = 0$. Then it is clear that the scalar product $L^t C = 0$ (since it reads $L^t \mathbb{M} C$).
- [33] From Eqs. (24) and (41) one gets $\partial_{T_2} \tilde{\theta}^{(1)} = \epsilon^{-2} \partial_t \tilde{\theta}^{(1)} - \epsilon^{-1} \partial_{T_1} \tilde{\theta}^{(1)} = \epsilon^{-2} \partial_t \tilde{\theta}^{(1)} + \epsilon^{-1} \omega'_+(k) \partial_x \tilde{\theta}^{(1)}$.
- [34] V. E. Zakharov and L. A. Ostrovsky, *Physica D* **238**, 540 (2009).
- [35] V. V. Konotop and M. Salerno, *Phys. Rev. A* **65**, 021602(R) (2002); A. Smerzi, A. Trombettoni, P. G. Kevrekidis, and A. R. Bishop, *Phys. Rev. Lett.* **89**, 170402 (2002); B. Wu and Q. Niu, *New J. Phys.* **5**, 104 (2003); M. Machholm, C. J. Pethick, and H. Smith, *Phys. Rev. A* **67**, 053613 (2003); M. Cristiani, O. Morsch, N. Malossi, M. Jona-Lasinio, M. Anderlini, E. Courtade, and E. Arimondo, *Opt. Express* **12**, 4 (2004); L. Fallani, L. De Sarlo, J. E. Lye, M. Modugno, R. Saers, C. Fort, and M. Inguscio, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 140406 (2004); L. De Sarlo, L. Fallani, J. E. Lye, M. Modugno, R. Saers, C. Fort, and M. Inguscio, *Phys. Rev. A* **72**, 013603 (2005).
- [36] C. K. Law, C. M. Chan, P. T. Leung, and M.-C. Chu, *Phys. Rev. A* **63**, 063612 (2001); M. A. Hoefer, J. J. Chang, C. Hamner, and P. Engels, *ibid.* **84**, 041605(R) (2011); C. Hamner, J. J. Chang, P. Engels, and M. A. Hoefer, *Phys. Rev. Lett.* **106**, 065302 (2011).
- [37] T. Brooke Benjamin and J. E. Feir, *J. Fluid Mech.* **27**, 417 (1967).
- [38] D. J. Benney, *Stud. Appl. Math.* **56**, 81 (1976); R. H. J. Grimshaw, *ibid.* **56**, 241 (1977).
- [39] Y. S. Kivshar and B. Luther-Davies, *Phys. Rep.* **298**, 81 (1998).
- [40] C. J. Pethick and H. Smith, *Bose-Einstein condensation in Dilute Gases* (Cambridge University Press, Cambridge, 2002).

- [41] L. Pitaevskii and S. Stringari, *Bose-Einstein Condensation* (Clarendon Press, Oxford, 2003).
- [42] M. Tsutsumi, T. Mukasa, and R. Iino, *Proc. Japan Acad.* **46**, 921 (1970).
- [43] M. Olshanii, *Phys. Rev. Lett.* **81**, 938 (1998); A. D. Jackson, G. M. Kavoulakis, and C. J. Pethick, *Phys. Rev. A* **58**, 2417 (1998); P. Leboeuf and N. Pavloff, *ibid.* **64**, 033602 (2001).
- [44] A. M. Kamchatnov, Y. V. Kartashov, P.-É. Larré and N. Pavloff, *Phys. Rev. A* **89**, 033618 (2014).
- [45] A. M. Kamchatnov, Y.-H. Kuo, T.-C. Lin, T.-L. Horng, S.-C. Gou, R. Clift, G. A. El, and R. H. J. Grimshaw, *Phys. Rev. E* **86**, 036605 (2012).
- [46] A. M. Kamchatnov and Y. V. Kartashov, *Phys. Rev. Lett.* **111**, 140402 (2013).
- [47] The situation is similar to the phase transition in a pure ferromagnet: in the absence of external field the system has a line of first-order transition, which terminates with a critical point. For fixed finite external magnetic field, one does not cross this line by varying temperature. It can be crossed at fixed temperature by varying the external field. In our case, the equivalent line corresponds in the (Ω, δ) plane to the segment $\delta = 0$, $|\Omega| \leq 2k_0^2 - g_2$, which is a line of first-order phase transition ending with a critical point at $\delta = 0$ and $|\Omega| = 2k_0^2 - g_2$. This line cannot be crossed at fixed nonzero δ by changing Ω , but can be at fixed Ω by changing δ .

Chapitre 3

Excitations magnétiques dans les condensats à deux composantes

Sommaire

1	Équation de Landau-Lifshitz	80
1.a	Vecteur de polarisation	80
1.b	Équation de Landau-Lifshitz sans dissipation	81
2	Solutions périodiques	82
2.a	Intégration <i>finite-gap</i>	83
2.b	Ondes cnoïdales	88
3	Limite hydrodynamique	92
3.a	Invariants de Riemann	92
3.b	Solution en <i>onde simple</i>	93
4	Ondes de choc dispersives	101
4.a	Théorie de Whitham	102
4.b	Solution en onde simple	106
4.c	Choc <i>mixte</i>	112
4.d	Cas général	117
4.e	Conclusion	121
	Article 2 : Dispersive hydrodynamics of nonlinear polarization waves in two-component Bose-Einstein condensates	123
	Article 3 : Evolution of initial discontinuities in the Riemann problem for the Kaup-Boussinesq equation with positive dispersion	154
	Article 4 : Solution of the Riemann problem for polarization waves in a two-component Bose-Einstein condensate (pré-publication)	167

Dans le chapitre précédent, on s'est intéressé à la stabilité du mode de polarisation. Bien que l'on ait étudié la correction non-linéaire de l'équation de propagation d'un paquet d'onde de polarisation, la méthode utilisée reste perturbative et l'amplitude des variations de la densité relative reste faible comparée à la densité relative du condensat dans son état stationnaire : $|\theta(x, t) - \theta_0| \ll 1$. Dans ce chapitre on s'intéresse à une limite sur les coefficients non-linéaires où le traitement perturbatif n'est plus nécessaire pour étudier la dynamique de polarisation :

$$g_{\uparrow\downarrow} = g - \delta g \quad \text{avec} \quad \delta g \ll g \quad (3.1)$$

Cette limite, proche de la limite de Manakov (cf. la Remarque 1.2), est atteinte expérimentalement dans certains condensats miscibles : on a par exemple $\delta g/g \simeq 0.01$ pour les états hyperfins $|F, m_F\rangle = |1, 1\rangle$ et $|F, m_F\rangle = |2, 2\rangle$ de l'atome de ^{87}Rb [45, 143]. Comme il a été précisé dans le Chapitre 1, la propagation des ondes de polarisation est beaucoup plus lente dans cette limite que la propagation des ondes de densité :

$$c_p \equiv \sqrt{g_2 \rho_0 / 2} = \sqrt{\delta g \rho_0 / 2} \ll c_d \equiv \sqrt{g_1 \rho_0 / 2} \simeq \sqrt{g \rho_0}, \quad (3.2)$$

où c_p (resp. c_d) est la vitesse du son des phonons de polarisation (resp. de densité). La dynamique de polarisation *se sépare* alors très vite de la dynamique de densité et on peut les décrire indépendamment. On peut illustrer cette séparation numériquement en considérant l'évolution d'un état excitant à la fois le mode de densité et le mode de polarisation¹ :

$$\rho_{\uparrow}(x, 0) = \frac{\rho_0}{2} + A \exp \left[- \left(\frac{x}{x_0} \right)^2 \right] \quad \text{et} \quad \rho_{\downarrow}(x, 0) = \frac{\rho_0}{2}, \quad (3.3)$$

où l'on choisit pour la simulation numérique :

$$\rho_0 = 1, \quad A = 0.2, \quad x_0 = 3, \quad g = 1 \quad \text{et} \quad g_{\uparrow\downarrow} = 0.9 \quad (\delta g = 0.1). \quad (3.4)$$

On observe alors en traçant l'évolution de la densité totale $\rho(x, t)$ dans la figure 3.1 et l'évolution de la densité relative $\cos \theta(x, t)$ dans la figure 3.2 que les deux dynamiques se séparent très rapidement ; on peut vérifier sur la figure 3.1 que la densité totale propage une perturbation de vitesse $c_d \approx 1$ et sur la figure 3.2 que la densité relative propage une perturbation de vitesse $c_p \approx 0.2$.

Remarque 3.1. Les schémas numériques utilisés pour simuler les équations (1.14) (ainsi que les équations de Landau-Lifshitz, cf. la Section 1.b) sont décrits dans l'Annexe B. Pour un pas de temps suffisamment petit la simulation numérique converge bien vers la solution exacte.

Afin d'étudier la dynamique de polarisation, on introduit la *longueur de cicatrisation de polarisation* :

$$\xi_p = \frac{1}{\sqrt{2 \delta g \rho_0}}, \quad (3.5)$$

et le temps caractéristique associé :

$$T_p = \frac{\xi_p}{c_p} = \frac{1}{\delta g \rho_0}, \quad (3.6)$$

et de façon similaire à la Ref. [99], on se propose d'exprimer les champs ρ, Φ, θ et ϕ dans les coordonnées *lentes* de la dynamique de polarisation :

$$\rho = \rho(\zeta, \tau), \quad \Phi = -2\mu t + \Phi(\zeta, \tau), \quad \theta = \theta(\zeta, \tau), \quad \phi = \phi(\zeta, \tau), \quad (3.7)$$

$$\text{avec : } \quad \zeta = x/\xi_p \quad \text{et} \quad \tau = t/T_p, \quad (3.8)$$

1. Le choix précis de la forme fonctionnelle (3.3) n'est pas important : on a choisi ici une expression assez générique ou la densité totale et la densité relative sont toutes deux perturbées au voisinage de l'origine sur une distance x_0 . L'expression de l'excitation n'a ici peu d'importance, il suffit d'exciter les champs $\rho(x, t)$ et $\theta(x, t)$.

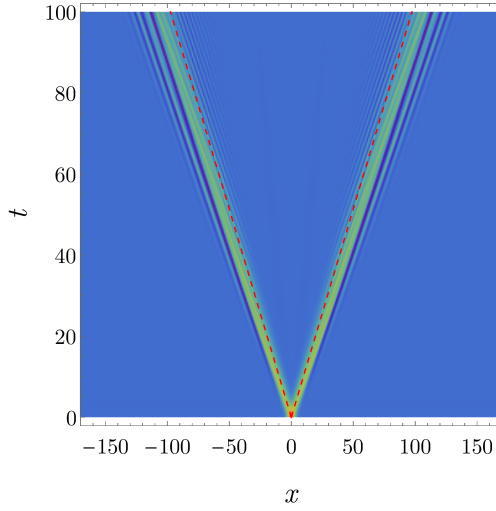


FIGURE 3.1 – Représentation de la densité totale $\rho(x,t)$ déterminée numériquement avec pour condition initiale (3.3) avec le choix de paramètres (3.4). Les zones sombres sont de densité totale faible et les zones claires de densité totale élevée; les pointillés rouges représentent les droites $x = \pm c_d t$.

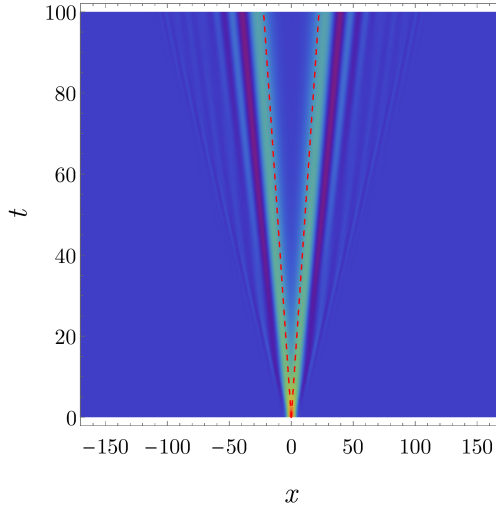


FIGURE 3.2 – Représentation de la densité relative $\cos\theta(x,t)$ déterminée numériquement avec pour condition initiale (3.3) avec le choix de paramètres (3.4). Les zones sombres sont de densité relative faible et les zones claires de densité relative élevée; les pointillés rouges représentent les droites $x = \pm c_p t$.

où le potentiel chimique μ est défini par : $\mu = g\rho_0$. L'équation (1.53b) s'écrit alors :

$$\rho - \rho_0 = \frac{\delta g}{g} \frac{\rho_0}{2} \left(\frac{\cot \theta}{\rho} (\rho \theta_\zeta)_\zeta - \frac{\rho_\zeta^2}{2\rho^2} + \frac{\rho_\zeta \zeta}{\rho} - \frac{1}{2} (\Phi_\zeta^2 + \phi_\zeta^2 + \theta_\zeta^2) + \frac{\rho}{\rho_0} - 1 \right). \quad (3.9)$$

Dans le cas où le système n'est pas *fortement* polarisé, autrement dit, quand la polarisation respecte :

$$\theta \gg \delta g/g \quad \text{et} \quad \pi - \theta \gg \delta g/g, \quad (3.10)$$

le terme $\cot \theta$ de l'équation (3.9) reste fini, et le membre gauche de l'équation (3.9) devient alors négligeable quand $\delta g/g \rightarrow 0$. Dans cette limite la densité totale du condensat est constante : $\rho = \rho_0$, et on peut réécrire les équations (1.53a), (1.53c) et (1.53d) (à l'ordre dominant en $\delta g/g$) :

$$\partial_\zeta (\Phi_\zeta - \phi_\zeta \cos \theta) = 0, \quad (3.11a)$$

$$\theta_\tau + \frac{1}{2} \Phi_\zeta \theta_\zeta + \frac{1}{2} \partial_\zeta (\phi_\zeta \sin \theta) = 0, \quad (3.11b)$$

$$\phi_\tau + \frac{1}{2} \partial_\zeta (\Phi_\zeta \phi_\zeta) - \frac{\theta_{\zeta\zeta}}{2 \sin \theta} = 0. \quad (3.11c)$$

La première équation (3.11a) correspond à la conservation du flux total d'atomes : $\rho_{\uparrow}\partial_x\phi_{\uparrow} + \rho_{\downarrow}\partial_x\phi_{\downarrow}$ [avec $\phi_{\uparrow,\downarrow}$ définis par l'Eq. (1.46)]; par la suite on étudie l'évolution du système dans le référentiel pour lequel ce flux est nul :

$$\Phi_{\zeta} - \phi_{\zeta} \cos \theta = 0 . \quad (3.12)$$

On peut ainsi exprimer la vitesse totale Φ_{ζ} à l'aide des champs θ et ϕ et les équations (3.11b) et (3.11c) s'écrivent :

$$\theta_{\tau} + 2\theta_{\zeta}\phi_{\zeta}\cos\theta + \phi_{\zeta\zeta}\sin\theta = 0 \quad (3.13)$$

$$\phi_{\tau} - \cos\theta(1 - \phi_{\zeta}^2) - \frac{\theta_{\zeta\zeta}}{\sin\theta} = 0 \quad (3.14)$$

Sur une échelle temporelle T_p et une échelle spatiale ξ_p , le degré de liberté de polarisation (θ, ϕ) se découple totalement du degré de liberté de densité (ρ, Φ) **au niveau non-linéaire**. En effet, à l'exception de la limite de mélange (3.10), aucune condition sur les champs θ et ϕ n'a été supposée pour dériver les équations (3.13) et (3.14). Au contraire des équations linéaires (2.14) et de leur correction non-linéaire (2.97) dérivées jusqu'à présent pour étudier la dynamique du condensat, on peut considérer dorénavant la dynamique de polarisation en ne fixant **aucune limite sur l'amplitude** des phénomènes non-linéaires.

Afin de décrire la dynamique de polarisation on utilisera de façon équivalente les champs suivants :

- la densité relative $w(\zeta, \tau) \equiv \cos \theta \in [0; 1]$, (3.15)

- la vitesse relative $v(\zeta, \tau) \equiv \partial_{\zeta}\phi$. (3.16)

Le champ de vitesse relative bien dimensionné est relié à v par la relation $\partial_x\phi = v/\xi_p$. Les équations (3.13) et (3.14) s'écrivent selon cette nouvelle notation :

$$w_{\tau} - [(1 - w^2)v]_{\zeta} = 0 , \quad (3.17)$$

$$v_{\tau} - [(1 - v^2)w]_{\zeta} + \left[\frac{1}{\sqrt{1 - w^2}} \left(\frac{w_{\zeta}}{\sqrt{1 - w^2}} \right)_{\zeta} \right] = 0 . \quad (3.18)$$

Les équations pour la densité relative (3.13) et le potentiel de vitesse (3.14) sont connues dans un autre domaine de la physique (cf. e.g. l'équation (123) de la Ref. [144]) : on va montrer dans la partie suivante que l'on peut réécrire ces équations sous une autre forme et que la dynamique de polarisation du condensat est gouvernée par les **équations de Landau-Lifshitz** sans dissipation.

1. Équation de Landau-Lifshitz

1.a. Vecteur de polarisation

Le paramètre d'ordre est ici entièrement décrit par le spineur $\chi(\zeta, \tau)$ [défini précédemment par l'Eq. (1.47)] :

$$\chi(\zeta, \tau) = \cos(\theta/2) e^{-i\phi/2} |\uparrow\rangle + \sin(\theta/2) e^{i\phi/2} |\downarrow\rangle . \quad (3.19)$$

Une autre façon de décrire ce système est alors d'introduire le vecteur de la **sphère de Bloch** (ou **sphère de Poincaré** dans le cas de l'optique non-linéaire) :

$$\mathbf{S}(\zeta, \tau) = \chi^{\dagger} \boldsymbol{\sigma} \chi \quad \text{avec} \quad \boldsymbol{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)^T , \quad (3.20)$$

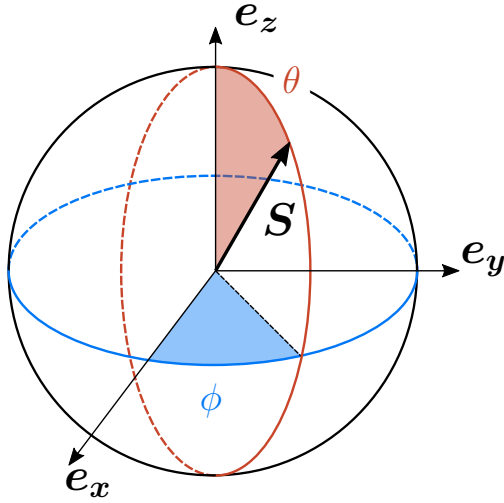


FIGURE 3.3 – Illustration de la sphère de Bloch : le paramètre d'ordre $\mathbf{S}(x, t)$ est représenté par un angle zénithal $\theta(x, t)$ et un angle azimutal $\phi(x, t)$. L'axe décrit par e_z joue ici un rôle particulier : la projection de \mathbf{S} suivant cet axe représente la densité relative.

où σ_x , σ_y et σ_z sont les matrices de Pauli :

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (3.21)$$

Le nouveau paramètre d'ordre \mathbf{S} , que l'on appelle **vecteur de polarisation**, s'écrit alors en fonction de θ et ϕ :

$$\mathbf{S}(\zeta, \tau) = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi \\ \cos \theta \end{pmatrix}, \quad (3.22)$$

et le système est entièrement décrit par ces deux angles $\theta(x, t) \in [0; \pi]$ et $\phi(x, t) \in [0; 2\pi[$.

1.b. Équation de Landau-Lifshitz sans dissipation

Afin d'obtenir l'équation de la dynamique du vecteur de polarisation, il suffit de remplacer dans la dérivation de \mathbf{S} par rapport à τ :

$$\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \tau} = \begin{pmatrix} \theta_\tau \cos \theta \cos \phi - \phi_\tau \sin \theta \sin \phi \\ \theta_\tau \cos \theta \sin \phi + \phi_\tau \sin \theta \cos \phi \\ -\theta_\tau \sin \theta \end{pmatrix} \quad (3.23)$$

θ_τ par l'équation (3.13) et ϕ_τ par (3.14). Après simplification on montre que :

$$\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \tau} = \mathbf{S} \times \left(\frac{\partial^2 \mathbf{S}}{\partial \zeta^2} - S_z \mathbf{e}_z \right). \quad (3.24)$$

En introduisant le **champ de magnétisation** \mathbf{M} défini simplement par

$$\mathbf{M}(\zeta, \tau) = -\mathbf{S}, \quad (3.25)$$

l'équation (3.24) s'écrit sous la forme suivante :

$$\boxed{\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \tau} = \mathbf{M} \times \mathbf{H}_{\text{eff.}} = \mathbf{M} \times \left(-\frac{\partial^2 \mathbf{M}}{\partial \zeta^2} + M_z \mathbf{e}_z \right)} \quad (3.26)$$

aussi appelée **équation de Landau-Lifshitz sans dissipation** où le champ magnétique effectif \mathbf{H}_{eff} est défini par :

$$\mathbf{H}_{\text{eff}} \equiv \frac{\delta E_{\text{eff}}[\mathbf{M}]}{\delta \mathbf{M}} \quad \text{avec} \quad E_{\text{eff}}[\mathbf{M}] \equiv \int d\zeta \left(\left\| \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \zeta} \right\|^2 + \frac{M_z^2}{2} \right) \quad (3.27)$$

Le signe + devant M_z^2 dans l'expression de l'énergie effective E_{eff} décrit la situation dite *easy-plane* pour laquelle la magnétisation \mathbf{M} tend à rester dans le plan perpendiculaire à \mathbf{e}_z . L'équation (3.26) a été dérivée initialement par L. Landau et E. Lifshitz pour décrire la dynamique des ondes de spin à l'intérieur des matériaux ferromagnétiques [145]. Pour comprendre les différents termes de cette équation, on reprend la dérivation phénoménologique effectuée pour un cristal à une dimension (cf. par exemple [146]) où on associe à chaque site du réseau cristallin x_i un vecteur unitaire $\mathbf{M}_i(t) = \mathbf{M}(x_i, t)$ représentant la direction de la magnétisation. La dynamique du vecteur de magnétisation \mathbf{M}_i est alors simplement régie par son mouvement de précession autour d'un champ magnétique effectif \mathbf{H}_{eff} :

$$\frac{d\mathbf{M}_i}{dt} = \mathbf{M}_i \times \mathbf{H}_{\text{eff}} \quad \text{avec} \quad \mathbf{H}_{\text{eff}} = -(\mathbf{M}_{i+1} + \mathbf{M}_{i-1}) + M_i^z \mathbf{e}_z, \quad (3.28)$$

séparé en deux contributions :

- une contribution $\mathbf{M}_{i+1} + \mathbf{M}_{i-1}$ représentant l'interaction de la magnétisation au site i avec ses plus proches voisins (cf. la Fig. 3.4) et responsable de la propagation des ondes de spin,
- un terme d'anisotropie $\propto \mathbf{e}_z$ qui favorise l'alignement de la magnétisation dans le plan perpendiculaire à \mathbf{e}_z (magnétisation *easy-plane*). Ce terme dépend de la symétrie du cristal et s'écrit en général : $AM_i^x \mathbf{e}_x + BM_i^y \mathbf{e}_y + CM_i^z \mathbf{e}_z$.

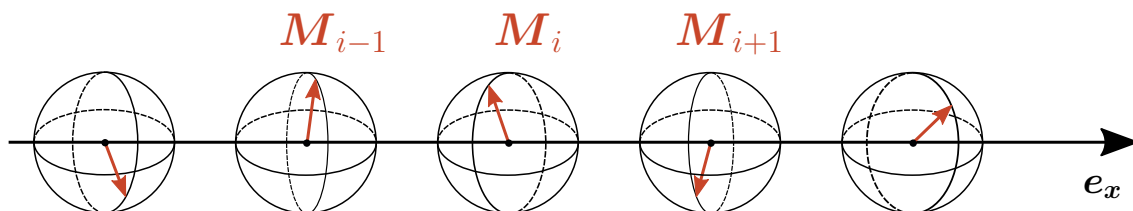


FIGURE 3.4 – Modèle de Landau-Lifshitz pour un réseau 1D : à chaque noeud du réseau x_i est associé un vecteur de polarisation $\mathbf{S}_i(t) = \mathbf{S}(x_i, t)$.

Remarque 3.2. L'équation de Landau-Lifshitz (3.26) [ou (3.28)] conserve la bien la norme du vecteur de magnétisation $\|\mathbf{M}\| = 1$ puisque $\mathbf{M} \times \mathbf{H}_{\text{eff}}$ est perpendiculaire à \mathbf{M} par définition. De plus l'équation de Landau-Lifshitz conserve l'énergie effective E_{eff} définie par (3.27). On va voir dans la partie suivante que cette équation conserve en réalité une infinité de quantités.

2. Solutions périodiques

On peut dériver la relation de dispersion des ondes planes : à travers un état stationnaire décrit par

$$w = \cos \theta = w_0 \quad \text{et} \quad v = \partial_\zeta \phi = v_0. \quad (3.29)$$

La linéarisation des équations (3.17) et (3.18) donne des solutions en onde plane avec la relation de dispersion :

$$\omega_{\pm}(k) = \left(2w_0v_0 \pm \sqrt{(1-w_0^2)(1-v_0^2) + k^2} \right) k. \quad (3.30)$$

Dans la limite où l'état stationnaire est non polarisé ($w_0 = 0$ et $v_0 = 0$), on retrouve la relation de dispersion du mode de polarisation (1.59) dérivée au Chapitre 1 à condition d'effectuer le dimensionnement :

$$\omega \rightarrow \omega/T_p \quad \text{et} \quad k \rightarrow k/\xi_p. \quad (3.31)$$

À grandes longueurs d'onde, la relation de dispersion (3.30) décrit la propagation de phonons de vitesse :

$$V_{\pm}(w_0, v_0) = 2w_0v_0 \pm \sqrt{(1-w_0^2)(1-v_0^2)}. \quad (3.32)$$

Bien que la densité relative soit bornée $w_0^2 \leq 1$, la vitesse relative v_0 peut dépasser la vitesse du son de polarisation, c.à.d. dans les coordonnées adimensionnées : $v_0^2 \geq 1$. On remarque alors à l'aide de la relation de dispersion (3.30) que l'état ($w_0, v_0 > 1$) = cste devient dynamiquement instable et qu'il ne peut décrire l'état stationnaire du condensat (cf. la Remarque 1.4).

Dans la limite $\delta g/g \ll 1$, les ondes périodiques des équations de Gross-Pitaevskii peuvent être maintenant dérivées exactement : en effet, l'équation de Landau-Lifshitz à une dimension (3.26) traduisant la dynamique de polarisation appartient à la **hiérarchie AKNS**² et est par conséquent intégrable par la méthode de diffusion inverse. Dans cette partie on va dériver les solutions périodiques de cette équation à l'aide de la méthode d'intégration *finite gap* en adaptant la dérivation proposée dans la référence [148]. Bien que cela ne soit pas nécessaire pour dériver les solutions dites à *une phase* (cf. la Section iv), on verra que cette méthode permet d'extraire directement les invariants de Riemann nécessaires à la théorie de Whitham développée ultérieurement dans la partie 4.a.

2.a. Intégration *finite-gap*

On décrit ici les principaux résultats de l'intégration *finite-gap* en suivant la méthode développée dans la référence [132] pour les équations appartenant à la hiérarchie AKNS ; la dérivation *explicite* est décrite dans l'Article 4. Afin d'intégrer les solutions de l'équation (3.26), on introduit les paires de Lax suivantes (cf. les Refs. [149, 150]) :

$$\frac{\partial}{\partial \zeta} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F & G \\ H & -F \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = \mathbb{U} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}, \quad (3.33)$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & -A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = \mathbb{V} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}, \quad (3.34)$$

2. Ablowitz-Kaup-Newell-Segur, en l'honneur des auteurs de l'article fondateur [147].

où les coefficients des matrices \mathbb{U} et \mathbb{V} sont définis par :

$$F = \frac{i\lambda}{2}M_z, \quad (3.35a)$$

$$G = -\frac{1}{2}\sqrt{1-\lambda^2}M_-, \quad (3.35b)$$

$$H = -\frac{1}{2}\sqrt{1-\lambda^2}M_+, \quad (3.35c)$$

$$A = \frac{i}{2}(1-\lambda^2)M_z + \frac{\lambda}{4}[(M_-)_\zeta M_+ - M_-(M_+)_\zeta], \quad (3.35d)$$

$$B = \frac{1}{2}\lambda\sqrt{1-\lambda^2}M_- + \frac{i}{2}\sqrt{1-\lambda^2}[(M_z)_\zeta M_- - M_z(M_-)_\zeta], \quad (3.35e)$$

$$C = \frac{1}{2}\lambda\sqrt{1-\lambda^2}M_+ - \frac{i}{2}\sqrt{1-\lambda^2}[(M_z)_\zeta M_+ - M_z(M_+)_\zeta], \quad (3.35f)$$

avec $M_\pm = M_x \pm iM_y$ et λ un **paramètre spectral constant** indépendant de ζ et τ . L'équation (3.26) s'écrit alors comme l'équation de compatibilité du système :

$$\frac{\partial}{\partial\zeta} \frac{\partial}{\partial\tau} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = \frac{\partial}{\partial\tau} \frac{\partial}{\partial\zeta} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \frac{\partial\mathbb{U}}{\partial\tau} - \frac{\partial\mathbb{V}}{\partial\zeta} + [\mathbb{U}, \mathbb{V}] = 0, \quad (3.36)$$

où $[\mathbb{U}, \mathbb{V}]$ est le commutateur entre les deux matrices \mathbb{U} et \mathbb{V} .

i. Squared basis functions

Le système linéaire 2×2 décrit par les équations (3.33) et (3.34) possède une base de solutions de rang 2 décrit par les vecteurs : $\varphi^a \equiv (\varphi_1^a, \varphi_2^a)^T$ et $\varphi^b \equiv (\varphi_1^b, \varphi_2^b)^T$. Il existe une base de fonctions privilégiée (f, g, h) où f, g et h – appelées *squared basis functions* – sont définies telles que :

$$f = -\frac{i}{2}(\varphi_1^a\varphi_2^b + \varphi_2^a\varphi_1^b), \quad g = \varphi_1^a\varphi_1^b, \quad h = -\varphi_2^a\varphi_2^b \quad (3.37)$$

Dans cette nouvelle base, l'équation (3.33) s'écrit :

$$f_\zeta = -iHg + iGh, \quad (3.38a)$$

$$g_\zeta = 2iGf + 2Fg, \quad (3.38b)$$

$$h_\zeta = -2iHf - 2Fh, \quad (3.38c)$$

et l'équation (3.34) s'écrit :

$$f_\tau = -iCg + iBh, \quad (3.39a)$$

$$g_\tau = 2iBf + 2Ag, \quad (3.39b)$$

$$h_\tau = -2iCf - 2Ah. \quad (3.39c)$$

Le déterminant de la base des solutions (φ^a, φ^b) étant constant³, la quantité définie par :

$$P \equiv f^2 - gh = \left(\frac{i \det(\varphi^a, \varphi^b)}{2} \right)^2 \quad (3.40)$$

est indépendante de ζ et τ et ne peut dépendre que du paramètre spectral λ . La forme des solutions cherchées dépend du type de dépendance de P selon λ et les solutions quasi-périodiques sont obtenues en imposant que P soit un polynôme de λ (cf. la Ref. [151]).

3. d'après l'égalité : $\partial[\det(\varphi^a, \varphi^b)] = \text{tr}[\partial(\varphi^a, \varphi^b)]$.

Plus particulièrement les solutions dites à *une phase*, pour lesquelles l'aimantation est de la forme : $\mathbf{M} = \mathbf{M}(\zeta - V\tau)$, sont obtenues pour un polynôme $P(\lambda)$ de degré 4 (on adapte ici la dérivation effectuée dans la Ref. [148]). On définit par la suite le polynôme :

$$P(\lambda) \equiv \prod_{i=1}^4 (\lambda - \lambda_i) = \lambda^4 - s_1 \lambda^3 + s_2 \lambda^2 - s_3 \lambda + s_4, \quad (3.41)$$

où les coefficients s_i sont reliés aux racines du polynôme à l'aide des relations de Viète :

$$s_1 = \sum_i \lambda_i, \quad s_2 = \sum_{i<j} \lambda_i \lambda_j, \quad s_3 = \sum_{i<j<k} \lambda_i \lambda_j \lambda_k, \quad \text{et} \quad s_4 = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4. \quad (3.42)$$

Les racines de $P(\lambda)$ constitueront par la suite les paramètres des solutions à une phase (f, g, h) et par conséquent des solutions à une phase de l'équation de Landau-Lifshitz. Il existe cependant une paramétrisation plus naturelle pour les solutions que l'on obtient en reliant les *squared basis functions* et la magnétisation \mathbf{M} . On verra cependant dans la partie 4.a que l'introduction du polynôme $P(\lambda)$ et de ses coefficients λ_i permet de simplifier grandement les équations de modulation des ondes périodiques que l'on dérivera afin d'étudier la propagation des ondes de choc dispersives à travers le condensat.

ii. Relations entre (f, g, h) et (M_x, M_y, M_z)

La définition de P par le polynôme (3.41) est consistante d'après l'équation (3.40) si la fonction f est aussi un polynôme de degré 2 de λ :

$$f(\zeta, \tau) = f_0(\zeta, \tau) \lambda^2 - f_1(\zeta, \tau) \lambda + f_2(\zeta, \tau) \quad (3.43)$$

et afin de respecter les équations (3.38a) et (3.39a), les fonctions g et h dépendent paramètre spectral λ selon les expressions de la forme :

$$g(\zeta, \tau) = g_0(\zeta, \tau) \sqrt{1 - \lambda^2} (\lambda - \mu_1(\zeta, \tau)), \quad (3.44)$$

$$h(\zeta, \tau) = h_0(\zeta, \tau) \sqrt{1 - \lambda^2} (\lambda - \mu_2(\zeta, \tau)), \quad (3.45)$$

où $f_0, f_1, f_2, g_0, \mu_1, h_0, \mu_2$ sont des fonctions de (ζ, τ) restant à déterminer. À l'ordre le plus élevé en λ des équations (3.38) et (3.39), on a simplement :

$$f_0(\zeta, \tau) = M_z(\zeta, \tau), \quad g_0(\zeta, \tau) = M_+(\zeta, \tau), \quad h_0(\zeta, \tau) = M_-(\zeta, \tau). \quad (3.46)$$

Les coefficients restants sont déterminés à l'aide de l'identification terme à terme entre l'expression $f^2 - gh$ et les coefficients constants s_i du polynôme $P(\lambda)$:

$$s_1 = 2f_1 M_z + (1 - M_z^2)(\mu_1 + \mu_2), \quad (3.47a)$$

$$s_2 = f_1^2 + 2f_2 M_z + (1 - M_z^2)(\mu_1 \mu_2 - 1), \quad (3.47b)$$

$$s_3 = 2f_1 f_2 - (1 - M_z^2)(\mu_1 + \mu_2), \quad (3.47c)$$

$$s_4 = f_2^2 - (1 - M_z^2)\mu_1 \mu_2. \quad (3.47d)$$

On peut ainsi montrer que $f_2(\zeta, \tau)$ s'exprime simplement en fonction de M_z :

$$f_2 = \frac{s_1 + s_3}{2f_1} - M_z, \quad (3.48)$$

et que $f_1(\zeta, \tau)$ est solution de l'équation :

$$f_1^4 - (1 + s_2 + s_4)f_1^2 + \frac{(s_1 + s_3)^2}{4} = 0. \quad (3.49)$$

D'après cette dernière équation, on remarque que la quantité f_1 est indépendante de ζ et de τ . Les deux racines μ_1 et μ_2 sont complexes conjuguées et sont égales à :

$$\mu_1 = \mu_2^* = \mu(\zeta, \tau) = \frac{s_1 + 2f_1 M_z + 2i\sqrt{-\mathcal{R}(-M_z)}}{2(1 - M_z^2)} \quad \text{avec :} \quad (3.50)$$

$$\mathcal{R}(w) = w^4 + \frac{s_1 + s_3}{f_1} w^3 + s_2 w^2 + \frac{(f_1^2 - 1)s_1 - s_3}{f_1} w + \frac{s_1^2}{4} + s_4 - \left(\frac{s_1 + s_3}{2f_1}\right)^2, \quad (3.51)$$

où on le rappelle : $w = S_z = -M_z$. Les racines w_i du polynôme $\mathcal{R}(w)$ sont reliées aux λ_i et on appellera par la suite $\mathcal{R}(w)$ la résolvante du polynôme $P(\lambda)$. Les relations explicites entre les λ_i et les w_i sont données par la suite dans l'équation (3.139).

iii. Solutions à une phase

Les *squared basis functions* f , g et h étant maintenant reliées au champ de magnétisation $\mathbf{M}(\zeta, \tau)$, on peut déterminer les équations décrivant la variation à une phase de \mathbf{M} à l'aide des équations (3.38) et (3.39). Après simplification (cf. l'Article 4), les équations (3.38) et (3.39) s'écrivent⁴ :

$$\frac{\partial M_-}{\partial \tau} + \frac{s_1}{2} \frac{\partial M_-}{\partial \zeta} = -i \frac{s_1 + s_3}{2f_1} M_- \quad \text{avec} \quad \frac{\partial M_-}{\partial \zeta} = i(f_1 - \mu M_z) M_-, \quad (3.52)$$

où μ est la racine définie par l'équation (3.50), ainsi que

$$\frac{\partial M_z}{\partial \tau} + \frac{s_1}{2} \frac{\partial M_z}{\partial \zeta} = 0 \quad \text{avec} \quad \frac{\partial(-M_z)}{\partial \zeta} = \sqrt{-\mathcal{R}(-M_z)}. \quad (3.53)$$

D'après les équations (3.52) et (3.53), les solutions se propagent à vitesse constante $V = s_1/2$ et en introduisant la **phase** :

$$\boxed{\xi = \zeta - \frac{s_1}{2} \tau} \quad (3.54)$$

l'équation (3.52) est résolue par :

$$M_-(\zeta, \tau) = \exp\left(-i \frac{s_1 + s_3}{2f_1} \tau\right) M_-(\xi) \quad \text{avec} \quad \frac{dM_-}{d\xi} = -i(f_1 + \mu M_z) M_- \quad (3.55)$$

et l'équation (3.53) par :

$$\boxed{M_z(\zeta, \tau) = -w(\zeta, \tau) = -w(\xi) \quad \text{avec} \quad \frac{dw}{d\xi} = \sqrt{-\mathcal{R}(w)}} \quad (3.56)$$

Remarque 3.3. Puisque le champ μ dépend explicitement de $w = -M_z$ [cf. l'Eq. (3.50)] il ne dépend que de la phase ξ , et en évaluant l'équation (3.38b) en $\lambda = \mu$, on montre que $\mu(\xi)$ résout :

$$\frac{d\mu}{d\xi} = i f(\mu) = \pm i \sqrt{P(\mu)}. \quad (3.57)$$

Quand $w(\xi)$ décrit une trajectoire dans l'espace réelle d'équation (3.56), $\mu(\xi)$ décrit une trajectoire dans l'espace complexe représentée par (3.57) [ces deux trajectoires sont reliées par la relation (3.50)].

4. L'équation sur M_+ est simplement le complexe conjugué de l'équation (3.52).

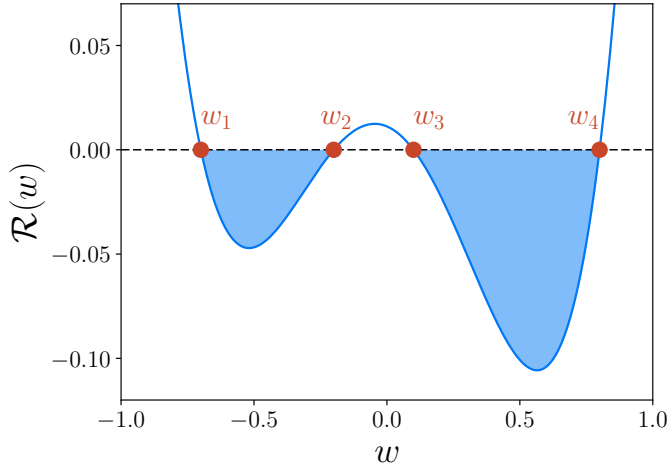


FIGURE 3.5 – Variation de la résolvante $\mathcal{R}(w)$ en train plein bleu (—) pour un choix typiques des racines $-1 \leq w_i \leq 1$ représentées par des points rouges (\bullet). Les zones pleines en bleu représentent le domaine où la densité relative $w(\xi)$ peut osciller.

iv. Une autre dérivation

On peut retrouver l'équation (3.56) à l'aide des équations (3.13) et (3.14) plus simplement en cherchant les solutions se propageant à vitesse constante V (cf. l'Article 2) :

$$\theta(\zeta, \tau) = \theta(\xi) \quad \text{et} \quad \phi(\zeta, \tau) = -k\zeta + \phi(\xi), \quad (3.58)$$

où $\xi = \zeta - V\tau$. Après intégration de l'équation sur (3.13) par rapport à ξ , on obtient la relation reliant la densité relative $\cos \theta$ et le potentiel vitesse ϕ suivante :

$$\phi_\xi = -k + V \cdot \frac{B - \cos \theta}{\sin^2 \theta}, \quad (3.59)$$

où B est une constante d'intégration. L'équation restante (3.14) se simplifie alors telle que :

$$\theta_{\xi\xi} = \frac{V^2(B - \cos \theta)(B \cos \theta - 1)}{\sin^3 \theta} - \sin \theta \cos \theta + Vk \sin \theta. \quad (3.60)$$

Intégrée une seconde fois en la multipliant par θ_ξ , cette équation donne l'équation (3.56) avec $\mathcal{R}(w)$ sous la forme :

$$\mathcal{R}(w) = w^4 - 2Vkw^3 + (C - 1)w^2 + 2V(k - VB)w + V^2(1 + B^2) - C, \quad (3.61)$$

où C est une autre constante d'intégration. Les deux approches proposées dans iii et iv sont équivalentes et les constantes d'intégration V, k, B, C [resp. les constantes s_i pour le polynôme décrit par (3.50)] définissent les différents paramètres de la solution à une phase tels que la vitesse de l'onde ou son amplitude. Afin de concilier les deux définitions (3.51) et (3.61), on définira par la suite le polynôme $\mathcal{R}(w)$ par ses racines :

$$\mathcal{R}(w) = \prod_{i=1}^4 (w - w_i) \quad (3.62)$$

où les racines w_i sont ordonnées telles que $w_i \leq w_{i+1}$. Dans la suite on étudiera seulement la variation de la densité relative w , la vitesse relative ϕ_ζ est simplement⁵ déterminée par la relation (3.59).

5. On privilégie ici la méthode de la partie iv pour relier les champs w et v . Il est cependant possible de déterminer la phase relative ϕ à l'aide de la méthode *finite-gap* en intégrant l'équation sur M_\pm (3.55).

2.b. Ondes cnoïdales

i. Solutions périodiques

La solution de (3.56) peut être exprimée à l'aide des fonctions elliptiques de Jacobi. On ne décrit pas explicitement dans cette partie l'intégration de ces fonctions et on reporte ici directement les résultats déjà dérivés dans la référence [135]. La densité relative $w = \cos \theta$ peut osciller entre deux zéros w_i du polynôme $\mathcal{R}(w)$ comme le montre la figure 3.5, à condition que ces zéros respectent : $w_i \in [-1, 1]$. Le polynôme $\mathcal{R}(w)$ étant de degré pair, la fonction $w(\xi)$ peut osciller entre les deux paires de racines suivantes :

$$w_1 \leq w(\xi) \leq w_2 \quad \text{ou} \quad \boxed{w_3 \leq w(\xi) \leq w_4} \quad (3.63)$$

Par la suite on décrit la solution périodique $w(\xi) \in [w_3, w_4]$. La solution $w(\xi) \in [w_1, w_2]$ est obtenue en effectuant la substitution :

$$w_1 \longleftrightarrow w_4 \quad \text{et} \quad w_2 \longleftrightarrow w_3 . \quad (3.64)$$

La solution de (3.56) s'écrit sous forme implicite :

$$\xi - \xi_0 = \int_{w_3}^w \frac{dw}{\sqrt{-\mathcal{R}(w)}} = \int_{w_3}^w \frac{dw}{\sqrt{(w-w_1)(w-w_2)(w-w_3)(w_4-w)}} . \quad (3.65)$$

Sans perte de généralité, on suppose que la constante d'intégration $\xi_0 = 0$. Après intégration de (3.65), on obtient d'après la Ref.[135] l'onde **cnoïdale**⁶ :

$$\boxed{w(\xi) = \mathcal{W}_{34}(\xi) \equiv w_3 + \frac{(w_4 - w_3) \operatorname{cn}^2(W, m)}{1 + \frac{w_4 - w_3}{w_3 - w_1} \operatorname{sn}^2(W, m)} } \quad (3.66)$$

où cn et sn sont les fonctions elliptiques de Jacobi (définies dans la Ref. [152]) et les paramètres W et m définis par :

$$W = \frac{\sqrt{(w_3 - w_1)(w_4 - w_2)}}{2} \xi, \quad m = \frac{(w_4 - w_3)(w_2 - w_1)}{(w_4 - w_2)(w_3 - w_1)} . \quad (3.67)$$

On introduit ici la notation \mathcal{W}_{34} (resp. \mathcal{W}_{12}) pour indiquer que la solution oscille entre les amplitudes w_3 et w_4 (resp. w_1 et w_2). Un exemple dans le cas général est représenté dans la figures 3.6 avec L la période de la solution définie par⁷ :

$$L \equiv \left(\int_{w_3}^{w_4} + \int_{w_4}^{w_3} \right) \frac{dw}{\sqrt{-\mathcal{R}(w)}} = \frac{4K(m)}{\sqrt{(w_3 - w_1)(w_4 - w_2)}} , \quad (3.68)$$

où $K(m)$ est l'intégrale elliptique complète de première espèce (cf. la Ref. [152]). Le paramètre d'excentricité $m \in [0, 1]$ régie la nature des solutions propagées. La limite $m = 0$ correspond toujours à une onde périodique (L restant finie) et peut être atteinte de deux façons différentes :

6. Ce terme a été défini initialement par D. Korteweg et G. de Vries dans [29] : « We propose to attach to this type of wave the name of cnoidal waves (in analogy with sinusoidal waves) ».

7. En théorie la période L est différente pour la solution \mathcal{W}_{34} et la solution \mathcal{W}_{12} , mais on préfère ici ne pas indiquer la quantité pour ne pas alourdir les notations.

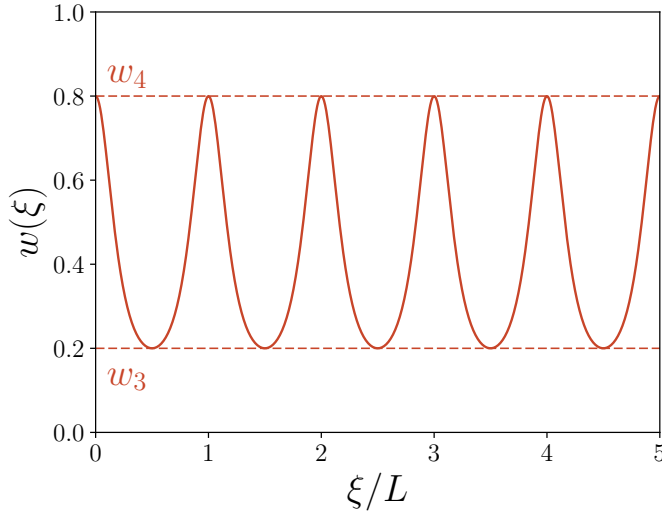


FIGURE 3.6 – Variation de la densité relative w [cf. l'Eq. (3.15)] en fonction de ξ/L [avec L la longueur d'onde définie par (3.68)]. L'onde cnoïdale (3.66) en trait plein rouge (—) oscille entre les limites $w_3 = 0.2$ et $w_4 = 0.8$ représentées en pointillés rouges (---); les paramètres restants sont choisis tels que $(w_1, w_2) = (-0.7, 0.1)$.

- la première $w_2 = w_1$ correspond à une onde non-linéaire pouvant être représentée à l'aide de fonctions trigonométriques

$$\mathcal{W}_{34}(\xi) = w_3 + \frac{(w_4 - w_3) \cos^2 W}{1 + \frac{w_4 - w_3}{w_3 - w_1} \sin^2 W}, \quad (3.69)$$

- la seconde correspond à la limite perturbative de faible amplitude : $w_4 - w_3 \ll w_3$, qui décrit la propagation des ondes planes

$$\mathcal{W}_{34}(\xi) \simeq w_3 + \frac{1}{2}(w_4 - w_3) \cos(k\xi), \quad \text{avec } k = \sqrt{(w_3 - w_1)(w_3 - w_2)}. \quad (3.70)$$

Cette dernière solution est à rapprocher de la relation de dispersion des ondes planes (3.30). La relation de dispersion peut être formellement retrouvée en remarquant que dans cette limite⁸ :

$$V(w_1, w_2, w_3) = \omega(k)/k. \quad (3.71)$$

ii. Limite solitonique $m \rightarrow 1$

Bien que l'onde cnoïdale décrite par (3.66) soit une onde périodique, elle admet comme cas limite des solutions localisées se déplaçant à vitesse constante : dans la limite $w_3 \rightarrow w_2$ (ou $m \rightarrow 1$) la période L définie par (3.68) tend vers l'infini et la solution (3.66) décrit un **soliton brillant**⁹ d'équation (comme le montre la figure 3.7) :

$$\mathcal{W}_{34}(\xi) = w_2 + \frac{w_4 - w_2}{\cosh^2 W + \frac{w_4 - w_2}{w_2 - w_1} \sinh^2 W}. \quad (3.72)$$

Dans cette limite solitonique, les paramètres de l'onde w_1 , w_2 et w_4 peuvent être exprimés à l'aide des valeurs de la densité relative w et de la vitesse relative v à l'infini :

$$w(\zeta \rightarrow \pm\infty) = w_0 = \cos \theta_0 \quad \text{et} \quad v(\zeta \rightarrow \pm\infty) = v_0, \quad (3.73)$$

8. Dans les deux cas la relation de dispersion dépend de 3 paramètres : v_0 , w_0 et k pour (3.30) et w_1 , w_2 et w_3 pour (3.70).

9. Dans le cas où $w(\xi) \in [w_1, w_2]$, le soliton décrit est sombre.

et de la vitesse du soliton V tels que :

$$w_2 = w_0 \quad \text{et} \quad w_{1,4} = v_0(V - v_0 w_0) \pm \sqrt{(1 - v_0^2)[1 - (V - v_0 w_0)^2]} . \quad (3.74)$$

On peut aussi définir l'énergie du soliton E_s comme étant la différence entre l'énergie de la solution (3.73) et l'énergie de l'état stationnaire décrit par (w_0, v_0) :

$$E_s = E_p[w(\xi), v(\xi)] - E_p[w_0, v_0] , \quad (3.75)$$

où E_p est la fonctionnelle d'énergie¹⁰ des équations (3.17) et (3.18). On obtient alors :

$$E_s = 2 \sqrt{(w_4 - w_2)(w_2 - w_1)} = 2 \sqrt{(1 - v_0^2)(1 - w_0^2) - (V - 2v_0 w_0)^2} . \quad (3.76)$$

On remarque ainsi qu'il existe alors un soliton ($w_2 = w_1$) d'amplitude finie et **d'énergie nulle**. Ce soliton se déplace à la vitesse :

$$V = 2w_0 v_0 \pm \sqrt{(1 - w_0^2)(1 - v_0^2)} = c(w_0, v_0) , \quad (3.77)$$

correspondant à la vitesse du son pour un état stationnaire décrit par (v_0, w_0) [cf. l'Eq. (3.32)]. Ce soliton correspond à la version non-linéaire des phonons de polarisation dans la limite où la longueur d'onde est infinie ($L \rightarrow 0$). Il est remarquable que la propagation d'excitations d'énergie nulle survive aux effets non-linéaires : l'amplitude du soliton $w_4 - w_1$ n'est ici pas contrainte et correspond à une déformation *macroscopique* du condensat. La limite $w_2 = w_1$ de (3.73) est bien définie et s'écrit à l'aide de l'expression algébrique suivante :

$$\mathcal{W}_{34}(\xi) = w_1 + \frac{w_4 - w_1}{1 + (w_4 - w_1)^2 \xi^2 / 4} . \quad (3.78)$$

Remarque 3.4. Il est possible de dériver une équation non-linéaire pour les excitations du mode de polarisation dans la limite des grandes longueurs d'onde. À l'aide de la méthode des échelles multiples, il a été montré dans la référence [105] que la dynamique de ces excitations est régie par une équation de Gardner. Dans la limite où la vitesse du son de polarisation c_p est faible [cf. l'Eq. (3.2)], la solution de l'équation de Gardner (dont l'expression est donnée par l'Eq. (36) dans la Ref. [105]) correspond bien à la version de faible amplitude de l'expression (3.78).

Bien que l'onde cnoïdale soit une solution de l'équation de Landau-Lifshitz, il est difficile expérimentalement de pouvoir créer et observer la propagation de l'onde périodique représentée par (3.66). Cependant, cette onde cnoïdale peut **émerger** à partir d'un état initial de polarisation plus facile à mettre en oeuvre expérimentalement. Dans la suite de ce chapitre, on va s'intéresser au problème de Cauchy constitué des équations de Landau-Lifshitz et de la condition initiale suivante :

$$w(\zeta, \tau = 0) = \begin{cases} w_G & \text{si } x < 0 \\ w_D & \text{si } x \geq 0 \end{cases} , \quad v(\zeta, \tau = 0) = \begin{cases} v_G & \text{si } x < 0 \\ v_D & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \quad (3.79)$$

où par la suite l'indice G signifie Gauche et l'indice D signifie Droite. Numériquement, l'état (3.79) sera implémenté par une distribution d'extension finie :

$$w(\zeta, \tau = 0) = \frac{w_D - w_G}{2} \tanh\left(\frac{\xi}{\xi_0}\right) + \frac{w_D + w_G}{2} , \quad (3.80)$$

10. $E_p = \int d\zeta \frac{1}{2} (\theta_\zeta^2 + (\phi_\zeta^2 - 1) \sin^2 \theta) = \int d\zeta \frac{1}{2} \left(\frac{w_\zeta^2}{1 - w^2} - (1 - w^2)(1 - v^2) \right) .$

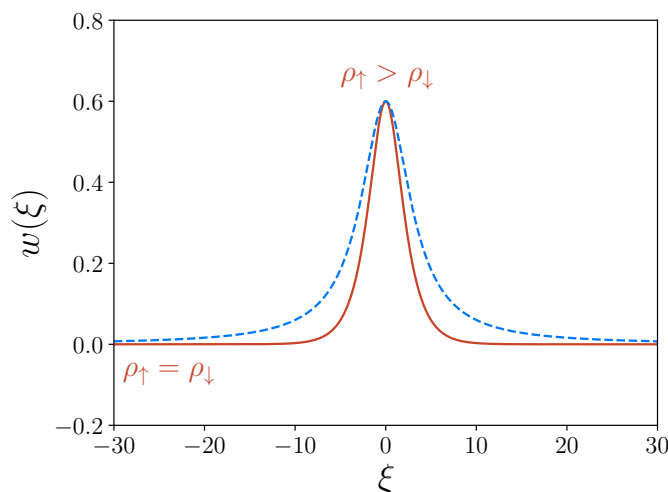


FIGURE 3.7 – Soliton décrit par l’expression (3.73) pour un état à l’infini non polarisé $w_0 = v_0 = 0$ [cf. l’Eq. (3.74)]. L’onde représentée en trait plein rouge (—) se déplace à la vitesse $V = 0.8$. L’onde représentée en pointillés bleus (--) correspond au soliton algébrique décrit par (3.78) et se déplace à la vitesse du son de polarisation $V = 1$.

et $v(\zeta, \tau = 0)$ par la même fonction où $w_{L,R} \rightarrow v_{L,R}$. Pour une largeur ξ_0 suffisamment petite, la solution numérique converge vers la solution de condition initiale (3.79).

Cette condition initiale constitue une idéalisation de l’expérience effectuée par le groupe de P. Engels en 2011 (cf. la Ref. [45]) où un condensat quasi-1D d’atomes de ^{87}Rb est préparé dans un état de polarisation tel que les fluides constitués des atomes dans l’état $|\uparrow\rangle$ et l’état $|\downarrow\rangle$ sont de densité et de vitesse différentes à gauche et à droite¹¹. Dans le cas où les deux fluides sont contre-propageants, il a été observé que la polarisation du condensat propage un train de **solitons sombre-brillant**, ce qui constitue un très bon candidat pour l’observation des ondes cnoïdales.

Théoriquement le problème de Cauchy de condition initiale (3.79) est appelé **problème de Riemann**. Dans la mesure où les amplitudes $|w_G - w_D|$ et $|v_G - v_D|$ ne constituent par un petit paramètre, la résolution de l’équation de Landau-Lifshitz ne peut être traitée perturbativement : on ne peut notamment pas projeter la condition initiale (3.79) sur les ondes planes de polarisation du mode (3.30). Cependant, puisque l’équation de Landau-Lifshitz est intégrable par la méthode de diffusion inverse, il est possible d’effectuer *une transformée de Fourier non-linéaire* de la solution (cf. la Ref. [153]) et de projeter l’état initial (3.79) selon les différentes solutions à une phase dérivées lors de l’intégration *finite-gap*. Le problème de Riemann est maintenant systématisé et il est possible d’étudier ses solutions à l’aide de la **théorie de Whitham** comme on le montrera dans la partie 4.a. On montrera notamment que des ondes cnoïdales peuvent émerger de la condition initiale (3.79) sous la forme d’*ondes de choc dispersives*.

Remarque 3.5. Bien que l’équation de Landau-Lifshitz soit intégrable par la méthode de diffusion inverse, il est important de souligner que le problème de Riemann peut être résolu par la théorie de Whitham sans utiliser explicitement l’intégrabilité de l’équation¹² (le problème peut même être résolu partiellement si le système n’est pas intégrable [155]).

11. Plus particulièrement dans cette expérience les fluides sont préparés tels qu’une partie des atomes se propagent dans un sens et l’autre partie dans le sens opposé afin que les deux fluides soient en contre-propagation.

12. G.B. Whitham a déterminé les équations portant son nom pour l’équation de Korteweg - de Vries sans utiliser le caractère intégrable de cette équation, cf. la Ref. [154].

3. Limite hydrodynamique

Avant d'étudier plus en détail la résolution du problème de Riemann à l'aide de la théorie de Whitham, on va s'intéresser à la situation plus simple où la variation spatiale de la polarisation est négligeable selon une longueur de cicatrisation de polarisation (égale à 1 dans les coordonnées adimensionnées ζ, τ). Dans cette limite les termes dispersifs des équations de la dynamique, représentés par exemple dans les équations (3.17)-(3.18) par les termes de dérivées secondes et supérieures de w dans l'équation (3.18), deviennent négligeables. Cette limite sans dispersion, aussi appelée **limite hydrodynamique** s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} + \mathbb{A}(v, w) \frac{\partial}{\partial \zeta} \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} = 0 \quad \text{avec} \quad \mathbb{A}(v, w) \equiv \begin{pmatrix} 2vw & v^2 - 1 \\ w^2 - 1 & 2vw \end{pmatrix}. \quad (3.81)$$

Remarque 3.6. Ce système d'équations correspond au système dérivé indépendamment par H. Lacombe [156] et par L. Ovsyannikov [157] pour décrire l'écoulement d'un fluide stratifié (à deux couches) contraint par des parois solides dans l'approximation de Bousinesq. Dans ce modèle w représente la différence de hauteur entre les deux couches et v la vitesse relative d'une couche par rapport à l'autre.

3.a. Invariants de Riemann

Le problème de Cauchy constitué de la condition (3.79) et des équations hydrodynamiques (3.81) est bien posé si et seulement si le système (3.81) est hyperbolique, c.à.d. si les valeurs propres de $\mathbb{A}(v, w)$ définies par¹³ :

$$V_{\pm}(\lambda_-, \lambda_+) = 2vw \pm \sqrt{(1-v^2)(1-w^2)} \quad (3.82)$$

sont **réelles**. Puisque la densité relative respecte $w^2 \leq 1$ par définition [cf. l'Eq. (3.15)], cette condition se réécrit :

$$v(\zeta, \tau)^2 \leq 1, \quad (3.83)$$

La condition d'hyperbolicité est à rapprocher de la stabilité de l'état stationnaire (3.29) : quand $v_0^2 > 1$, le système développe des excitations de pulsation complexe [cf. l'Eq. (3.30)] et devient dynamiquement instable. Dans une certaine mesure la variation spatiale de la polarisation (v, w) dans l'approche hydrodynamique est suffisamment lente pour correspondre à un état stationnaire *local* et subir cette instabilité dans le cas où la vitesse relative $|v|$ est plus grande que 1. On considère ainsi dans l'approche hydrodynamique que les champs respectent :

$$-1 \leq v, w \leq 1. \quad (3.84)$$

Le système (3.81) est alors diagonalisable : en introduisant les deux variables suivantes

$$\lambda_{\pm}(v, w) = vw \pm \sqrt{(1-v^2)(1-w^2)} \quad (3.85)$$

les équations hydrodynamiques se simplifient telles que :

$$\partial_{\tau} \lambda_- + V_-(\lambda_-, \lambda_+) \partial_{\zeta} \lambda_- = 0, \quad (3.86a)$$

$$\partial_{\tau} \lambda_+ + V_+(\lambda_-, \lambda_+) \partial_{\zeta} \lambda_+ = 0, \quad (3.86b)$$

13. Ces valeurs propres sont à rapprocher à la vitesse des phonons de polarisation pour un état stationnaire décrit par (v, w) [cf. l'Eq. (3.32)].

où $V_{\pm}(\lambda_-, \lambda_+)$ est exprimée en fonction des variables λ_+ et λ_- selon l'expression :

$$V_{\pm}(\lambda_-, \lambda_+) = \frac{3}{2}\lambda_{\pm} + \frac{1}{2}\lambda_{\mp} . \quad (3.87)$$

Les deux champs λ_{\pm} sont appelés **invariants de Riemann** : en suivant le champ $\lambda_{\pm}(\zeta, \tau)$ selon la caractéristique $\dot{\zeta} = V_{\pm}(\lambda_+, \lambda_-)$, on montre que

$$\frac{d\lambda_{\pm}}{d\tau} = 0 , \quad (3.88)$$

autrement dit que λ_{\pm} est **invariant**.

Remarque 3.7. Dans le cas où le système hydrodynamique (3.81) est hyperbolique de dimension 2, il est toujours possible de définir des invariants de Riemann et d'écrire le système sous la forme diagonale (3.86). En effet en notant \mathbf{L}^{\pm} le vecteur propre gauche de la matrice \mathbb{A} associé à la valeur propre V_{\pm} , on peut toujours écrire :

$$L_1^{\pm}(v, w)dv + L_2^{\pm}(v, w)dw = \mu_{\pm} d\lambda_{\pm} , \quad (3.89)$$

où μ_{\pm} sont des facteurs d'intégration dépendant de v et w . On a plus particulièrement pour le système (3.81)¹⁴ :

$$\mathbf{L}^{\pm} = \left(\frac{\mp 1}{\sqrt{1-v^2}}, \frac{1}{\sqrt{1-w^2}} \right) , \quad \mu_{\pm} = \frac{1}{v\sqrt{1-w^2} \mp w\sqrt{1-v^2}} . \quad (3.90)$$

Ce n'est plus nécessairement le cas pour un système dont la dimension est supérieure à 2 où l'existence des facteurs d'intégration μ_i n'est pas assurée.

3.b. Solution en onde simple

i. Onde simple $\lambda_- = \text{cste}$

Généralement les solutions des équations hydrodynamiques telles que (3.81) sont *faiblement discontinues* (ou C^1 par morceaux, cf. e.g. la Ref. [95]). À l'aide des nouvelles variables (3.85), cela se traduit par la variation faiblement discontinue d'un des invariants de Riemann et la constance des invariants restants. À titre d'exemple on suppose ici que λ_- est constant :

$$\lambda_-(v, w) = vw - \sqrt{(1-v^2)(1-w^2)} = \lambda_-^0 \quad (3.91)$$

avec λ_-^0 déterminé par un état *initial* quelconque du système (v_0, w_0) :

$$\lambda_-^0 = v_0 w_0 - \sqrt{(1-v_0^2)(1-w_0^2)} . \quad (3.92)$$

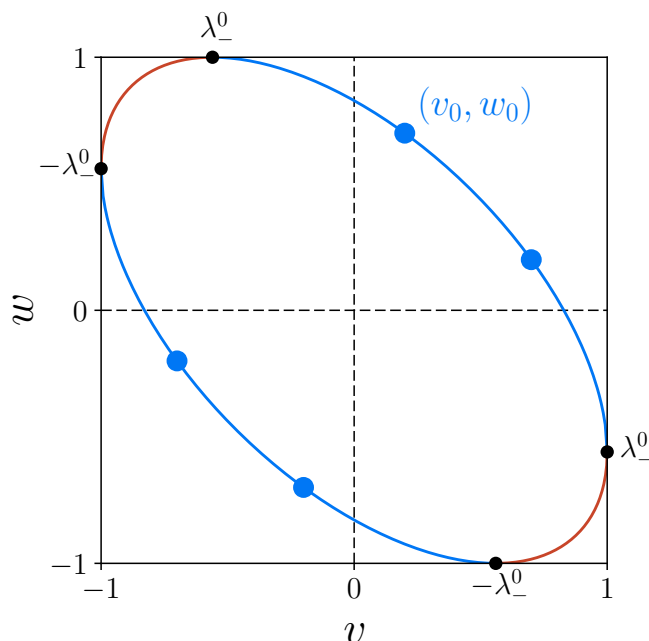
Cette solution est appelée solution en **onde simple** et relie par la suite le champ de vitesse v et le champ de densité w . D'après la symétrie des expressions des invariants de Riemann [cf. l'Eq. (3.85)], la constante (3.92) décrit en réalité 4 états *initiaux* différents :

$$\lambda_-^0 = \lambda_-(v_0, w_0) = \lambda_-(w_0, v_0) = \lambda_-(-v_0, -w_0) = \lambda_-(-w_0, -v_0) . \quad (3.93)$$

On verra par la suite que cette dégénérescence correspond à 4 expressions différentes pour la densité [cf. l'Eq. (3.99)]. Le lieu de l'espace des phases (v, w) décrit par la relation $\lambda_-(v, w) = \lambda_-^0$ correspond à deux arcs d'une ellipse représentés en bleus dans la figure 3.8 (l'ellipse entière étant obtenue en traçant le lieu décrit par $\lambda_+(v, w) = \lambda_-^0$ que l'on a représenté en rouge dans la Fig. 3.8).

^{14.} À noter que l'intégration des invariants de Riemann est directe en effectuant le changement de variables $v = \cos \varphi$ et $w = \cos \theta$.

FIGURE 3.8 – Représentation dans l'espace des phases (v, w) de l'onde simple $\lambda_- = \lambda_-^0 < 0$ pour $v_0 = 0.2$ et $w_0 = 0.7$. Le lieu décrit par (3.91) est représenté en trait plein bleu (—) et passe par 4 points respectant (3.93) représentés par des points bleus (•). Ces deux arcs d'ellipses sont complétés par $\lambda_+(v, w) = \lambda_-^0$ représentée dans cette figure par un trait rouge (—).



Remarque 3.8. On représentera souvent par la suite la solution du problème de Riemann dans l'espace des phases (v, w) . On appellera notamment $(v(z), w(z))$ la **trajectoire du système** (où z peut être considéré dans ce langage comme un paramètre *temporel*), et on fléchera la direction de la trajectoire dans le sens des z croissants. On verra que cette représentation de la solution du problème de Riemann sera particulièrement bien adaptée pour caractériser les différentes solutions en onde simple.

La solution (3.91) résout l'équation hydrodynamique (3.86a) et permet de simplifier l'équation hydrodynamique restante (3.86b) sous la forme d'une équation de conservation du courant $Q(\lambda_+)$ définie par :

$$\partial_\tau \lambda_+ + \partial_\zeta Q(\lambda_+) = 0 \quad \text{avec} \quad Q(\lambda_+) = \int d\lambda_+ V_+(\lambda_+, \lambda_-^0). \quad (3.94)$$

Cette équation standard peut être résolue à l'aide de la méthode des caractéristiques (cf. la Ref. [12]) où le champ λ_+ résout l'équation de conservation

$$\frac{d\lambda_+}{d\tau} = 0 \quad \text{pour} \quad \frac{d\zeta}{d\tau} = V_+(\lambda_+, \lambda_-^0). \quad (3.95)$$

On peut aussi écrire la solution sous la forme implicite suivante (cf. la Ref. [95]) :

$$\zeta(\tau) = V_+(\lambda_+^0, \lambda_-^0) t + \zeta_0 \quad \text{avec} \quad \lambda_+(\zeta_0, \tau = 0) \equiv \lambda_+^0. \quad (3.96)$$

et peut être représentée graphiquement en traçant simplement le graphe $(\zeta(\tau; \zeta_0), \lambda_+^0)$. La résolution est ici encore plus simple : puisque la condition initiale (3.79) ne contient aucune longueur caractéristique, la solution des équations de Riemann est **auto-similaire** et ne dépend que de la vitesse ζ/τ :

$$\boxed{\lambda_+(\zeta, \tau) = \lambda_+(z \equiv \zeta/\tau)} \quad (3.97)$$

Sous cette forme, l'équation de conservation (3.94) est résolue par la solution explicite :

$$z = V_+(\lambda_+(z), \lambda_-^0) = \frac{3}{2} \lambda_+(z) + \frac{1}{2} \lambda_-^0. \quad (3.98)$$

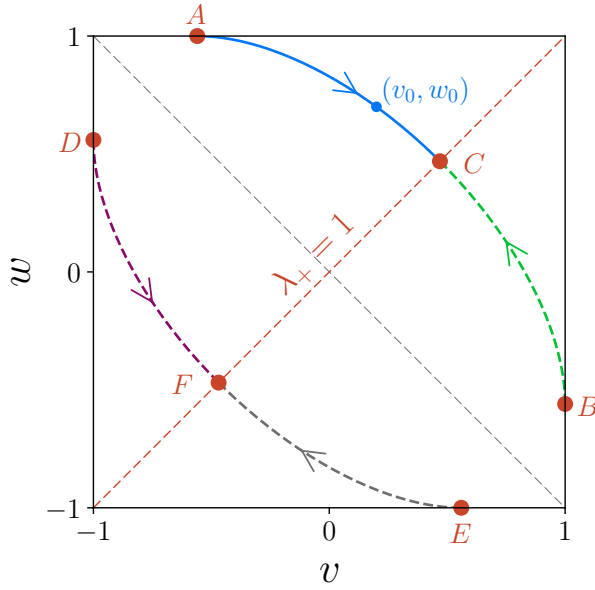


FIGURE 3.9 – Représentation dans l'espace des phases (v, w) du sens de variation de $\lambda_+(z)$ (v_0 et w_0 définis dans la Fig. 3.8). Les points (•) A, B, D et E représentent les minima de $\lambda_+(z)$: $\lambda_+ = \lambda_-^0$, et les points C et F les maxima $\lambda_+ = 1$. Le sens de variation $\lambda_+(z)$ est représenté par une flèche et la solution onde simple passant par (v_0, w_0) est représentée en trait plein bleu (—).

Les deux relations (3.91) et (3.98) peuvent ensuite être inversées au profit d'expressions explicites pour les champs *physiques* :

$$w(z) = \pm \sqrt{\frac{3 + 2\lambda_-^0 z - \lambda_-^0{}^2}{6}} \pm \frac{1}{3} \sqrt{(1 - \lambda_-^0{}^2)(z - \frac{1}{2}\lambda_-^0 + \frac{3}{2})(\frac{1}{2}\lambda_-^0 + \frac{3}{2} - z)}, \quad (3.99)$$

$$v(z) = \frac{\lambda_-^0 + z}{3w(z)}. \quad (3.100)$$

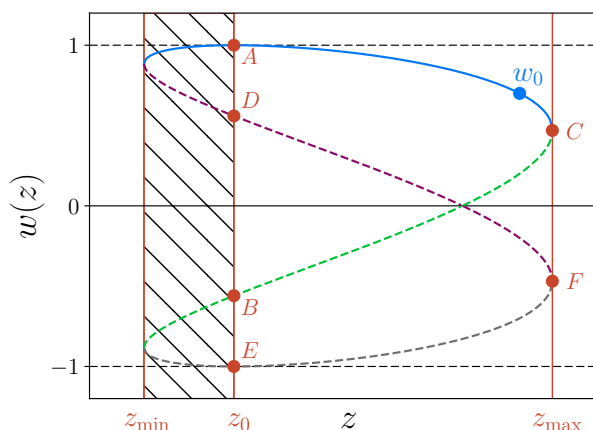
Bien qu'il y ait 4 expressions différentes pour $w(z)$ [cf. l'Eq. (3.99)], une seule de ces expressions décrit une trajectoire dans l'espace des phases passant par le point (v_0, w_0) ; les trois expressions restantes décrivent une trajectoire passant par (w_0, v_0) , $(-v_0, -w_0)$ et $(-w_0, -v_0)$, [cf. l'Eq. (3.93)].

On préfère dans un premier temps discuter cette solution à travers la variation beaucoup plus simple de l'invariant de Riemann $\lambda_+(z)$: d'après la solution auto-similaire (3.98), λ_+ est une fonction strictement croissante du paramètre z et varie entre $\lambda_+ = \lambda_-^0$ au minimum (par définition $\lambda_- \leq \lambda_+$) et $\lambda_+ = 1$ au maximum¹⁵. La limite inférieure est atteinte si $v = \pm 1$ ou $w = \pm 1$ (qui correspond au carré délimitant l'espace des phases (v, w) , cf. la Fig. 3.8) : pour s'en convaincre, il suffit de remarquer que si $w = 1$, par exemple, on a nécessairement $v = \lambda_-^0$ d'après la relation (3.91) et que par conséquent $\lambda_+(v, 1) = \lambda_-^0$. La limite supérieure quant à elle est atteinte pour $v = w$ (qui correspond à la diagonale dans l'espace des phases). On peut ainsi suivre aisément l'évolution du système dans l'espace des phases : le point $(v(z), w(z))$ parcourt les arcs d'ellipse décrits par $\lambda_-(v, w) = \lambda_-^0$ dans le sens où $\lambda_+(z)$ est croissant, c.à.d. des bords de l'espace des phases vers la diagonale $w = v$ (comme l'indique le sens des flèches dans la figure 3.9) ; par monotonie de la fonction $\lambda_+(z)$, la trajectoire du système décrit par une onde simple ne peut franchir la diagonale $w = v$ qui décrit le maximum de λ_+ (cf. la Fig. 3.9).

En résumé, à chaque solution en onde simple $\lambda_- = \lambda_-^0$ correspondent ainsi 4 trajectoires possibles dans l'espace des phases (représentées par les segments orientés : $A \rightarrow C$, $B \rightarrow C$, $D \rightarrow F$ et $E \rightarrow F$ dans la figure 3.9) décrites par une des expressions de (3.99).

15. Puisque $-1 \leq v, w \leq 1$, on a par définition (3.85) : $-1 \leq \lambda_{\pm} \leq 1$.

FIGURE 3.10 – Variation de la densité relative $w(z)$ correspondant aux solutions en onde simple décrites dans la figure 3.9. La solution passant par w_0 est représentée en trait plein bleu (—) et les autres solutions en pointillés (cf. la Fig. 3.9). A , B , D et E représentent les minima de $\lambda_+(z)$ et les points C et F les maxima. Bien que la solution en onde simple $\lambda_- = \lambda_-^0$ ne soit pas définies pour $z < z_0$, les expressions de la densité $w(z)$ [cf. l'Eq. (3.99)] sont bien définies pour $z \in [z_{\min}; z_0]$.



Puisque l'invariant de Riemann est compris entre $\lambda_+ = \lambda_-^0$ et $\lambda_+ = 1$, les expressions explicites de $w(z)$ et $v(z)$ sont définies, d'après la relation (3.98), entre :

$$z_0 \equiv 2\lambda_-^0 \quad \text{et} \quad z_{\max} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\lambda_-^0. \quad (3.101)$$

Le variation de la densité relative $w(z)$ pour les 4 trajectoires différentes de la figure 3.9 est représentée dans la figure 3.10; on a introduit dans cette figure la borne inférieure de $\lambda_+(z)$ non atteinte correspondant à $\lambda_+ = -1$:

$$z_{\min} = -\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\lambda_-^0. \quad (3.102)$$

Remarque 3.9. Par la suite on suppose que la solution en onde simple correspondant à $\lambda_- = \lambda_-^0$ ne décrit que l'arc d'ellipse passant par (v_0, w_0) et (w_0, v_0) , qui correspond dans la figure 3.9 à l'arc AB ; le point (v_0, w_0) par lequel passe l'arc d'ellipse pourra être déterminé à partir du contexte et sera précisé le cas échéant. En effet on s'intéresse ici aux solutions continues (v, w) de z : le passage d'un arc d'ellipse à l'autre induit une discontinuité soit de la vitesse relative v soit de la densité relative w et ne constitue pas une solution physique du système hydrodynamique (3.81). De plus, puisque le point C correspond au maximum de $\lambda_+(v, w)$, la trajectoire du système dans l'espace des phases ne peut appartenir qu'à l'un des deux segments : AC ou BC par monotonie de $\lambda_+(z)$ (comme le montre le sens des flèches dans la figure 3.9); chacun de ces segment appartient à un triangle particulier dans l'espace des phases (triangle supérieur pour AC et triangle droit pour BC , cf. la Fig. 3.9) délimité par la diagonale $w = v$ et l'anti-diagonale $w = -v$ et on parlera par la suite de **triangle de monotonie**. Ces différents triangles joueront un rôle important par la suite, notamment dans la classification des ondes de choc dispersives dans la Section 4.

ii. Onde simple $\lambda_+ = \text{cste}$

La majorité des résultats dérivés précédemment sont transposables à l'autre solution en onde simple :

$$\lambda_+(v, w) = vw + \sqrt{(1-v^2)(1-w^2)} = \lambda_+^0. \quad (3.103)$$

On présente ici les principaux résultats (notamment à l'aide des deux figures 3.11 et 3.12) et on indiquera les différences avec la solution $\lambda_- = \lambda_-^0$. De même que l'expression (3.91),

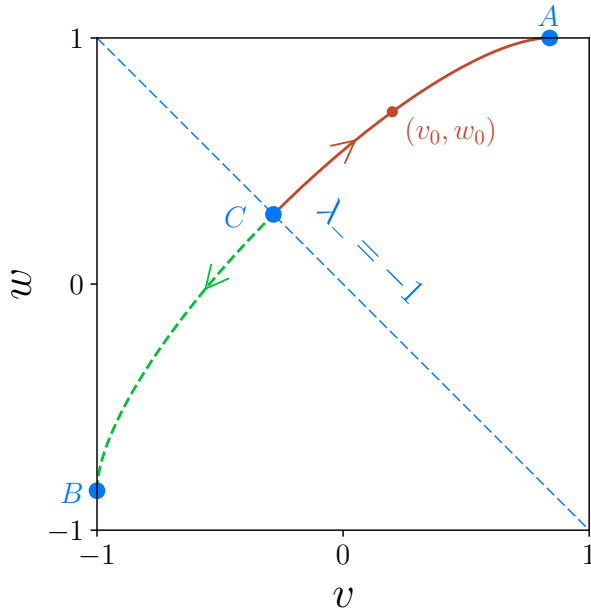


FIGURE 3.11 – Représentation dans l'espace des phases (v, w) du sens de variation de $\lambda_-(z)$ ($v_0 = 0.2$ et $w_0 = 0.7$). Les points (•) A et B représentent les maxima de $\lambda_-(z)$: $\lambda_- = \lambda_+^0$, et le point C le minimum $\lambda_- = -1$. Le sens de variation $\lambda_-(z)$ est représenté par une flèche et la solution onde simple passant par (v_0, w_0) est représentée en trait plein rouge (—).

le lieu décrit par $\lambda_+(v, w) = \lambda_+^0$ est composé de deux arcs d'ellipse (complétés par le lieu décrit par $\lambda_+(v, w) = \lambda_-^0$ comme le montre la Fig. 3.11). La solution auto-similaire de l'équation (3.86a) s'écrit :

$$z = V_- \left(\lambda_+^0, \lambda_-(z) \right) = \frac{3}{2} \lambda_-(z) + \frac{1}{2} \lambda_+^0. \quad (3.104)$$

Les deux relations (3.103) et (3.104) peuvent être inversées au profit d'expressions explicites pour $w(z)$ et $v(z)$: ces expressions correspondent aux solutions explicites définies précédemment (3.99) et (3.100) où l'on a remplacé λ_-^0 par λ_+^0 . $\lambda_-(z)$ est elle aussi une fonction strictement croissante de z et varie entre $\lambda_- = -1$ au minimum et $\lambda_- = \lambda_+^0$ au maximum. Au contraire de l'onde simple précédente, la limite inférieure est ici atteinte pour $w = -v$ (qui correspond à l'anti-diagonale dans l'espace des phases (v, w) , cf. la Fig. 3.11) et la limite supérieure est atteinte pour $v = \pm 1$ ou $w = \pm 1$. On peut de nouveau suivre l'évolution du système dans l'espace des phases : le point $(v(z), w(z))$ parcourt l'arc décrit par $\lambda_+(v, w) = \lambda_+^0$ dans le sens où $\lambda_-(z)$ est croissant, c.à.d. dans le cas présent de l'anti-diagonale vers les bords de l'espace des phases (correspondant aux sens $C \rightarrow A$ et $C \rightarrow B$ dans la figure 3.11) ; par monotonie de la fonction $\lambda_-(z)$, la trajectoire du système décrit par une onde simple ne peut franchir l'anti-diagonale $w = -v$ de l'espace des phases qui décrit le minimum de λ_- . De même que précédemment on représente la variation de la densité dans la figure 3.12 où on a introduit les bornes suivantes :

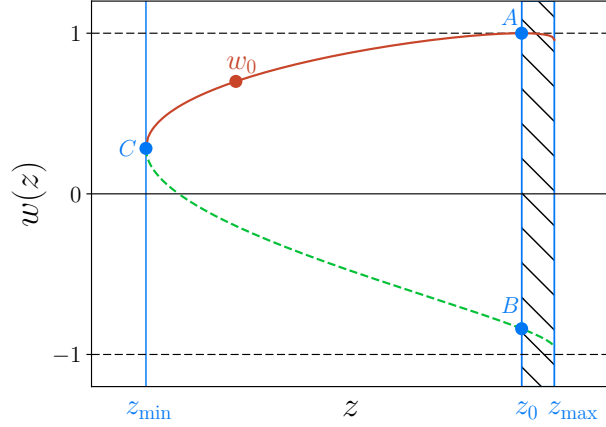
$$z_{\min} = -\frac{3}{2} + \frac{1}{2} \lambda_+^0, \quad z_0 \equiv 2 \lambda_-^0 \quad \text{et} \quad z_{\max} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \lambda_-^0, \quad (3.105)$$

où cette fois ci la solution n'est pas définie pour $z > z_0$ puisque l'invariant de Riemann $\lambda_-(z)$ est inférieur à λ_+^0 .

iii. Ondes de raréfaction

Il reste à relier la solution en onde simple aux quantités de la condition initiale (3.79). Puisque l'on considère ici une solution dépendant seulement du paramètre auto-similaire

FIGURE 3.12 – Variation de la densité relative $w(z)$ correspondant aux solutions onde simple décrites dans la figure 3.11. La solution passant par w_0 est représentée en trait plein rouge (—) et la solution passant par v_0 en pointillés verts (---). A et B représentent les maxima de $\lambda_-(z)$ et C le minimum. Bien que la solution onde simple $\lambda_+ = \lambda_+^0$ ne soit pas définie pour $z > z_0$, les expressions de la densité $w(z)$ [cf. l'Eq. (3.99) avec $\lambda_-^0 \rightarrow \lambda_+^0$] sont bien définies pour $z \in [z_0; z_{\max}]$.



$z = x/t$, la condition initiale (3.79) se réécrit sous la forme de condition aux limites :

$$(v, w) \xrightarrow{z \rightarrow -\infty} (v_G, w_G) \quad \text{et} \quad (v, w) \xrightarrow{z \rightarrow +\infty} (v_D, w_D), \quad (3.106)$$

qui s'écrit à l'aide des invariants de Riemann :

$$\lambda_{\pm}(z) \xrightarrow{z \rightarrow -\infty} \lambda_{\pm}^G \quad \text{et} \quad \lambda_{\pm}(z) \xrightarrow{z \rightarrow +\infty} \lambda_{\pm}^D, \quad (3.107)$$

où on a défini les quantités :

$$\lambda_{\pm}^G \equiv \lambda_{\pm}(v_G, w_G) \quad \text{et} \quad \lambda_{\pm}^D \equiv \lambda_{\pm}(v_D, w_D). \quad (3.108)$$

À titre d'exemple, on s'intéresse ici aux conditions aux limites pour lesquels $\lambda_- = \text{cste}$:

$$\lambda_-^G = \lambda_-^D. \quad (3.109)$$

Dans ce cas, la solution en onde simple définie dans la partie **i** avec $\lambda_-^0 = \lambda_-^G = \lambda_-^D$ est directement solution du problème de Riemann. L'invariant de Riemann $\lambda_+(z)$ relie alors le champ constant à gauche à la valeur λ_+^G et à droite à la valeur λ_+^D (cf. la Fig. 3.13), et correspond d'après les formules explicites (3.99) et (3.100) à une **onde de raréfaction** pour les champs $w(z)$ et $v(z)$ comme le montre la figure 3.14. Le raccordement entre la condition au limite à gauche λ_+^G (resp. à droite λ_+^D) se déplace à la vitesse :

$$z_G = V_+(v_G, w_G) \quad \text{et} \quad z_D = V_+(v_D, w_D). \quad (3.110)$$

Ce résultat est en accord avec le spectre des excitations déterminé précédemment [cf. l'Eq. (3.30)] : en effet la perturbation que constitue le raccordement entre $\lambda_+(z)$ et la solution constante λ_+^G (resp. λ_+^D) peut être traitée comme une perturbation de grande longueur d'onde et doit alors se déplacer d'après spectre des excitations à la vitesse $V_+(v_G, w_G)$ (resp. $V_+(v_D, w_D)$). Il est ici important de rappeler que d'après la caractéristique strictement croissant de la variation de $\lambda_+(z)$ [cf. l'Eq. (3.98)], les deux bornes (v_G, w_G) et (v_D, w_D) doivent :

- appartenir au même triangle de monotonie (cf. la Remarque 3.9) : si les deux bornes n'appartiennent pas au même triangle, le chemin parcouru dans l'espace des phases $(v(z), w(z))$ passera nécessairement par l'un des extrema de l'invariant $\lambda_+(z)$,

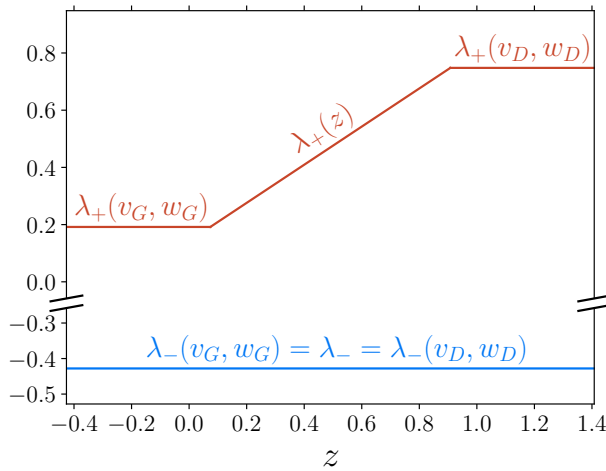


FIGURE 3.13 – Variation de l'invariant de Riemann $\lambda_+(z)$ en trait plein rouge (—) et de l'invariant $\lambda_-(z)$ en trait plein bleu (—) pour les conditions aux limites $(v_G, w_G) = (-0.12, 0.95)$ et $(v_D, w_D) = (0.2, 0.8)$ (ces conditions ont été choisies telles que $\lambda_- = \lambda_-^G = \lambda_-^D = -0.43$).

- être choisies telles que les limites λ_+^G et λ_+^D respectent

$$\boxed{\lambda_+^G \leq \lambda_+^D} \quad (3.111)$$

Cette dernière relation peut facilement être représentée dans l'espace des phases : une solution en onde simple $\lambda_- = \text{cste}$ (resp. $\lambda_+ = \text{cste}$) existe pour les conditions aux limites (v_G, w_G) et (v_D, w_D) si ces conditions sont bien placées dans le sens de croissance de $\lambda_+(z)$ (resp. $\lambda_-(z)$) c.à.d. dans le sens des flèches tracées dans la figure 3.9 (resp. 3.11).

Si la condition (3.111) n'est pas respectée, l'expression de $\lambda_+(z)$ décrit par (3.98) est multivaluée et la solution auto-similaire ne décrit plus une onde de raréfaction. Dans ce cas le problème de Riemann admet une solution discontinue en ζ (cf. e.g. la Ref. [12]) :

$$\lambda_+(\zeta, \tau) = \begin{cases} \lambda_+^G & \text{si } \zeta < \zeta_c(\tau), \\ \lambda_+^D & \text{sinon,} \end{cases} \quad (3.112)$$

où $\zeta_c(\tau)$ est la position de la discontinuité. Cette position est obtenue de façon standard en considérant la version *intégrale* de l'équation de conservation (3.94) au voisinage de la discontinuité ($\varepsilon \ll 1$) :

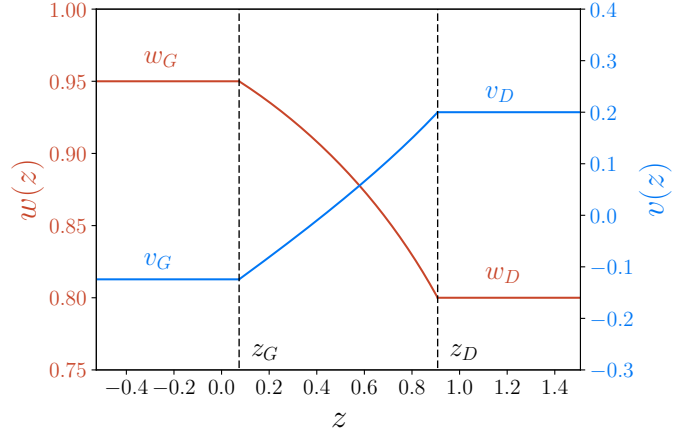
$$\frac{d}{d\tau} \left(\int_{\zeta_c - \varepsilon}^{\zeta_c + \varepsilon} \lambda_+ d\zeta \right) + [Q(\lambda_+)]_{\zeta_c - \varepsilon}^{\zeta_c + \varepsilon} = 0, \quad (3.113)$$

qui donne après passage à la limite $\varepsilon \rightarrow 0$ la **relation de Rankine-Hugoniot** :

$$\frac{d\zeta_c}{d\tau} = \frac{Q(\lambda_+^G) - Q(\lambda_+^D)}{\lambda_+^G - \lambda_+^D}. \quad (3.114)$$

Remarque 3.10. Bien que le choc classique décrit par les équations (3.112) et (3.114) soit solution du problème hydrodynamique, il ne constitue pas une solution du problème de Riemann avec dispersion. En effet, on verra dans la partie suivante que les termes dispersifs de l'équation (3.17) négligés dans le système hydrodynamique *régularise* la singularité décrite par l'expression (3.112) et qu'il existe bien une solution continue au problème de Riemann associé.

FIGURE 3.14 – Variation du champs de densité $w(z)$ en trait plein rouge (—) et de vitesse $v(z)$ en trait plein bleu (—) pour les conditions aux limites considérées dans la Fig. 3.13. Bien qu'un seul invariant de Riemann varie dans la situation représentée dans la Fig. 3.13, les deux champs physiques $w(z)$ et $v(z)$ varient selon z .



iv. Formation d'un plateau

Bien que l'égalité (3.109) ne soit pas toujours respectée, la solution décrite précédemment constitue ce qu'on appellera par la suite un des **blocs élémentaires** de la solution du problème de Riemann général. On verra dans la partie suivante que la séparation de la solution en différents blocs élémentaires du type $\lambda_- = \text{cste}$ (ou $\lambda_+ = \text{cste}$) est systématique et va au-delà de l'approche non-dispersive.

À titre d'exemple on considère le cas plus général :

$$\lambda_-^G \leq \lambda_-^D \quad \text{et} \quad \lambda_+^G \leq \lambda_+^D. \quad (3.115)$$

Bien que les variations de $\lambda_+(z)$ et $\lambda_-(z)$ ne puissent être décrites à l'aide d'une seule solution en onde simple $\lambda_- = \text{cste}$ ou $\lambda_+ = \text{cste}$, la solution peut être séparée en blocs élémentaires de la façon suivante (cf. la Fig. 3.15) :

- une onde simple $\lambda_+ = \lambda_+^G$ pour $z \in [z_G, z_{0G}]$ déterminée par la limite à gauche,
- un plateau intermédiaire où les deux invariants de Riemann sont constants $\lambda_+ = \lambda_+^G$ et $\lambda_- = \lambda_-^D$ pour $z \in [z_{0G}, z_{0D}]$,
- une onde simple $\lambda_- = \lambda_-^D$ pour $z \in [z_{0G}, z_D]$ déterminée par la limite à droite,

où les constantes z_G , z_{0G} , z_{0D} et z_D sont définies de façon adéquate suivant les formules (3.98) et (3.104). L'ordre des ondes simples ($\lambda_+ = \text{cste}$ à gauche et $\lambda_- = \text{cste}$ à droite) est justifié ici par l'inégalité entre les vitesses (cf. la variation des invariants de Riemann dans la figure 3.15) :

$$z_{0G} \equiv V_-(\lambda_-^D, \lambda_+^G) \leq z_{0D} \equiv V_+(\lambda_-^D, \lambda_+^G). \quad (3.116)$$

La constance des deux invariants de Riemann entre z_{0G} et z_{0D} se traduit par la formation d'un plateau de densité relative w_0 et de vitesse relative v_0 définis par les équations :

$$\lambda_+^G = v_G w_G + \sqrt{(1 - v_G^2)(1 - w_G^2)} = v_0 w_0 + \sqrt{(1 - v_0^2)(1 - w_0^2)}, \quad (3.117)$$

$$\lambda_-^D = v_D w_D - \sqrt{(1 - v_D^2)(1 - w_D^2)} = v_0 w_0 - \sqrt{(1 - v_0^2)(1 - w_0^2)}. \quad (3.118)$$

On peut suivre la trajectoire du système décrite par cette *solution par blocs* dans l'espace des phases dans la figure 3.16 : la trajectoire caractérisée par l'onde simple $\lambda_+ = \lambda_+^G$ gauche est représentée par un arc rouge et la trajectoire caractérisée par l'onde simple $\lambda_- = \lambda_-^D$ droite est représentée par un arc bleu ; ces deux arcs s'intersectent au point (v_0, w_0) correspondant à un plateau. La variation de la densité relative $w(z)$ correspondante est représentée dans la figure 3.17.

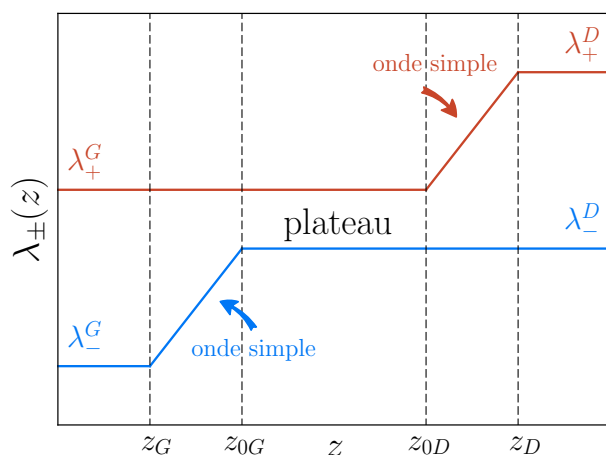


FIGURE 3.15 – Représentation des invariants de Riemann pour la situation décrite par (3.115). La variation de $\lambda_-(z)$ est représentée en trait plein bleu (—) et la variation de $\lambda_+(z)$ en trait plein rouge (—).

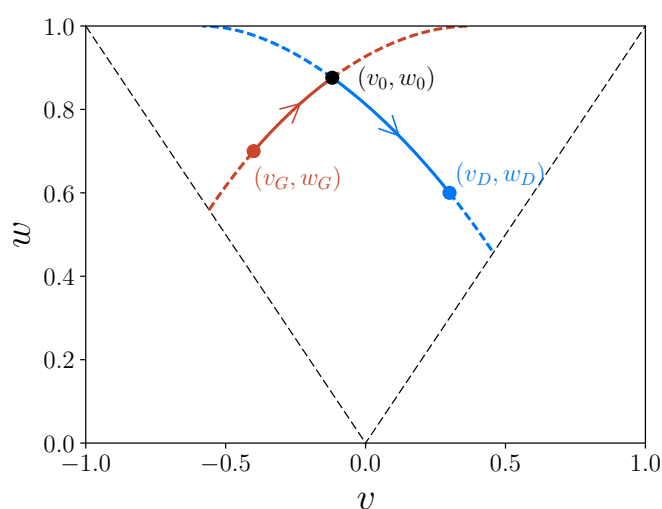


FIGURE 3.16 – Représentation dans l'espace des phases de la situation correspondant aux conditions aux bords (3.115) (et la figure 3.15) avec les conditions aux limites : $(v_G, w_G) = (-0.4, 0.7)$ et $(v_D, w_D) = (0.3, 0.6)$; on a d'après (3.117) la formation d'un plateau décrit par $(v_0, w_0) = (-0.12, 0.88)$. L'onde simple $\lambda_+ = \lambda_+^G$ est représentée en trait plein rouge (—) et l'onde simple $\lambda_- = \lambda_-^D$ en trait plein bleu (—).

4. Ondes de choc dispersives

Comme il a été indiqué dans la partie précédente, l'approche sans dispersion du problème de Riemann peut développer des singularités [cf. e.g. l'Eq. (3.112)] dans le cas où la croissance stricte d'un des deux invariants de Riemann hydrodynamique $\lambda_{\pm}(z)$ n'est pas respectée :

$$\lambda_{\pm}^G > \lambda_{\pm}^D . \quad (3.119)$$

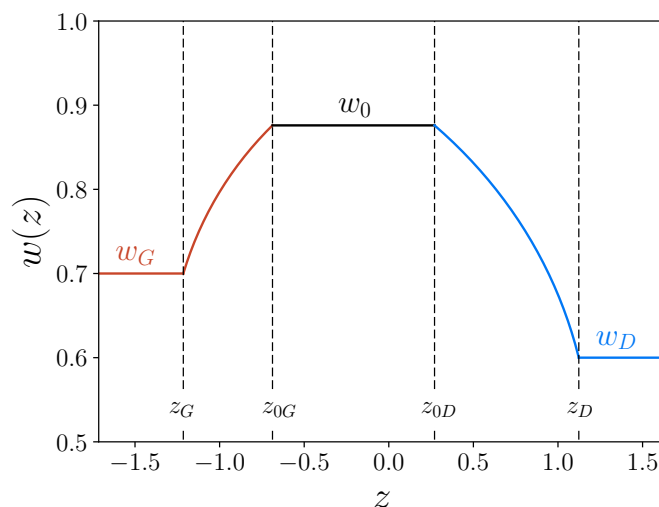
La description hydrodynamique n'est alors plus adéquate et il est nécessaire de prendre en compte les effets dispersifs afin résoudre le problème de Riemann. En présence de dispersion la vitesse de groupe $\omega'(k)$ [cf. l'Eq. (3.30)] est dépendante de k au contraire des vitesses V_{\pm} et il est devenu possible de déterminer des solutions au problème de Riemann telles que les raccordements à gauche (de vitesse z_G) et à droite (de vitesse z_D) respectent bien la condition :

$$z_G < z_D , \quad (3.120)$$

même dans le cas où les conditions aux limites vérifient (3.119). Parmi ces solutions régulières (cf. la Remarque 3.10) on va étudier dans cette partie les **ondes de choc dispersives ou DSW**¹⁶. Les DSWs décrivent à l'une de leur extrémité la propagation

16. On utilise par la suite cette abréviation provenant du terme anglais : *Dispersive Shock-Wave*.

FIGURE 3.17 – Variation de la densité relative pour la situation exposée dans la figure 3.16. Les ondes simples $\lambda_+ = \lambda_+^G$ et $\lambda_- = \lambda_-^D$ correspondent à des ondes de raréfaction représentées en trait plein rouge (—) et en trait plein bleu (—) respectivement. Le plateau représenté par un point noir dans l'espace des phases (cf. la Fig. 3.16) correspond bien la constance du champ $w(z) = w_0$ entre les deux vitesses z_{0G} et z_{0D} représentée ici en trait plein noir (—).



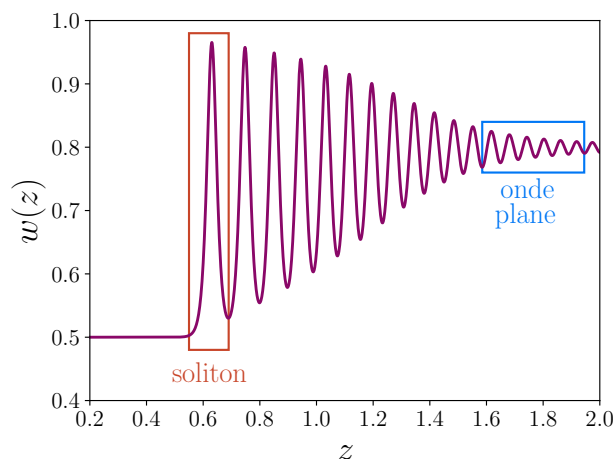
d'une onde plane de vitesse de groupe $\omega'(k)$ et à l'autre extrémité la propagation d'un soliton de vitesse V_s , comme le montre la figure 3.18 de telle façon que ces vitesses respectent bien la condition (3.120). La description des limites harmoniques et solitoniques de la DSW peut être systématisée (cf. l'Article 2 utilisant la méthode développée par G. El dans [155]), mais il est possible dans le cas où le système est intégrable de déterminer la solution dans toute son extension. En effet, dans cette partie on va montrer que la DSW peut être représentée par la modulation des paramètres d'une onde cnoïdale (3.65) qui possède bien pour :

- $m = 0$ une limite harmonique [cf. l'Eq. (3.70)],
- $m = 1$ une limite solitonique [cf. l'Eq. (3.72)].

4.a. Théorie de Whitham

La théorie pour décrire les ondes de choc dispersives par la modulation d'ondes périodiques a été développée initialement par G. Whitham [154], puis effectivement utilisée en 1974 par A. Gurevich et L. Pitaevskii [158] afin de résoudre le problème de Riemann constitué des équations de Korteweg-de Vries et d'une condition initiale semblable à celle définie par l'équation (3.79). La théorie de modulation développée par G. Whitham

FIGURE 3.18 – Anatomie d'une onde de choc dispersive se propageant à travers la densité relative $w(z)$. Dans le cas général, l'onde de choc est décrit à ses extrémités par la propagation d'un soliton (ici à gauche) et la propagation d'une onde plane (ici à droite). La théorie de Whitham permettra de décrire entièrement l'amplitude des oscillations, cf. la Fig. 3.20.



propose de représenter la structure oscillante observée dans la figure 3.18 par une onde périodique dont les paramètres tels que l'amplitude, le nombre d'onde, etc sont lentement modulés selon une période d'oscillation. Dans le cas présent, les ondes périodiques correspondent aux ondes cnoïdales (3.66) de période (3.68) et les paramètres de l'onde sont décrits par les racines du polynôme $\mathcal{R}(w)$ (cf. la Section 2.b). La dynamique lente de ces paramètres est alors obtenue en moyennant les **équations de conservation** du système sur une période d'oscillation ; les équations de modulation résultantes sur les paramètres $w_i(\zeta, \tau)$ sont appelées les **équations de Whitham**.

i. Équations de Whitham

On propose dans un premier temps une dérivation *schématique* des équations de Whitham (cf. la dérivation proposée dans la Ref. [159]). Supposons dans un premier temps que l'on puisse dériver à partir des équations de Landau-Lifshitz 4 équations de conservation s'écrivant sous la forme¹⁷ :

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \mathcal{P}_i(v, w) + \frac{\partial}{\partial \zeta} \mathcal{Q}_i(v, w) = 0, \quad i \in [1..4], \quad (3.121)$$

où $\mathcal{P}_i(v, w)$ sont les quantités conservées et $\mathcal{Q}_i(v, w)$ les flux associés ; les ondes cnoïdales $(\mathcal{V}, \mathcal{W})$ dérivées précédemment (3.66) sont par définition solutions de ces équations. En supposant que les paramètres w_i de l'onde peuvent varier et sont **lentement** modulés selon une période d'oscillation :

$$\partial_\zeta w_i \ll w_i/L \quad \text{et} \quad \partial_\tau w_i \ll w_i/T, \quad (3.122)$$

on obtient après moyennage des équations de conservation (3.121) sur une période d'oscillation L , les **équations de Whitham** :

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \overline{\mathcal{P}_i[\mathcal{V}, \mathcal{W}]} + \frac{\partial}{\partial \zeta} \overline{\mathcal{Q}_i[\mathcal{V}, \mathcal{W}]} = 0 \quad \text{avec} \quad \overline{\mathcal{F}[\mathcal{V}, \mathcal{W}]} = \frac{1}{L} \int_0^L d\xi \mathcal{F}(\mathcal{V}(\xi), \mathcal{W}(\xi)), \quad (3.123)$$

où $\xi \equiv \zeta - V(w_i)\tau$ est la phase de l'onde cnoïdale [cf. l'Eq. (3.54)]. Après intégration, les quantités $\overline{\mathcal{P}_i}$ et $\overline{\mathcal{Q}_i}$ dépendent seulement des paramètres w_i et les équations (3.123) constituent alors un **système hydrodynamique fermé** pour les 4 champs $w_i(\zeta, \tau)$. Puisque le système (3.26), on peut introduire de manière similaire à l'approche développée pour le cas sans dispersion, 4 invariants de Riemann et les 4 vitesses caractéristiques associées afin de diagonaliser (3.123) et de décrire la variation des paramètres $w_i(\zeta, \tau)$ le long de la DSW.

Remarque 3.11. Cette description est proche de celle développée précédemment pour étudier la modulation d'un paquet d'onde de polarisation (cf. la Section 2.b), et les équations de Whitham (3.123) peuvent être dérivées à partir des équations de la dynamique (3.26) à l'aide d'une analyse multi-échelle (cf. la méthode présentée dans les Refs. [160, 161]). Cependant, au contraire de l'équation NLS (2.97) dérivée dans le Chapitre 2 :

- la dérivation des équations (3.123) n'est pas limitée aux faibles amplitudes : le *petit paramètre* de la méthode multi-échelle utilisée pour dériver les équations de Whitham est simplement déterminé par la *lente variation* des paramètres,

17. On privilégiera ici la description du système par les deux champs v et w (de façon similaire à la partie 3).

- les équations de Whitham sont des équations hydrodynamiques et ne décrivent pas les effets de la dispersion sur la modulation des paramètres w_i pour des temps $\tau \sim \tau_2$ (en reprenant les notations introduites par la hiérarchie (2.31)).

Il n'est cependant pas tout le temps possible de négliger les effets dispersifs dans les équations de modulation, notamment dans le cas où l'une des vitesses caractéristiques s'annule (cf. e.g. la Ref. [162]).

ii. Système intégrable

La détermination des équations de conservation (3.121) peut être laborieuse dans le cas d'un système quelconque. Dans le cas où le système est intégrable il existe une infinité d'équations de conservation, et il a été montré par A. M. Kamchatnov que dans le cas où l'on dispose de la paire de Lax du système dynamique [cf. les Eqs. (3.33) et (3.34)], on peut dériver une **équation génératrice** de ces équations de conservation. En reprenant le résultat dérivé dans la référence [132] pour les équations appartenant à la hiérarchie AKNS, on peut écrire directement que :

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial \tau} \left(\sqrt{P(\lambda)} \frac{G}{g} \right) - \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\sqrt{P(\lambda)} \frac{B}{g} \right) = 0} \quad (3.124)$$

où G et B sont les coefficients des paires de Lax définies par (3.35b) et (3.35e) respectivement, g la *squared basis function* définie par (3.44) et $P(\lambda)$ le polynôme défini par (3.41). Les trois fonctions G , B et g dépendent explicitement des champs $v(\zeta, \tau)$ et $w(\zeta, \tau)$ ainsi que du paramètre spectral constant λ , et l'équation de conservation (3.124) fournit après développement selon λ^{-1} **une infinité d'équations de conservation**. Il n'est cependant pas nécessaire de développer l'équation génératrice (3.124) afin de dériver les équations moyennées de Whitham, et on va suivre ici la dérivation générale effectuée dans [132]. En substituant g par (3.44), G par (3.35b) et B par (3.35e), l'équation de conservation génératrice (3.124) se simplifie¹⁸ et peut être exprimée uniquement à l'aide du paramètre spectral λ et du champ $\mu(\zeta, \tau)$:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\sqrt{P(\lambda)}}{\lambda - \mu} \right) + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\sqrt{P(\lambda)} \left[1 + \frac{s_1}{2(\lambda - \mu)} \right] \right) = 0. \quad (3.125)$$

Afin de moyenniser l'équation génératrice (3.125), on utilise la propriété suivante : quand la densité relative oscille entre deux racines w_3 et w_4 (w_1 et w_2), la variable $\mu(\zeta, \tau)$ parcourt dans le plan complexe un contour fermé (cf. l'Eq. (3.50) et la Ref. [163]), et on peut écrire à l'aide de l'équation (3.57) :

$$L = \int_0^G d\xi = 2 \int_{w_3}^{w_4} \frac{dw}{\sqrt{-\mathcal{R}(w)}} = \oint \frac{i d\mu}{\sqrt{P(\mu)}}. \quad (3.126)$$

Remarque 3.12. Comme à la section 2.b, on peut évaluer l'intégrale (3.126), et on obtient alors :

$$L = \frac{4K(m)}{\sqrt{(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_4 - \lambda_2)}} \quad \text{avec} \quad m = \frac{(\lambda_4 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_1)}{(\lambda_4 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_1)}. \quad (3.127)$$

18. La substitution de B par (3.35e) est plus délicate que les deux précédentes et il faut au préalable simplifier l'expression (3.35e) en substituant $\partial_\zeta M_-$ par (3.52) et $\partial_\zeta M_z$ par (3.53) en utilisant la relation (3.50).

En comparant ainsi les deux expressions de la période (3.68) et (3.127) on obtient la relation suivante entre λ_i et w_i :

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{(\lambda_4 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_1)}{(\lambda_4 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_1)} &= \frac{(w_4 - w_3)(w_2 - w_1)}{(w_4 - w_2)(w_3 - w_1)} \\ (\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_4 - \lambda_2) &= (w_3 - w_1)(w_4 - w_2) \end{aligned}} \quad (3.128)$$

$$(3.129)$$

Le moyennage de l'équation génératrice s'écrit alors simplement :

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\sqrt{P(\lambda)}}{L} \oint \frac{i d\mu}{(\lambda - \mu)\sqrt{P(\mu)}} \right) + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{\sqrt{P(\lambda)}}{L} \oint \left[1 + \frac{s_1}{2(\lambda - \mu)} \right] \frac{i d\mu}{\sqrt{P(\mu)}} \right) = 0. \quad (3.130)$$

Les composantes moyennées s'expriment explicitement en fonction des racines λ_i qui sont reliées aux paramètres w_i avec la relation (3.51) et constituent bien ainsi une équation de modulation sur les paramètres des ondes cnoïdales. En posant :

$$K(\lambda) \equiv \frac{1}{L} \oint \frac{i d\mu}{(\lambda - \mu)\sqrt{P(\mu)}} \xrightarrow{\lambda \rightarrow \lambda_i} -2 \frac{\partial L}{\partial \lambda_i}, \quad (3.131)$$

l'équation (3.125) s'écrit après dérivation¹⁹ :

$$\sqrt{P(\lambda)} \frac{\partial}{\partial \tau} K(\lambda) + \frac{K(\lambda)}{2} \sum_{i=1}^4 \frac{\partial_{\lambda_i} P(\lambda)}{\sqrt{P(\lambda)}} \frac{\partial \lambda_i}{\partial \tau} \quad (3.132)$$

$$+ \sqrt{P(\lambda)} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{s_1}{2} K(\lambda) \right) + \left(1 + \frac{s_1}{2} K(\lambda) \right) \sum_{i=1}^4 \frac{\partial_{\lambda_i} P(\lambda)}{\sqrt{P(\lambda)}} \frac{\partial \lambda_i}{\partial \zeta} = 0. \quad (3.133)$$

En passant à la limite $\lambda \rightarrow \lambda_i$, les termes proportionnelles à $\sqrt{\lambda - \lambda_i}$ s'annulent et on obtient :

$$\boxed{\frac{\partial \lambda_i}{\partial \tau} + v_i \frac{\partial \lambda_i}{\partial \zeta} = 0 \quad \text{avec} \quad v_i = \frac{s_1}{2} - \frac{1}{2\partial_{\lambda_i} L}} \quad (3.134)$$

Les vitesses caractéristiques v_i se simplifient en utilisant l'expression (3.127) pour L et les propriétés de l'intégrale elliptique de première espèce $K(m)$ (cf. la Ref. [152]) :

$$v_1 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 \lambda_i - \frac{(\lambda_4 - \lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_1)K(m)}{(\lambda_4 - \lambda_1)K(m) - (\lambda_4 - \lambda_2)E(m)}, \quad (3.135)$$

$$v_2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 \lambda_i + \frac{(\lambda_3 - \lambda_2)(\lambda_2 - \lambda_1)K(m)}{(\lambda_3 - \lambda_2)K(m) - (\lambda_3 - \lambda_1)E(m)}, \quad (3.136)$$

$$v_3 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 \lambda_i - \frac{(\lambda_4 - \lambda_3)(\lambda_3 - \lambda_2)K(m)}{(\lambda_3 - \lambda_2)K(m) - (\lambda_4 - \lambda_2)E(m)}, \quad (3.137)$$

$$v_4 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 \lambda_i + \frac{(\lambda_4 - \lambda_2)(\lambda_4 - \lambda_1)K(m)}{(\lambda_4 - \lambda_1)K(m) - (\lambda_3 - \lambda_1)E(m)}, \quad (3.138)$$

où $E(m)$ représente l'intégrale elliptique de deuxième espèce. Il est remarquable que les équations (3.134) régissant la modulation des paramètres de l'onde cnoïdale soient exprimées directement sous leur forme diagonale. Cette propriété remarquable est un tour de force de l'intégration *finite-gap* : au même titre que l'approche hydrodynamique où on

19. Seules les racines $\lambda_i = \lambda_i(\zeta, \tau)$ peuvent varier dans les équations de modulation.

avait introduit les variables $\lambda_{\pm}(v, w)$ [cf. l'Eq. (3.85)] pour diagonaliser le système hydrodynamique (3.81), l'introduction du champ complexe $\mu(v, w)$ dans l'intégration *finite-gap* [cf. l'Eq. (3.50)] *diagonalise* les équations de modulations des paramètres de l'onde cnoïdale w_i . On appellera par la suite les racines λ_i de $P(\lambda)$ les **invariants de Riemann** des équations de modulation à cause de la similarité des équations (3.134) avec les équations (3.86) qui décrivent la dynamique des invariants de Riemann usuels dans la limite sans dispersion.

iii. Liens entre les paramètres w_i et les invariants λ_i

Les paramètres de l'onde cnoïdale w_i sont reliées aux invariants de Riemann λ_i par définition de la résolvante (3.51) et on peut montrer qu'ils sont décrits par les 4 relations (cf. l'Article 4) :

$$w_i = -\frac{1}{2f_1} \frac{(\lambda_3 - \lambda_2)\tilde{\lambda}_1 \pm_1 [(\lambda_3 - \lambda_1)\tilde{\lambda}_2 \pm_2 (\lambda_2 - \lambda_1)\tilde{\lambda}_3]}{(\lambda_3 - \lambda_2)\lambda'_1 \pm_1 [(\lambda_3 - \lambda_1)\lambda'_2 \pm_2 (\lambda_2 - \lambda_1)\lambda'_3]} \quad (3.139)$$

où on a introduit les quantités :

$$\lambda'_i = \sqrt{1 - \lambda_i^2} \quad \text{et} \quad \tilde{\lambda}_i = (s_1 + s_3 - 2f_1^2 \lambda_i) / \lambda'_i. \quad (3.140)$$

Les paramètres de l'onde cnoïdale w_i sont bien définis ssi :

$$-1 \leq \lambda_i \leq 1. \quad (3.141)$$

Remarque 3.13. Les relations (3.139) entre les paramètres w_i et les invariants λ_i n'est pas bijective. En effet la relation (3.139) dépend ici explicitement de f_1 qui s'écrit de 4 façons différentes²⁰ :

$$f_1 = \pm \sqrt{(1 + s_2 + s_4 + \lambda'_1 \lambda'_2 \lambda'_3 \lambda'_4) / 2}, \quad (3.142a)$$

$$f_1 = \pm \operatorname{sgn}(s_1 + s_3) \sqrt{(1 + s_2 + s_4 - \lambda'_1 \lambda'_2 \lambda'_3 \lambda'_4) / 2}. \quad (3.142b)$$

À chaque quadruplet d'invariants $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$ correspond alors 4 quadruplets de paramètres (w_1, w_2, w_3, w_4) différents. Cette dégénérescence entre les invariants de Riemann $\lambda_i(\zeta, \tau)$ et les champs $w_i(\zeta, \tau)$ est similaire à celle évoquée dans le cas sans dispersion où l'onde de raréfaction pouvait s'écrire de 4 façons différentes [cf. l'Eq. (3.99)]. Cette dégénérescence est levée une fois les conditions aux limites de la DSW déterminées.

4.b. Solution en onde simple

De façon similaire à l'approche sans dispersion, on s'intéresse dans un premier temps à la solution en onde simple des équations de Riemann (3.134). Dans cette solution **un seul invariant de Riemann** λ_i parmi les quatre peut varier et on étudiera à titre d'exemple la variation de l'invariant λ_3 . Puisque l'on souhaite résoudre le problème de Riemann de condition initiale (3.79), la variation de $\lambda_3(\zeta, \tau)$ est auto-similaire et l'onde simple est décrite par les 4 invariants de Riemann :

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_4 = \text{cstes} \quad \text{et} \quad \lambda_3(\zeta, \tau) = \lambda_3(z \equiv \zeta/\tau), \quad (3.143)$$

20. f_1 est racine de l'équation polynomiale de degré 4 (3.49).

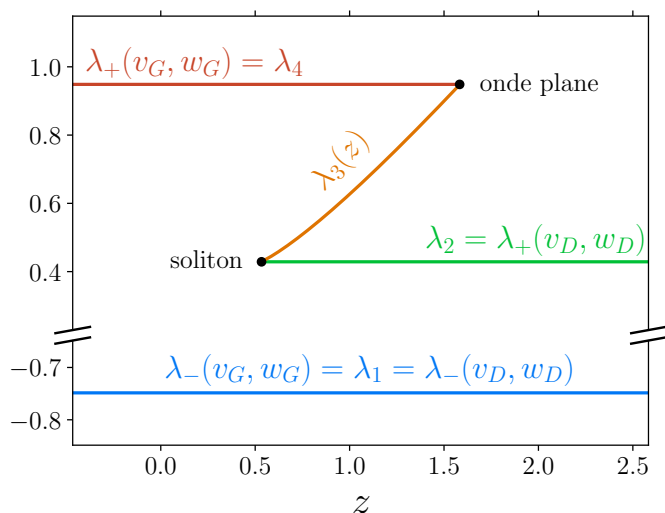


FIGURE 3.19 – Représentation des invariants de Riemann λ_i pour la solution en onde simple décrite par (3.143) avec $(v_G, w_G) = (0.2, 0.5)$ et $(v_D, w_D) = (-0.2, 0.8)$. Les valeurs de λ_1 (—) et λ_4 (—) ont été déterminées à l'aide de la limite solitonique (cf. la Section i); λ_1 et λ_2 (—) ont été déterminées à l'aide de la limite harmonique (cf. la Section ii).

où la variation de $\lambda_3(z)$ est obtenue de façon implicite par l'égalité :

$$v_3(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3(z), \lambda_4) = z. \quad (3.144)$$

On peut vérifier que v_3 est une fonction strictement croissante de λ_3 pour $\lambda_3(z) \in [\lambda_2; \lambda_4]$ (cf. l'Article 4). Grâce à la stricte monotonie de $v_3(\lambda_3)$, il n'est pas nécessaire d'inverser l'équation (3.144) pour obtenir la variation de λ_3 par rapport à z et il suffit pour représenter cette variation d'étudier la courbe paramétrique $(z = v_3(\lambda_3), \lambda_3)$ [cf. par exemple la figure 3.19]. Il reste à déterminer ce que représente la modulation décrite par la variation de $\lambda_3(z)$, ainsi que les valeurs des invariants constants λ_1 , λ_2 et λ_4 à l'aide des conditions aux limites (3.106). À titre d'exemple, on suppose par la suite que les conditions aux limites sont choisies telles que :

$$w_G < w_D, \quad (3.145)$$

et que par conséquent l'onde modulée est représentée par l'onde cnoïdale : $w(z) = \mathcal{W}_{34}(z)$ ²¹.

i. Limite solitonique ($\lambda_3 \rightarrow \lambda_2$)

L'onde cnoïdale $\mathcal{W}_{34}(z)$ modulée est bien solution du problème de Riemann si elle peut être raccordée aux limites (v_G, w_G) à gauche et (v_D, w_D) à droite. Dans un premier temps on montre que la limite $\lambda_3 \rightarrow \lambda_2$ permet de relier $\mathcal{W}_{34}(z)$ à la limite $w = w_G$. Il est important de souligner ici que puisque $\lambda_3(z)$ est une fonction strictement croissante de z , et que $\lambda_2 \leq \lambda_3$, la limite $\lambda_3 \rightarrow \lambda_2$ correspond bien à **l'extrémité gauche** de l'onde modulée comme le montre la variation des invariants de Riemann dans la figure 3.19. Dans la partie suivante on verra que, puisque $\lambda_4 \geq \lambda_3$, la limite $\lambda_3 \rightarrow \lambda_4$ quant à elle à **l'extrémité droite** de l'onde cnoïdale.

En prenant la limite $\lambda_3 \rightarrow \lambda_2$ des expressions (3.139), les relations entre les paramètres

21. Le choix de la forme de l'onde cnoïdale \mathcal{W}_{34} est aussi déterminé par le choix de l'invariant de Riemann non constant (ici $\lambda_3(z)$). Les différents cas sont récapitulés à la fin de cette analyse dans le tableau 3.1.

w_i et les invariants de Riemann λ_i se simplifient :

$$w_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1 + (2\lambda_2^2 - 1)(\lambda_1\lambda_4 + \lambda_1'\lambda_4') - 2\lambda_2\lambda_2'(\lambda_1\lambda_4' - \lambda_1'\lambda_4)} \quad (3.146a)$$

$$w_2 = w_3 = -\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1 + \lambda_1\lambda_4 - \lambda_1'\lambda_4'} \quad (3.146b)$$

$$w_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1 + (2\lambda_2^2 - 1)(\lambda_1\lambda_4 + \lambda_1'\lambda_4') + 2\lambda_2\lambda_2'(\lambda_1\lambda_4' - \lambda_1'\lambda_4)} \quad (3.146c)$$

où $\lambda_i' = \sqrt{1 - \lambda_i^2}$. La limite $w_3 = w_2$ de l'onde cnoïdale \mathcal{W}_{34} correspond au **soliton brillant** (cf. discussion dans la Section 2.b). Le soliton, et par conséquent la DSW, peut être raccordée pour $\zeta \rightarrow -\infty$ à la solution constante $w(z) = w_G$ (et $v(z) = v_G$). Les paramètres w_1, w_2 et w_4 peuvent être reliés aux valeurs limites (v_G, w_G) et à la vitesse du soliton z_{sol} en utilisant l'expression (3.74) :

$$w_2 = w_G \quad \text{et} \quad w_{1,4} = v_G(z_{\text{sol}} - v_G w_G) \pm \sqrt{(1 - v_G^2)[1 - (z_{\text{sol}} - v_G w_G)^2]} \quad (3.147)$$

Ce raccordement avec la condition aux limites gauche associé avec les relations (3.146) permet alors de déterminer les valeurs des invariants de Riemann constants :

$$\lambda_1 = \lambda_-(v_G, w_G) = v_G w_G - \sqrt{(1 - v_G^2)(1 - w_G^2)} \quad (3.148a)$$

$$\lambda_2 = z_{\text{sol}} - 2v_G w_G \quad (3.148b)$$

$$\lambda_4 = \lambda_+(v_G, w_G) = v_G w_G + \sqrt{(1 - v_G^2)(1 - w_G^2)} \quad (3.148c)$$

où $\lambda_{\pm}(v, w)$ correspondent aux invariants *hydrodynamiques* définis précédemment par l'équation (3.85). On remarque ici que la vitesse du soliton z_{sol} obtenue à partir de (3.148) est en parfait accord avec la vitesse obtenue à partir de la limite $\lambda_3 \rightarrow \lambda_2$:

$$z_{\text{sol}} = v_3(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \rightarrow \lambda_2, \lambda_4) = \lambda_2 + \frac{\lambda_1 + \lambda_4}{2} \quad (3.149)$$

La limite $\lambda_3 \rightarrow \lambda_2$ permet ainsi de raccorder la DSW avec les conditions aux limites gauches fixant ainsi les valeurs des invariants λ_1 et λ_4 . Il reste maintenant à raccorder l'onde cnoïdale modulée à la condition aux limites droite et déterminer la valeur de l'invariant de Riemann constant λ_2 .

ii. Limite harmonique ($\lambda_3 \rightarrow \lambda_4$)

En considérant la limite $\lambda_3 \rightarrow \lambda_4$ (valeur maximale de $\lambda_3(z)$, cf. la Fig. 3.19), les relations (3.139) se simplifient et on montre que les paramètres de l'onde cnoïdale s'écrivent :

$$w_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1 + (2\lambda_4^2 - 1)(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1'\lambda_2') + 2\lambda_4\lambda_4'(\lambda_1\lambda_2' - \lambda_1'\lambda_2)} \quad (3.150a)$$

$$w_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1 + (2\lambda_4^2 - 1)(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1'\lambda_2') - 2\lambda_4\lambda_4'(\lambda_1\lambda_2' - \lambda_1'\lambda_2)} \quad (3.150b)$$

$$w_3 = w_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1 + \lambda_1\lambda_2 - \lambda_1'\lambda_2'} \quad (3.150c)$$

La limite $w_3 = w_4$ de l'onde cnoïdale \mathcal{W}_{34} correspond à une **onde plane** (cf. discussion dans la Section 2.b).

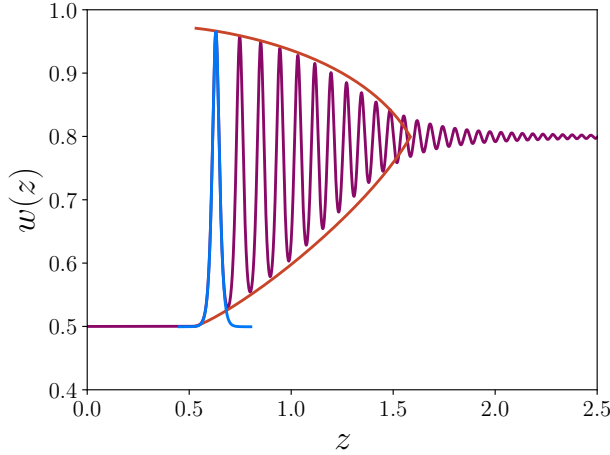


FIGURE 3.20 – Simulation numérique des équations de Landau-Lifshitz (3.26) à $t = 100$ avec la condition initiale (3.80) où $(v_G, w_G) = (0.2, 0.5)$ et $(v_D, w_D) = (-0.2, 0.8)$ (cf. la Fig. 3.19) et $\zeta_0 = 2$. L'enveloppe analytique $(w_3(z), w_4(z))$ déterminée par la théorie de Whitham est représentée en trait plein rouge (—). Dans un souci de lisibilité on représenté ici seulement la première oscillation de l'onde cnoïdale modulée en trait plein bleu (—) qui correspond d'après l'équation (3.146) à un soliton brillant.

Remarque 3.14. La limite $\lambda_3 \rightarrow \lambda_4$ peut aussi être atteinte pour $w_1 = w_2$ [cf. l'Eq. (3.128)] et l'onde $\mathcal{W}_{34}(z)$ correspond alors à l'onde non-linéaire d'expression *trigonométrique* (3.69). La limite onde plane de faible amplitude de l'onde cnoïdale est cependant la seule limite qui permette le raccordement avec la solution constante $w = w_D$ d'amplitude nulle (cf. e.g. la Ref. [159]).

De façon similaire à la limite solitonique, les paramètres w_1 , w_2 et w_3 peuvent être reliés aux valeurs limites (v_D, w_D) et à la vitesse de groupe de l'onde plane z_{harm} [cf. l'Eq. (3.71)], et on peut déterminer à l'aide des relations (3.150) les valeurs des invariants de Riemann :

$$\lambda_1 = \lambda_-(v_D, w_D) = v_D w_D - \sqrt{(1 - v_D^2)(1 - w_D^2)}, \quad (3.151a)$$

$$\lambda_2 = \lambda_+(v_D, w_D) = v_D w_D + \sqrt{(1 - v_D^2)(1 - w_D^2)}, \quad (3.151b)$$

ainsi que la valeur de la vitesse de groupe z_{harm} . Il est ici plus aisé de déterminer cette vitesse en considérant simplement la limite $\lambda_3 \rightarrow \lambda_4$ de la vitesse caractéristique :

$$z_{\text{harm}} = v_3(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \rightarrow \lambda_4, \lambda_4) = 2\lambda_4 + \frac{(\lambda_2 - \lambda_1)^2}{2(\lambda_1 + \lambda_2 - 2\lambda_4)}. \quad (3.152)$$

Les invariants de Riemann constants sont maintenant tous déterminés en fonction des valeurs des champs à l'infini comme le montre la figure 3.19 et à l'aide des relations entre les w_i et les invariants (3.139) ainsi que la formule implicite de $\lambda_3(z)$ (3.144), on peut représenter la modulation de l'onde cnoïdale selon le paramètre auto-similaire z ; la solution analytique est en très bon accord avec la simulation numérique [où la condition initiale est implémentée par (3.80)] comme le montre la figure 3.20. Il est important de remarquer que la solution décrite jusqu'à présent possède un invariant de Riemann constant égal, à gauche et à droite, à l'invariant de Riemann hydrodynamique λ_- :

$$\lambda_1 = \lambda_-(v_G, w_G) = \lambda_-(v_D, w_D) \quad (3.153)$$

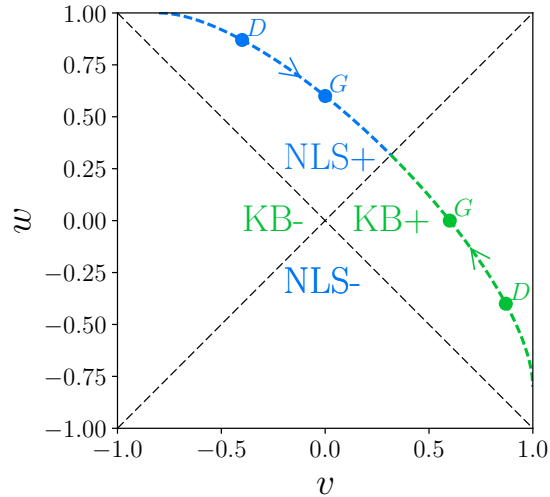
Pour cette solution, les limites gauche (v_G, w_G) et droite (v_D, w_D) appartiennent au lieu décrit par l'équation $\lambda_-(v, w) = \text{cste}$ dans l'espace des phases (cf. la Fig. 3.21) tant et si bien que l'on représente par la suite cette solution en onde simple par la notation $\lambda_- = \text{cste}$. Il est important de souligner que cette dernière relation constitue simplement

une notation et que, bien que l'on ait l'égalité (3.153), la relation $\lambda_-(v, w) = \text{cste}$ n'est pas respectée pour $(v, w) \notin \{(v_G, w_G), (v_D, w_D)\}$. De façon similaire, si l'onde simple correspondait à la variation de l'invariant $\lambda_2(z)$, on aurait eu : $\lambda_4 = \lambda_+(v_G, w_G) = \lambda_+(v_D, w_D)$.

On peut ainsi compléter la disjonction de cas élaborée dans l'approche sans dispersion (cf. la Section iii) : dans le cas où les limites (v_G, w_G) et (v_D, w_D) appartiennent à l'arc d'ellipse arcs décrit par $\lambda_-(v, w) = \text{cste}$ (cf. la Remarque 3.9) mais ne respectent pas la monotonie de l'invariant de Riemann hydrodynamique λ_+ : $\lambda_+(v_G, w_G) > \lambda_+(v_D, w_D)$, la solution correspond à une **onde de choc dispersive** pour laquelle les invariants de Riemann sont décrits par la figure 3.19. Cependant, si les deux points (v_G, w_G) et (v_D, w_D) respectent $\lambda_-(v_G, w_G) = \lambda_-(v_D, w_D)$ mais n'appartiennent pas au même **triangle de monotonicité**, la solution n'est plus représentée par la variation d'un seul invariant de Riemann, et il devient alors nécessaire de considérer une autre description auto-similaire des invariants λ_i (différente de celle représentée dans la figure 3.19).

iii. Limite NLS et limite Kaup-Boussinesq

FIGURE 3.21 - Représentation dans l'espace des phases des limites $G = (v_G, w_G)$ et $D = (v_D, w_D)$ développant une DSW telle que la Fig. 3.20. Les traits pointillés (--)représentent le lieu $\lambda_- = \text{cste}$ sur lesquels on a indiqué par une flèche le sens de variation de $\lambda_+(z)$ (cf. la Section 3.b); l'évolution dans le triangle de monotonicité supérieur (NLS+) peut être décrite à l'aide de l'équation NLS (3.158) et l'évolution dans le triangle de monotonicité droit supérieur (KB+) peut être décrite à l'aide des équations KB (3.161) et (3.162).



Avant de considérer cette nouvelle solution, on peut remarquer que dans le cas où les limites (v_G, w_G) et (v_D, w_D) appartiennent au triangle de monotonicité (cf. la Fig. 3.21), les équations de Landau-Lifshitz peuvent être *simplifiées*. En effet, considérons dans un premier temps la limite où la densité relative $w(\zeta, \tau)$ est proche de 1 (limite localisée dans le triangle supérieur dans la figure 3.21) :

$$w(\zeta, \tau) = 1 - w' \quad \text{avec} \quad w'(\zeta, \tau) \ll 1. \quad (3.154)$$

En effectuant le changement de variable :

$$w' = 2n(x, t), \quad v = u(x, t) \quad \text{avec} \quad (x, t) = (\zeta, 2\tau), \quad (3.155)$$

les équations de Landau-Lifshitz (3.17) et (3.18) se simplifient à l'aide de la limite (3.154) :

$$n_t + (nu)_x = 0, \quad (3.156)$$

$$u_t + uu_x + n_x + \frac{1}{4} \left(\frac{n_x^2}{2n^2} - \frac{n_{xx}}{n} \right)_x = 0, \quad (3.157)$$

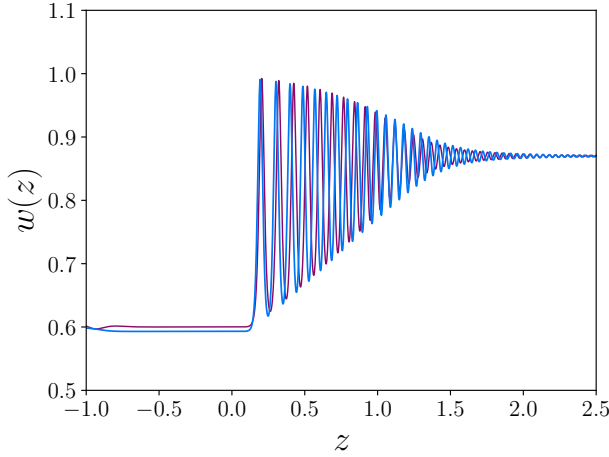


FIGURE 3.22 – Comparaison entre la résolution numérique des équations de Landau-Lifshitz (3.26) représentée en trait plein bleu foncé (—) et de l'équation NLS (3.158) représentée en trait plein bleu (—) à $t = 100$ avec la condition initiale (3.80) où $(v_G, w_G) = (0, 0.6)$ et $(v_D, w_D) = (-0.4, 0.87)$ et $\zeta_0 = 2$. Les limites ont été choisies dans le triangle NLS+ (cf. la Fig. 3.21) telles que $\lambda_-(v_G, w_G) = \lambda_-(v_D, w_D)$ et la solution du problème de Riemann correspond à une DSW d'après l'étude menée dans la section 4.b.

et peuvent se mettre sous la forme plus familière suivante :

$$i \psi_t = -\frac{1}{2} \psi_{xx} + |\psi|^2 \psi, \quad \text{avec} \quad \psi = \sqrt{n} e^{i \int u dx}, \quad (3.158)$$

correspondant à l'équation Non-Linéaire de Schrödinger (NLS) avec interactions répulsives (le résultat est similaire si l'on considère la limite $w \rightarrow -1$). Comme le montre les simulations numériques dans la figure 3.22, tant que les limites (v_G, w_G) et (v_D, w_D) appartiennent au triangle de monotonie supérieur, l'accord entre la description (3.17)-(3.18) et (3.158) est bon même pour $|w - 1|$ fini. On peut cependant remarquer dans ces résultats numériques que les limites gauches w_G pour l'équation NLS et l'équation de Landau-Lifshitz ne se superposent pas. En effet, bien que les conditions aux bords (v_G, w_G) et (v_D, w_D) aient été choisies telles que le problème de Riemann pour l'équation de Landau-Lifshitz ne développe qu'une seule onde simple [$\lambda_-(v_G, w_G) = \lambda_-(v_D, w_D)$], le problème de Riemann pour l'équation NLS ne développe pas une unique DSW et une onde supplémentaire de faible amplitude se propage vers la gauche ; un plateau de densité légèrement plus faible que w_G se forme alors entre cette onde se propageant vers la gauche et la DSW se propageant vers la droite.

Comme l'équation de Landau-Lifshitz, l'équation NLS appartient à la hiérarchie AKNS (cf. la Ref. [132]) et il est possible de classifier les différentes solutions du problème de Gurevich-Pitaevskii (cf. e.g. la Ref. [164]). Bien que les invariants de Riemann soient différents pour les deux descriptions, il est remarquable que la classification des différentes solutions est semblable dans le cas où (v_G, w_G) et (v_D, w_D) appartiennent au même triangle de monotonie et on dénotera par la suite le triangle de monotonie supérieur (correspondant à la limite $w \rightarrow +1$) NLS+ et le triangle inférieur (correspondant à la limite $w \rightarrow -1$) NLS- (cf. la Fig. 3.21).

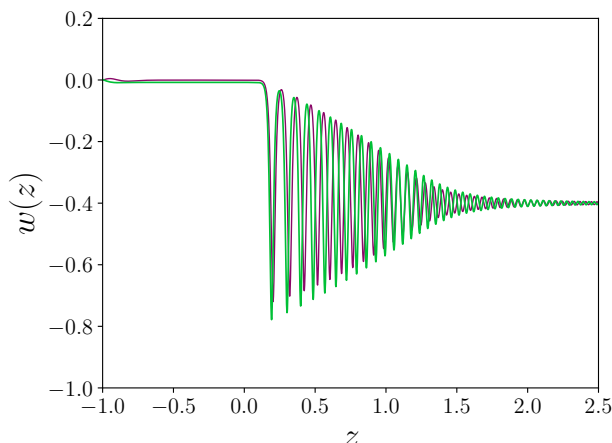
Considérons maintenant la limite où la vitesse relative $v(\zeta, \tau)$ est proche de la vitesse du son de polarisation $v = 1$ (limite localisée dans le triangle droit dans la figure 3.21) :

$$v(\zeta, \tau) = 1 - v' \quad \text{avec} \quad v'(\zeta, \tau) \ll 1. \quad (3.159)$$

En effectuant le changement de variable :

$$w = u(x, t)/\sqrt{2}, \quad v' = h(x, t) \quad \text{avec} \quad (\zeta, \tau) = (\sqrt{2}x, t), \quad (3.160)$$

FIGURE 3.23 – Comparaison entre la résolution numérique des équations de Landau-Lifshitz (3.26) représentée en trait plein bleu foncé (—) et des équation KB (3.161) et (3.162) représentée en trait plein vert (—) à $t = 100$ avec la condition initiale (3.80) où $(v_G, w_G) = (0.6, 0)$ et $(v_D, w_D) = (0.87, -0.4)$ et $\zeta_0 = 2$. Les limites ont été choisies dans le triangle KB+ (cf. la Fig. 3.21) telles que $\lambda_-(v_G, w_G) = \lambda_-(v_D, w_D)$ et la solution du problème de Riemann correspond à une DSW d’après l’étude menée dans la section 4.b.



les équations de Landau-Lifshitz (3.17) et (3.18) se simplifient à l’aide de la limite (3.159) :

$$u_t + uu_x + h_x = 0, \quad (3.161)$$

$$h_t + (hu)_x - \frac{1}{4}u_{xxx} = 0, \quad (3.162)$$

qui correspond à la forme canonique de l’équation de Kaup-Boussinesq (KB) [165] (le résultat est similaire si l’on considère la limite $v \rightarrow -1$). De même que précédemment, les simulations numériques montrent que les deux descriptions sont en bon accord dans le même triangle de monotonicité (cf. la Fig. 3.23). De façon similaire à l’exemple présenté précédemment, le problème de Riemann pour l’équation KB développe une DSW se propageant à droite et une onde de faible amplitude se propageant à gauche, et l’écart de densité entre les deux résultats numériques pour $z \lesssim 0$ s’expliquent par la formation d’un plateau pour l’équation KB de densité légèrement plus faible que w_G . L’équation KB appartient aussi à la hiérarchie AKNS, et la classification des solutions du problème de Gurevich-Pitaevskii est proposée dans l’Article 3. Bien que les invariants de Riemann soient différents pour l’équation de Landau-Lifshitz et l’équation KB, la classification des solutions est semblable dans les deux cas et on dénotera par la suite le triangle de monotonicité droit (correspondant à la limite $v \rightarrow +1$) **KB+** et le triangle gauche (correspondant à la limite $v \rightarrow -1$) **KB-** (cf. la Fig. 3.21).

Il est remarquable que l’équation de Landau-Lifshitz décrit à chacune de ses limites $|w| \rightarrow 1$ et $|v| \rightarrow 1$ un système dispersif intégrable. Cependant ces limites sont valables si la trajectoire des solutions dans l’espace des phases reste dans le même triangle de monotonicité, et on va voir qu’au-delà de cette limite l’équation de Landau-Lifshitz propose une nouvelle phénoménologie.

4.c. Choc mixte

L’onde simple (3.143) ne suffit pas à décrire la totalité des ondes de chocs élémentaires rencontrées lors de la construction de la solution. Il existe une situation dégénérée de la solution onde simple où deux invariants de Riemann peuvent être égaux et varier; on étudiera à titre d’exemple la situation (cf. la Fig. 3.24) :

$$\lambda_1, \lambda_2 = \text{cstes} \quad \text{et} \quad \lambda_3(z) = \lambda_4(z). \quad (3.163)$$

Dans cette situation les vitesses caractéristiques sont égales :

$$v_3(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3(z), \lambda_3(z)) = v_4(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3(z), \lambda_3(z)) = z, \quad (3.164)$$

et on parle alors **d'onde de contact** ; de même l'onde modulée est appelée **onde de choc dispersive de contact ou CDSW**²². L'invariant $\lambda_3(z) = \lambda_4(z)$ varie maintenant entre λ_2 et la valeur maximale 1. De même que précédemment, on va étudier la situation où $w_G < w_D$ pour laquelle l'onde cnoïdale est représentée par $w(z) = \mathcal{W}_{34}(z)$ (cf. le tableau 3.1).

Ce type de solution joue un rôle très important dans la théorie des chocs visqueux qui peut développer des **discontinuités de contact** : au contraire d'un choc classique où tous les champs *physiques* sont discontinus au passage de la singularité, un des champs physiques évolue continûment au passage de la discontinuité de contact (cf. e.g. la Ref. [95]).

i. Onde de contact

La limite $\lambda_3 = \lambda_4$ ne contraint pas nécessairement l'onde cnoïdale à être décrite par une onde plane (cf. la Remarque 3.14) : dans le cas présent cette limite est atteinte pour $w_1 = w_2$ qui correspond à la limite en onde non-linéaire *trigonométrique* d'expression (3.69).

Dans ce cas, la limite $\lambda_4 = \lambda_3 \rightarrow \lambda_2$ (correspondant à l'extrémité gauche de l'onde modulée, cf. la Fig. 3.24) conduit à l'égalité :

$$w_1 = w_2 = w_3, \quad (3.165)$$

et l'onde cnoïdale associée est le soliton algébrique d'équation (3.78). Comme précédemment on peut déterminer les valeurs des invariants de Riemann en fonction des valeurs limites des champs à gauche (v_G, w_G) :

$$\lambda_1 = \lambda_-(v_G, w_G) \quad \text{et} \quad \lambda_2 = \lambda_+(v_G, w_G). \quad (3.166)$$

De plus, dans le cas où les deux invariants λ_3 et λ_4 sont égaux, la vitesse du soliton z_{sol} se simplifie et est égale à la vitesse caractéristique correspondant à l'invariant de Riemann hydrodynamique λ_+ [cf. l'Eq. (3.87)] :

$$z_{\text{sol}} = \frac{3}{2}\lambda_2 + \frac{1}{2}\lambda_1 = V_+(v_G, w_G). \quad (3.167)$$

22. Contact Dispersive Shock-Wave

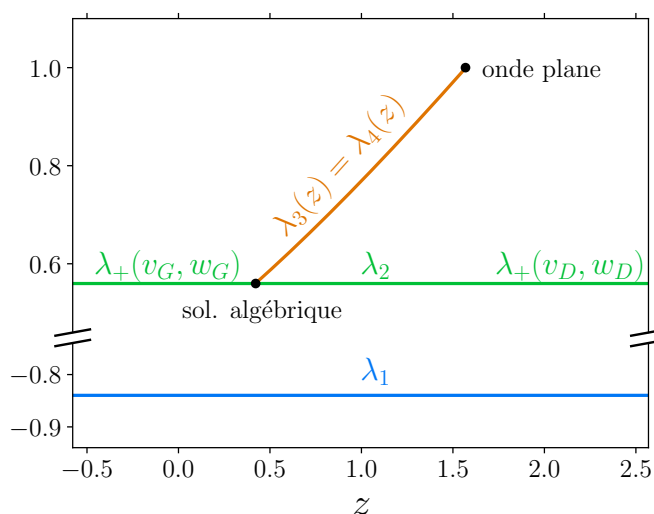
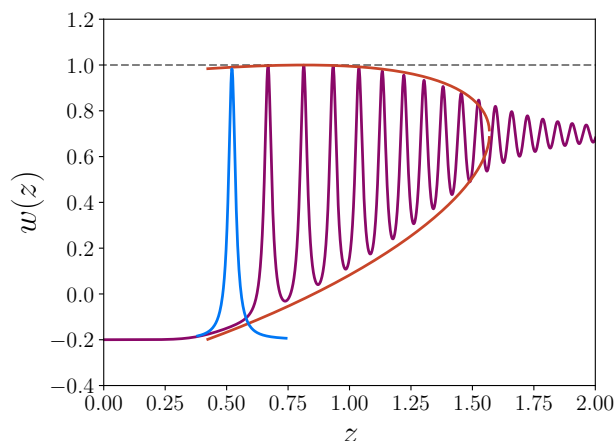


FIGURE 3.24 – Représentation des invariants de Riemann λ_i pour l'onde de contact $\lambda_3 = \lambda_4$ (—) avec $v_G = w_D = 0.7$ et $w_G = v_D = -0.2$. Les valeurs de λ_1 (—) et λ_2 (—) sont déterminées par les équations (3.166) [ou de façon équivalente (3.169)].

FIGURE 3.25 – Simulation numérique des équations de Landau-Lifshitz (3.26) à $t = 100$ avec la condition initiale (3.80) choisie telle que la modulation est décrite par une onde de contact (cf. la Fig. 3.24). L'enveloppe analytique ($w_3(z), w_4(z)$) déterminée par la théorie de Whitham est représentée en trait plein rouge (—) et la première oscillation de l'onde cnoïdale modulée est représentée en trait plein bleu (—) qui correspond d'après l'équation (3.146) à un soliton algébrique.



De façon similaire, on montre que la limite $\lambda_4 = \lambda_3 \rightarrow 1$ (extrémité droite) conduit à l'égalité

$$w_3 = w_4 \quad (3.168)$$

et l'onde cnoïdale associée est une onde plane. On peut alors relier les valeurs des invariants de Riemann aux valeurs limites des champs à gauche (v_G, w_G) :

$$\lambda_1 = \lambda_-(v_D, w_D) \quad \text{et} \quad \lambda_2 = \lambda_+(v_D, w_D) . \quad (3.169)$$

Les deux égalités (3.166) et (3.169) sont respectées si :

$$v_D = w_G \quad \text{et} \quad w_D = v_G , \quad (3.170)$$

c.à.d. si (v_D, w_D) correspond au symétrique de (v_G, w_G) par rapport à la diagonale $w = v$ dans l'espace des phases. L'onde de contact $\lambda_3(z) = \lambda_4(z)$ relie ainsi deux conditions aux limites (v_G, w_G) et (v_D, w_D) **n'appartenant pas au même triangle de monotonicité**, au contraire de la solution en onde simple présentée dans la section précédente, et la modulation décrite par la variation de l'invariant $\lambda_3(z)$ présentée ici est en très bon accord avec l'onde de choc observée numériquement comme le montre la figure 3.25.

Bien que cette solution soit obtenue pour une condition initiale particulière (3.170), elle va permettre d'étendre la description fournie par la solution $\lambda_- = \lambda_1 = \text{cste}$ où les limites gauche (v_G, w_G) et droite (v_D, w_D) ne sont plus limitées au même triangle de monotonicité.

ii. Situation mixte

Dans cette partie on relaxe l'égalité des invariants de Riemann $\lambda_+(v_G, w_G) = \lambda_+(v_D, w_D)$ et on étudie dans un premier temps la situation suivante :

$$\lambda_+(v_G, w_G) < \lambda_+(v_D, w_D) , \quad (3.171)$$

où (v_G, w_G) et (v_D, w_D) appartiennent à **deux triangles de monotonicité différents**, de telle façon que les solutions $v(z)$ et $w(z)$ ne soient pas représentées par des ondes de raréfaction (cf. discussion de la section 3.b). Dans ce cas, la limite droite $\lambda_3 \rightarrow 1$ de l'onde cnoïdale correspond toujours à la limite harmonique (3.168) et on obtient la valeur de l'invariant de Riemann : $\lambda_2 = \lambda_+(v_D, w_D)$. Ainsi, d'après le calcul effectué dans la section précédente, la limite solitonique $\lambda_3 \rightarrow \lambda_2$ ne peut être raccordée à la condition aux limites (v_G, w_G) puisque l'égalité $\lambda_+^G = \lambda_+^D$ est violée comme le montre la figure 3.26.

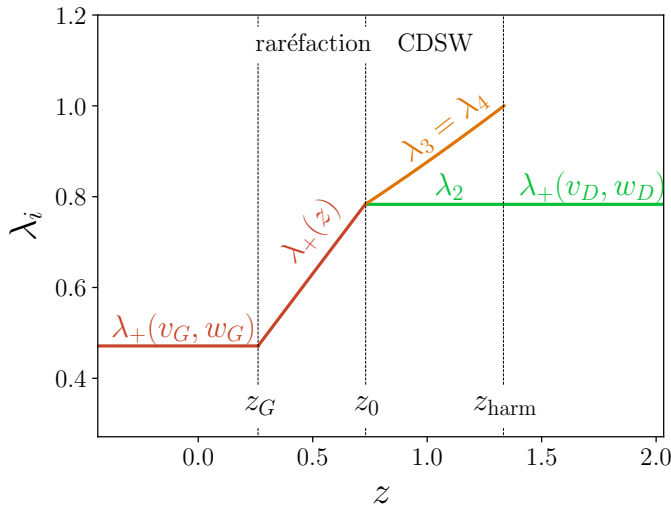


FIGURE 3.26 – Représentation des invariants de Riemann λ_i pour la situation mixte décrite par (3.171) avec $(v_G, w_G) = (0.7, -0.3)$ et $(v_D, w_D) = (-0.1, 0.54)$. L'onde de raréfaction est décrite par la variation de $\lambda_+(z)$ entre z_G et z_0 définies par (3.172). λ_1 n'est pas représenté ici et est simplement égal à $\lambda_1 = \lambda_-(v_G, w_G) = \lambda_-(v_D, w_D)$.

Cependant, on a montré précédemment que le bord $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4$ se déplace à la vitesse caractéristique hydrodynamique V_+ [cf. l'Eq. (3.167)] et il est possible de relier le soliton algébrique de la CDSW à la limite gauche (v_G, w_G) à l'aide d'une onde de raréfaction décrite par $\lambda_- = \text{cste} = \lambda_-(v_G, w_G)$. Le domaine de variation de $w(z)$ est alors séparé en deux régions (cf. la Fig. 3.26) :

- une onde de raréfaction pour $z \in [z_G; z_0]$ où z_G est la vitesse du raccordement entre l'onde de raréfaction et la valeur limite w_G et z_0 la vitesse du raccordement entre l'onde de raréfaction et le soliton algébrique :

$$z_G = v_+(v_G, w_G) \quad \text{et} \quad z_0 = v_+(v_D, w_D), \quad (3.172)$$

- une CDSW décrite dans la section précédente pour $z \in [z_0; z_{\text{harm}}]$ où z_{harm} est la vitesse des ondes planes donnée par l'équation (3.152).

Cette séparation est bien observée numériquement comme le montre la comparaison entre les résultats analytiques et la résolution numérique du problème de Riemann à la figure 3.27.

Intéressons nous maintenant au cas de figure suivant :

$$\lambda_+(v_G, w_G) > \lambda_+(v_D, w_D), \quad (3.173)$$

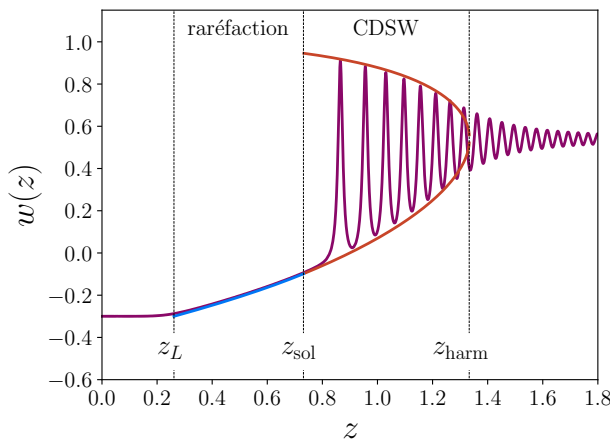
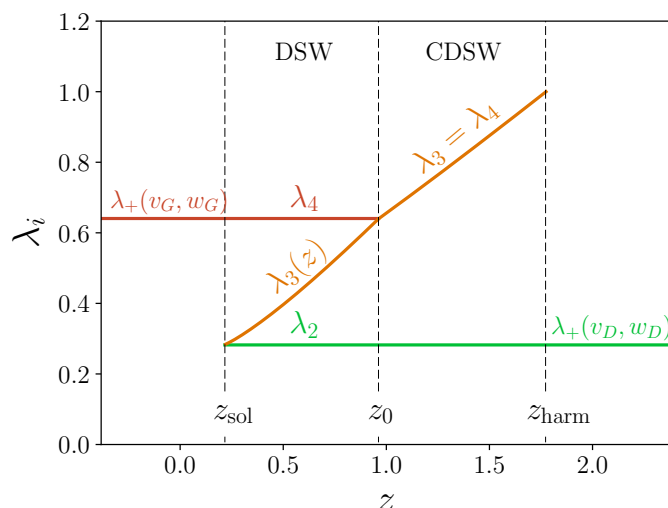


FIGURE 3.27 – Simulation numérique des équations de Landau-Lifshitz (3.26) à $t = 200$ avec la condition initiale (3.80) choisie telle que (3.171) soit respectée (cf. la Fig. 3.26). La densité relative est séparée en deux structures : une onde de raréfaction représentée en trait plein bleu (—) et une onde cnoïdale modulée (décrite par une onde de contact au niveau des invariants de Riemann) dont on a représenté l'enveloppe analytique $(w_3(z), w_4(z))$ en trait plein rouge (—).

FIGURE 3.28 – Représentation des invariants de Riemann λ_i pour la situation mixte observée pour par (3.173) avec $(v_G, w_G) = (0.7, -0.3)$ et $(v_D, w_D) = (-0.1, 0.54)$. L'onde de raréfaction est décrite par la variation de $\lambda_+(z)$ entre z_G et z_0 définies par (3.174). λ_1 n'est pas représenté ici et est simplement égal à $\lambda_1 = \lambda_-(v_G, w_G) = \lambda_-(v_D, w_D)$.



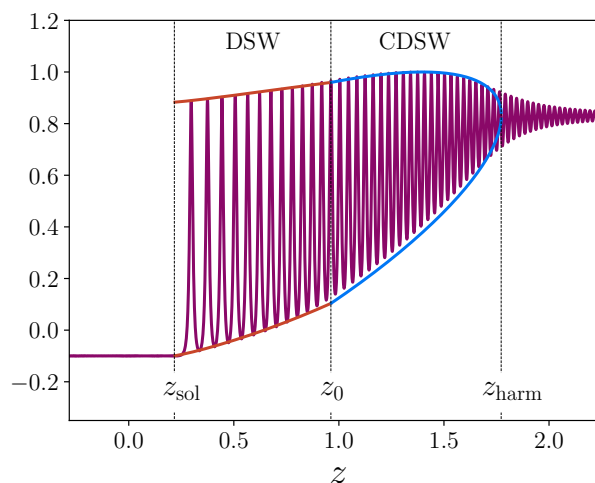
où (v_G, w_G) et (v_D, w_D) appartiennent à **deux triangles de monotonie différents**, de telle façon que la solution $w(z)$ ne soit pas représentée par l'onde simple étudiée dans la section 4.b. Comme dans le cas mixte étudié précédemment, on ne peut représenter la variation de $w(z)$ par une unique onde de contact dans la situation dépeinte par la condition (3.173) : la limite droite $\lambda_3 \rightarrow 1$ de l'onde cnoïdale correspond toujours à la limite harmonique dont on dérive l'égalité $\lambda_2 = \lambda_+(v_D, w_D)$ et il n'est pas possible de satisfaire la condition $\lambda_+(v_G, w_G) = \lambda_2 = \lambda_+(v_D, w_D)$ comme le montre la figure 3.26. Cependant, puisque la limite $\lambda_3 = \lambda_4$ ne correspond pas nécessairement à la limite harmonique (cf. la Remarque 3.14), il est toujours possible de raccorder l'onde non-linéaire trigonométrique à gauche par une autre onde cnoïdale modulée comme le montre la variation des invariants de Riemann dans la figure 3.28. Le domaine de modulation de l'onde est alors séparé en deux régions (cf. la Fig. 3.28) :

- une DSW pour $z \in [z_{\text{sol}}; z_0]$ où z_{sol} est la vitesse du soliton définie par l'expression (3.149) et z_0 la vitesse du raccordement onde simple – onde de contact définie par :

$$z_0 \equiv v_3(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \rightarrow \lambda_4, \lambda_4), \quad (3.174)$$

- une CDSW, dont la modulation est décrite dans la section précédente, pour $z \in [z_0; z_{\text{harm}}]$

FIGURE 3.29 – Simulation numérique des équations de Landau-Lifshitz (3.26) à $t = 200$ avec la condition initiale (3.80) choisie telle que (3.173) soit respectée (cf. la Fig. 3.28). La densité relative est séparée en deux structures : une DSW dont on a représenté l'enveloppe en trait plein rouge (—) et une CDSW (décrite par une onde de contact au niveau des invariants de Riemann) dont on a représenté l'enveloppe en trait plein bleu (—).



	$\lambda_+(v_G, w_G) = \lambda_+(v_D, w_D)$	$\lambda_-(v_G, w_G) = \lambda_-(v_D, w_D)$
$w_G < w_D$	$w(\zeta, \tau) = \mathcal{W}_{34}(z)$	$w(\zeta, \tau) = \mathcal{W}_{12}(z)$
$w_G > w_D$	$w(\zeta, \tau) = \mathcal{W}_{12}(z)$	$w(\zeta, \tau) = \mathcal{W}_{34}(z)$

TABLE 3.1 – Choix de l'expression de l'onde cnoïdale pour l'onde de choc en fonction des conditions aux limites (v_G, w_G) et (v_D, w_D) .

où z_{harm} est donnée par l'équation (3.152).

Numériquement le raccordement entre l'onde simple et l'onde de contact n'est pas visible comme le montre la figure 3.29. Il est toutefois nécessaire de décrire la modulation de l'onde de choc observée dans cette figure par le schéma proposé dans cette section (cf. la Fig. 3.28) afin de bien décrire la modulation de l'onde cnoïdale analytiquement et de déterminer les valeurs des vitesses du soliton (à gauche) et de la limite en onde plane (à droite).

4.d. Cas général

Les solutions en onde simple et en onde de contact peuvent être aussi dérivées dans le cas où $\lambda_2(z)$ peut varier. On indiquera ici que les principaux résultats : $\lambda_2(z)$ est strictement croissante et varie entre λ_1 et λ_3 , et le cas dégénéré de l'onde de contact est décrit par la variation de $\lambda_1(z) = \lambda_2(z)$ entre -1 et λ_3 . Ces deux solutions *élémentaires* sont caractérisées par la constance de l'invariant de Riemann λ_4 :

$$\lambda_4 = \lambda_+(v_G, w_G) = \lambda_+(v_D, w_D) . \quad (3.175)$$

L'onde de choc élémentaire se développe pour les conditions aux limites appartenant au lieu $\lambda_+(v, w) = \text{cste}$ et la structure de l'onde dépend de leur positions relatives sur l'arc (c.à.d. de l'inégalité entre les deux invariants hydrodynamiques $\lambda_-(v_G, w_G)$ et $\lambda_-(v_D, w_D)$, cf. les discussions des sections 4.b et 4.c).

i. Disjonction de cas

La classification des différentes solutions élémentaires peut être systématisée en suivant la méthode suivante : connaissant la condition aux limites gauche $(v, w) = (v_G, w_G)$

- si $\lambda_+(v_G, w_G) = \lambda_+(v_D, w_D)$, la variation des invariants de Riemann et la structure de l'onde est déterminée par la figure 3.30 en étudiant la position de (v_D, w_D) sur l'arc $\lambda_+(v, w) = \text{cste}$:

$$\text{si } (v_D, w_D) \in \begin{cases} GC, w(z) \text{ est une DSW,} \\ GA, w(z) \text{ est une onde de raréfaction,} \\ G'C, w(z) \text{ est une DSW + CDSW,} \\ G'A, w(z) \text{ est une onde de raréfaction + CDSW,} \end{cases} \quad (3.176)$$

- si $\lambda_-(v_G, w_G) = \lambda_-(v_D, w_D)$, la variation des invariants de Riemann et la structure de l'onde est déterminée par la figure 3.31 en étudiant la position de (v_D, w_D) sur l'arc $\lambda_-(v, w) = \text{cste}$:

$$\text{si } (v_D, w_D) \in \begin{cases} GC, w(z) \text{ est une onde de raréfaction,} \\ GA, w(z) \text{ est une DSW,} \\ G'C, w(z) \text{ est une onde de raréfaction + CDSW,} \\ G'A, w(z) \text{ est une DSW + CDSW.} \end{cases} \quad (3.177)$$

Comme il a été indiqué lors de l'intégration de la solution périodique (cf. la Section 2.b), l'onde cnoïdale peut être représentée par deux expressions $\mathcal{W}_{12}(z)$ ou $\mathcal{W}_{34}(z)$. Le choix de l'expression de l'onde cnoïdale pour la description de la DSW ou de la CDSW est simplement déterminé par la comparaison entre les deux densités relatives w_G et w_D et le type de solution ($\lambda_- = \text{cste}$ ou $\lambda_+ = \text{cste}$) : les différents cas sont présentés dans le tableau 3.1.

FIGURE 3.30 – Représentation des différentes solutions en onde simple et en onde de contact en fonction de la position de la limite (v_D, w_D) sur le lieu $\lambda_+(v, w) = \lambda_+^G$ représenté en trait plein rouge (—). Le point G représente la limite (v_G, w_G) et G' son symétrique par rapport à l'anti-diagonale $w = -v$. Les encarts représentent la variation des invariants de Riemann (hydrodynamiques et de la théorie de Whitham) : la variation de λ_- est représentée en trait plein bleu (—), et la variation de λ_2 en trait plein vert (—).

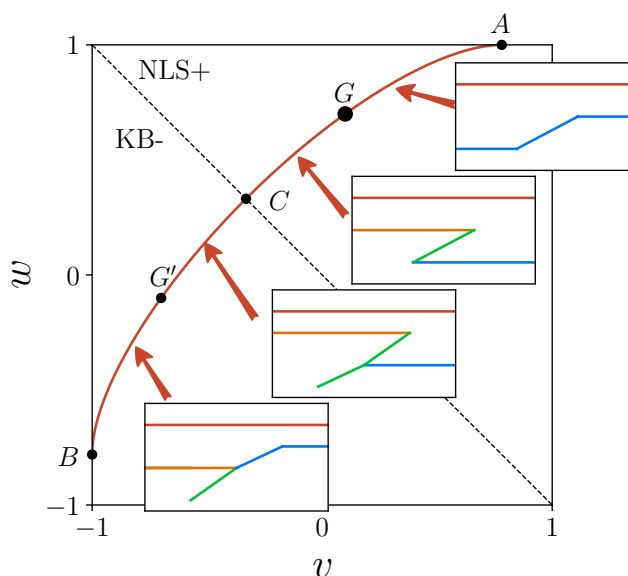
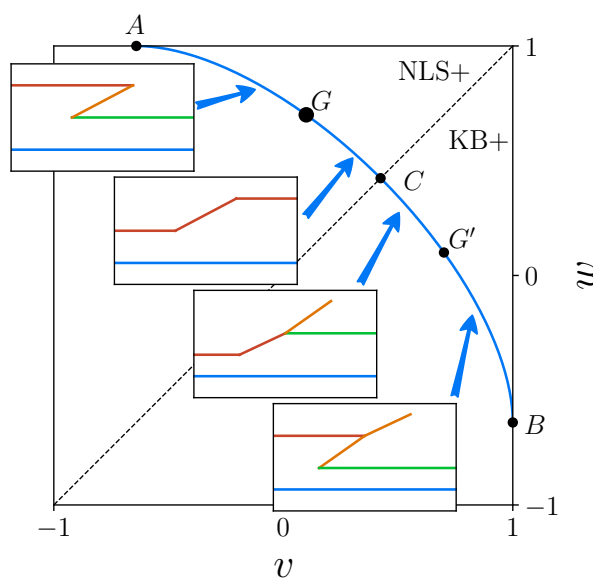


FIGURE 3.31 – Représentation des différentes solutions en onde simple et en onde de contact en fonction de la position de la limite (v_D, w_D) sur le lieu $\lambda_-(v, w) = \lambda_-^G$ représenté en trait plein bleu (—). Le point G représente la limite (v_G, w_G) et G' son symétrique par rapport à la diagonale $w = v$. Les encarts représentent la variation des invariants de Riemann (hydrodynamiques et de la théorie de Whitham) : la variation de λ_+ est représentée en trait plein rouge (—), et la variation de λ_3 en trait plein orange (—).



ii. Condition initiale générale

À l'aide des solutions élémentaires déterminées précédemment, on peut maintenant construire la solution dans un cas plus général, c.à.d. pour un choix des paramètres (v_G, w_G) et (v_D, w_D) quelconque. Plus particulièrement on peut construire le cas où la solution est constituée de deux solutions élémentaires séparées par un plateau. Comme

il a été déterminé de façon anticipée pour les ondes de raréfaction (cf. la Fig. 3.15), la solution du problème de Riemann est constituée d'une onde élémentaire $\lambda_+ = \lambda_+(v_G, w_G)$ se propageant à gauche et d'une onde élémentaire $\lambda_- = \lambda_-(v_D, w_D)$ se propageant à droite reliées par un plateau $(v, w) = (v_0, w_0)$ pour lequel les valeurs sont déterminés par :

$$\lambda_+(v_0, w_0) = \lambda_+(v_G, w_G) \quad \text{et} \quad \lambda_-(v_0, w_0) = \lambda_-(v_D, w_D) . \quad (3.178)$$

De façon pratique, on peut déterminer la structure de la solution géométriquement en traçant dans l'espace des phases les arcs $\lambda_+(v, w) = \lambda_+^G$ et $\lambda_-(v, w) = \lambda_-^D$ (cf. l'exemple de la figure 3.32) : bien que la solution du problème de Riemann $(v(z), w(z))$ ne parcourt pas nécessairement ces deux arcs²³, leur intersection fournit les caractéristiques du plateau (v_0, w_0) .

Dans un premier temps, on peut déterminer à quel type de solution élémentaire correspond l'onde se propageant à gauche $\lambda_+ = \lambda_+^G$ en comparant les positions relatives des points (v_G, w_G) et (v_0, w_0) et en utilisant la disjonction de cas effectuée dans l'équation (3.176) et dans la figure 3.30. En reprenant le dénomination utilisée dans l'équation (3.176), la limite (v_D, w_D) correspond ici au point représentant le plateau (v_0, w_0) . De même, on détermine à quel type de solution élémentaire correspond l'onde se propageant à droite $\lambda_- = \lambda_-^D$ en comparant les positions relatives des points (v_0, w_0) et (v_D, w_D) et en utilisant la disjonction de cas effectuée dans l'équation (3.177) et dans la figure 3.31. En reprenant le dénomination utilisée dans l'équation (3.177), la limite (v_G, w_G) correspond ici au point représentant le plateau (v_0, w_0) . À titre d'exemple, on étudie la situation suivante :

$$(v_G, w_G) = (-0.15, 0.3) \quad \text{et} \quad (v_D, w_D) = (0.8, -0.15) . \quad (3.179)$$

En traçant les lieux $\lambda_+(v, w) = \lambda_+^G$ et $\lambda_-(v, w) = \lambda_-^D$ dans la figure 3.32, on remarque qu'ils se croisent au point $(v_0, w_0) \simeq (0.16, 0.58)$ correspondant à un plateau pour les champs v et w . D'après la figure 3.32, le point (v_0, w_0) est dans le même triangle de monotonie que la limite (v_G, w_G) (triangle NLS+) et la solution élémentaire reliant les points (v_G, w_G) et (v_0, w_0) correspond à une onde de raréfaction d'après la disjonction de cas effectuée dans la figure 3.30 [où (v_D, w_D) correspond ici au point (v_0, w_0)] : de façon plus simple, puisque les points (v_G, w_G) et (v_0, w_0) appartiennent au même triangle de monotonie, l'inégalité $\lambda_-(v_G, w_G) < \lambda_-(v_0, w_0)$ permet de conclure que l'onde se propageant à gauche correspond à une onde de raréfaction. Au contraire, le point (v_D, w_D) n'appartient pas au même triangle de monotonie que le plateau (v_0, w_0) et il est nécessaire d'utiliser la figure 3.31 afin de déterminer à quelle solution correspond l'onde se propageant à droite $\lambda_- = \lambda_-(v_D, w_D)$. D'après la disjonction présentée dans la figure 3.31 la solution reliant (v_0, w_0) et (v_D, w_D) correspond alors à une DSW+CDSW. La solution complète est ensuite déterminée en raccordant les différents blocs élémentaires : onde de raréfaction + plateau + (DSW+CDSW) ; les vitesses z des raccordements entre les différents blocs sont déterminées analytiquement en suivant respectivement la Section 3.b pour l'onde de raréfaction et la Section 4.c pour la DSW+CDSW. Cette solution est représentée dans la figure 3.33 et montre un bon accord avec la résolution numérique du problème de Riemann.

iii. Vacuum point et ondes cnoïdales non-modulées

La construction décrite précédemment n'est cependant pas toujours possible. En effet, il est possible que les arcs décrit par $\lambda_+(v, w) = \lambda_+^G$ et $\lambda_-(v, w) = \lambda_-^D$ (cf. la Remarque

23. On rappelle que la solution (v, w) parcourt un arc d'ellipse si elle est décrite par l'approximation hydrodynamique, ce qui n'est pas toujours le cas comme on l'a présenté dans les parties précédentes.

FIGURE 3.32 – Représentation dans l'espace des phases de la construction de la solution du problème de Riemann (3.179). La limite $G = (v_G, w_G)$ est reliée au plateau (v_0, w_0) par une onde de raréfaction $\lambda_+ = \text{cste}$ comme le montre le premier encart. Le plateau (v_0, w_0) est ensuite relié à la limite (v_D, w_D) par une DSW+CDSW comme le montre le second encart. Il est important de souligner ici que le lieu $\lambda_- = \text{cste}$ représenté en trait bleu (—) est utile simplement à la construction de la solution et ne représente par la variation des champs $v(z)$ et $w(z)$ dans l'espace des phases.

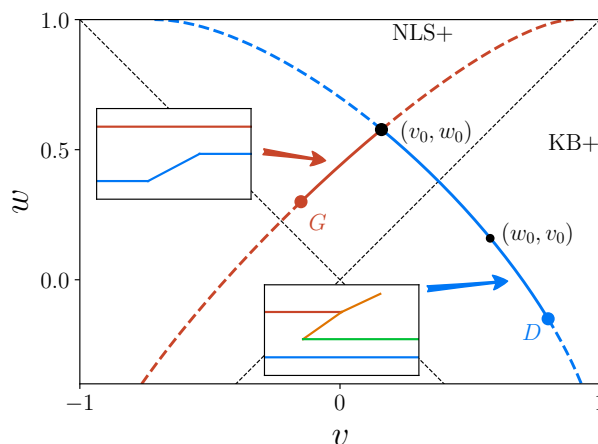
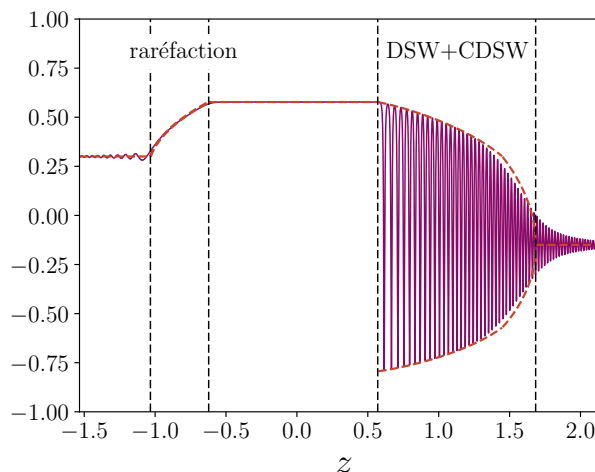


FIGURE 3.33 – Résolution numérique des équations de Landau-Lifshitz (3.26) à $t = 200$ avec la condition initiale (3.80) choisie avec les limites gauches et droites définies par (3.179). La solution analytique est tracée en pointillés rouges (--) et est construite selon le schéma de variation des invariants de Riemann déterminé dans la figure 3.32. Les lignes verticales en pointillés noirs correspondent aux différentes vitesses z déterminées analytiquement.



3.9) ne peuvent se croiser et qu'il n'existe par conséquent aucune solution en onde simple ou en onde de contact reliant les limites gauche et droite. Cette condition de non croisement s'écrit à l'aide des invariants de Riemann : $\lambda_+^G < \lambda_-^D$. Le problème de Riemann peut cependant être résolu de façon explicite (cf. l'Article 4) et on peut montrer que cette condition évolue en un *vacuum point* correspondant à la formation d'un plateau de polarisation nulle : $w(z) = 0$ ou de vitesse relative nulle $v(z) = 0$.

Il existe de plus une situation pour laquelle, bien que les deux arcs $\lambda_+(v, w) = \lambda_+^G$ et $\lambda_+(v, w) = \lambda_-^D$ se croisent, il n'existe pas de solution en onde simple - ou en onde de contact : $\lambda_-^G > \lambda_+^D$. Dans ce cas la description de la structure oscillante observée numériquement par la modulation d'une onde à une phase échoue. Proche des limites NLS et KB (cf. la Section iii), il est cependant possible de décrire la structure par une onde cnoïdale **non-modulée** dans une première approximation. Plus de détails quant à l'intégration de ces deux solutions sont fournis dans l'Article 4.

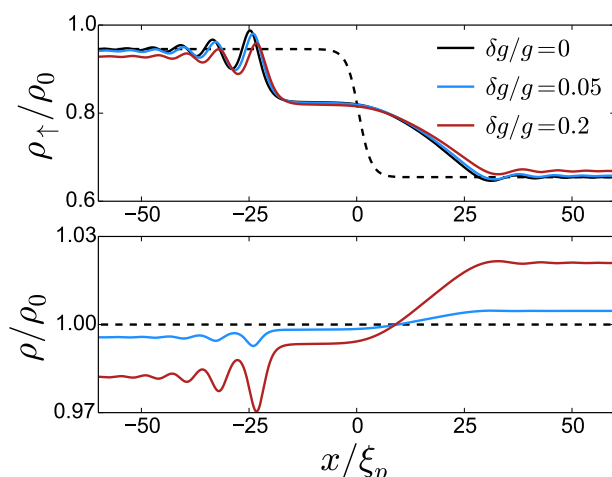


FIGURE 3.34 – Comparaison de la résolution numérique de l'équation de Landau-Lifshitz (3.26) ($\delta g/g = 0$) avec la résolution des équations de Gross-Pitaevskii (1.14) ($\delta g/g = 0.05$ et $\delta g/g = 0.2$) pour la même perturbation initiale de la polarisation représentée ici en pointillés noirs. Les résultats sont très similaires et la limite Landau-Lifshitz constitue un très bon modèle pour décrire la dynamique de polarisation même pour un régime éloigné de la limite de Manakov ($\delta g/g = 0.2$).

4.e. Conclusion

Grâce au caractère intégrable de l'équation de Landau-Lifshitz, on a pu intégrer dans ce chapitre de nouvelles solutions non-linéaires aux condensats de Bose-Einstein à deux composantes. On a notamment dérivé une nouvelle soliton algébrique **d'énergie nulle** (3.78), ouvrant ainsi la question de la stabilité de ces nouvelles structures à plusieurs dimensions. Dans un second temps on a résolu le problème de Riemann pour l'équation de Landau-Lifshitz pour une condition initiale discontinue. On a notamment classé les différentes solutions en comparant les valeurs des invariants de Riemann hydrodynamiques limites λ_{\pm}^G et λ_{\pm}^D . Durant cette classification, on a remarqué que l'équation de Landau-Lifshitz peut décrire deux régimes limites :

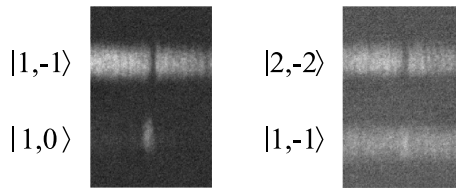
- un régime de densité relative élevée $|w - 1| \ll 0$ régit par une équation non-linéaire de Schrödinger (dont le problème de Gurevich-Pitaevskii a été résolu dans la Ref. [164]),
- un régime de vitesse relative élevée $|v - 1| \ll 0$ régit par une équation de Kaup-Boussinesq (dont l'étude fait l'objet de l'Article 3).

L'équation de Landau-Lifshitz constitue un modèle permettant de relier ces deux régimes à l'aide de solutions atypiques que l'on a qualifié d'ondes de choc mixtes (cf. la Section 4.c).

Bien que l'équation de Landau-Lifshitz ait été dérivée dans la limite $g_2 \ll g_1$, la comparaison avec les simulations numériques des équations de Gross-Pitaevskii (1.14) (cf. la Fig. 3.34) montre que les équations de Landau-Lifshitz constituent un très bon modèle de champ moyen pour décrire la dynamique de polarisation. Les résultats dérivés dans ce chapitre ne peuvent être ici comparés quantitativement à l'expérience [45] : dans l'expérience menée par le groupe d'Engels, le train de solitons sombre-brillant est généré par instabilité modulationnelle séparant alors les deux espèces. Ces structures ne correspondent pas aux solitons magnétiques dérivés ici (3.73) et violent la condition de mélange $\theta \neq 0[\pi]$ utilisée pour dériver la dynamique de Landau-Lifshitz. Très récemment, une nouvelle expérience [143] a été développée dans une situation proche de la *vraie* miscibilité $\theta \neq 0[\pi]$ (cf. la Fig. 3.35). Dans cette expérience, les auteurs étudient la propagation d'un soliton sombre – anti-sombre (*dark-antidark soliton* en anglais) ; cette nouvelle dénomination est justifiée par l'absence de contrainte sur la densité totale d'atomes : au contraire du soliton magnétique, le soliton sombre – anti-sombre ne constitue pas une excitation pure de la dynamique de polarisation : $\rho(x) \neq \rho_0$. Les résultats sont très prometteurs et ouvrent la

voie à l'observation expérimentale des ondes de choc dispersives présentées dans ce chapitre.

FIGURE 3.35 – Comparaison expérimentale entre le soliton sombre-brillant (à gauche) et le soliton sombre – anti-sombre (à droite) effectuée dans la Ref. [143]. Les deux situations sont réalisées pour un mélange de deux états hyperfins de l'atome de ^{87}Rb .



Article 2 : Dispersive hydrodynamics of nonlinear polarization waves in two-component Bose-Einstein condensates

Cet article représente une étape dans notre compréhension de la dynamique de polarisation. Nous avons dérivé explicitement toutes les solutions à *une phase* et résolu le problème de Riemann dans un cas particulier. Cela a été possible sans faire référence à l'intégrabilité des équations de Landau-Lifshitz : nous avons pour cela utilisé une méthode introduite par G. El [155] qui fournit des informations utiles mais non exhaustives sur l'onde de choc dispersive qui se forme lors de l'évolution spatio-temporelle du système.

Dispersive hydrodynamics of nonlinear polarization waves in two-component Bose-Einstein condensates

T. Congy^{1*}, A. M. Kamchatnov² and N. Pavloff¹

¹ LPTMS, CNRS, Univ. Paris-Sud, Université Paris-Saclay, 91405 Orsay, France

² Institute of Spectroscopy, Russian Academy of Sciences, Troitsk, Moscow, 108840, Russia

* thibault.congy@u-psud.fr

Abstract

We study one dimensional mixtures of two-component Bose-Einstein condensates in the limit where the intra-species and inter-species interaction constants are very close. Near the mixing-demixing transition the polarization and the density dynamics decouple. We study the nonlinear polarization waves, show that they obey a universal (i.e., parameter free) dynamical description, identify a new type of algebraic soliton, explicitly write simple wave solutions, and study the Gurevich-Pitaevskii problem in this context.



Copyright T. Congy *et al.*

This work is licensed under the Creative Commons

[Attribution 4.0 International License](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/).

Published by the SciPost Foundation.

Received 01-08-2016

Accepted 21-10-2016

Published 25-10-2016

[doi:10.21468/SciPostPhys.1.1.006](https://doi.org/10.21468/SciPostPhys.1.1.006)

Contents

1	Introduction	2
2	Model and main equations	3
3	Traveling waves and solitons of polarization	6
4	Dispersionless approximation and simple-waves	10
4.1	Dispersionless hydrodynamics and Riemann equations	10
4.2	Simple wave solutions	11
5	Evolution of a step-like discontinuity	16
5.1	Hydrodynamic approximation	17
5.2	Whitham modulation theory and Gurevich-Pitaevskii problem	19
6	Discussion	22
7	Conclusion	24
A	Computation of the energy of a soliton	25
B	Effective demixing in a 1D trap	25
	References	27

1 Introduction

As demonstrated in various physical contexts, the interplay between dispersive and nonlinear effects can lead to a number of spectacular phenomena as, for instance, the formation of solitons and vortices. Bose-Einstein condensates (BECs) display both effects: (i) dispersion which is due to the so-called quantum pressure and (ii) nonlinear properties due to the interaction between the condensed atoms. Already in a pioneering paper, Bogoliubov [1] showed that the combination of these two features yields reconstruction of the ground state of the many-particle system, with formation of new types of elementary excitations—Bogoliubov quasiparticles. The generalization of the Bogoliubov method to nonuniform time-dependent systems by Gross [2] and Pitaevskii [3] permitted to develop the theory of quantum vortices and later Tsuzuki [4] demonstrated the existence of dark solitons in a one dimensional model of weakly interacting bosons. After the experimental realization of BEC in ultracold gases, dark solitons were observed first in a one-dimensional geometry under the form of dips propagating along a stationary background [5, 6] and then in two dimensions under the form of stationary oblique solitons [7–9] generated by the flow of an exciton-polariton condensate past an obstacle [10, 11]. More complicated nonlinear wave structures were experimentally observed [12] and interpreted as dispersive shock waves, the description of which can be developed in the framework of Whitham’s theory of modulations of nonlinear waves [12, 13] (for a recent review on modulation theory of nonlinear waves see, e.g., Ref. [14]).

The experimental realization of condensates consisting of two (or more) species has opened the possibility of studying even richer dynamics triggered by the additional degree(s) of freedom consisting in the relative motion of the components. These are new modes that can interact with each other leading, in particular, to different types of solitons. For two-component systems these new modes can be visualized as pertaining to two types of waves: “density waves” with in-phase motion of the two components and “polarization waves” with counter-phase motion of the components. In the simplest situations these two types of excitations decouple: the first type does not involve relative motion of the components and the second type of waves does not affect the total density of the condensate. In the small amplitude limit these two types of waves and the distinction between density and polarization excitations were studied, e.g., in Ref. [15].

It has been recently noticed [16] that the polarization dynamics can be separated from the density dynamics even for the case of large amplitude waves if the difference between intra- and inter-species interaction constants is small, and this observation was applied to the theory of polarization solitons—which were denoted as “magnetic solitons”. In the present paper we extend the method of Ref. [16] to the general case of polarization dynamics in two-component BECs with small difference between the nonlinear interaction constants. In section 2 we derive the general equations of the polarization dynamics. In section 3 we study their traveling wave solutions that include, as a limiting case, the soliton solution found in [16] and in Sec. 4 we study the dispersionless limit of the nonlinear polarization waves. This forms the basis for discussing in section 5 the evolution of initial discontinuities in the polarization distribution. We show that such discontinuities evolve into a wave structure consisting in a rarefaction wave separated from a dispersive shock wave by a plateau with constant polarization and relative flow velocity. The main characteristics of this structure are calculated with the use of Whitham theory and are shown to compare very well with the results of numerical simulations. The relevance of our results for experimental studies is discussed in section 6. Our conclusions are summarized in Sec. 7 and some technical aspects are detailed in Appendixes A and B.

2 Model and main equations

We consider a one-dimensional BEC system described by a two-component spinor order parameter $\Psi(x, t) = (\psi_\uparrow, \psi_\downarrow)^t$ (where the superscript t denotes the transposition) obeying the following coupled Gross-Pitaevskii equations

$$i\hbar\partial_t\psi_{\uparrow,\downarrow} + \frac{\hbar^2}{2m}\partial_x^2\psi_{\uparrow,\downarrow} - \left[g|\psi_{\uparrow,\downarrow}|^2 + (g - \delta g)|\psi_{\downarrow,\uparrow}|^2 \right] \psi_{\uparrow,\downarrow} = 0, \quad (1)$$

In Eqs. (1), it has been assumed that the two intra-species non linear coefficients $g_{\uparrow\uparrow}$ and $g_{\downarrow\downarrow}$ have the same value, denoted as g . For instance, this is exactly realized in the mixture of the two hyperfine states $|F = 1, m_F = \pm 1\rangle$ of ^{23}Na [19], and, to a good approximation, in the mixture of hyperfine states of ^{87}Rb considered in Ref. [20] ($|F, m_F\rangle = |1, 1\rangle$ and $|2, 2\rangle$). The inter-species coefficient $g_{\uparrow\downarrow}$ is written as $g - \delta g$, and we assume that

$$0 < \delta g \ll g. \quad (2)$$

Both conditions are realized in the above presented cases of ^{23}Na ($\delta g/g \simeq 0.07$) and ^{87}Rb ($\delta g/g \simeq 0.01$). The left condition is the mean-field miscibility condition of the two species (see, e.g., Refs. [21, 22]). The right condition will be shown later to lead to important simplifications in the dynamics of the system.

We represent the spinor wave function as

$$\begin{pmatrix} \psi_\uparrow \\ \psi_\downarrow \end{pmatrix} = \sqrt{\rho} e^{i\Phi/2} \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} e^{-i\phi/2} e^{-i\mu_\uparrow t/\hbar} \\ \sin \frac{\theta}{2} e^{i\phi/2} e^{-i\mu_\downarrow t/\hbar} \end{pmatrix}. \quad (3)$$

In this expression, $\rho(x, t)$ is the total density and $\theta(x, t)$ governs the linear densities of the two components: $\rho_\uparrow(x, t) = |\psi_\uparrow|^2$ and $\rho_\downarrow(x, t) = |\psi_\downarrow|^2$ (cf. Eqs. (18) in the case of a constant total density ρ_0). $\Phi(x, t)$ and $\phi(x, t)$ act as potentials for the velocity fields v_\uparrow and v_\downarrow of the two components. Namely

$$v_\uparrow(x, t) = \frac{\hbar}{2m}(\Phi_x - \phi_x), \quad v_\downarrow(x, t) = \frac{\hbar}{2m}(\Phi_x + \phi_x). \quad (4)$$

By means of the substitution (3) the Gross-Pitaevskii system (1) is cast into the form

$$\begin{aligned} \hbar\rho_t + \frac{\hbar^2}{2m} [\rho(\Phi_x - \phi_x \cos \theta)]_x &= 0, \\ \hbar\Phi_t + \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\rho_x^2}{2\rho^2} - \frac{\rho_{xx}}{\rho} \right) - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\cot \theta}{2\rho} (\rho \theta_x)_x + \frac{\hbar^2}{4m} (\Phi_x^2 + \phi_x^2 + \theta_x^2) + (2g - \delta g)(\rho - \rho_0) &= 0, \\ \hbar\theta_t + \frac{\hbar^2}{2m\rho} (\phi_x \rho \sin \theta)_x + \frac{\hbar^2}{2m} \Phi_x \theta_x &= 0, \\ \hbar\phi_t - \frac{\hbar^2}{2m\rho \sin \theta} (\rho \theta_x)_x + \frac{\hbar^2}{2m} \Phi_x \phi_x - \delta g \rho \cos \theta &= 0, \end{aligned} \quad (5)$$

where it is assumed that at equilibrium both components are at rest and both have the same uniform density. The total density is denoted as ρ_0 . In this case the chemical potentials take the same value: $\mu_\uparrow = \mu_\downarrow = (g - \delta g)\rho_0/2$. As is known, in such a system there are two types of waves that can be called “density” and “polarization” waves. In the small amplitude and long wavelength limit the velocity of polarization waves that correspond to the (mainly) relative motion of the components is equal to

$$c_p = \sqrt{\frac{\rho_0 \delta g}{2m}}. \quad (6)$$

In the limit (2) c_p is very small compared to the long wavelength velocity c_d of density waves [$mc_d^2 = \rho_0(g - \delta g/2)$]. Following Ref. [16], we introduce also the “polarization healing length”

$$\xi_p = \frac{\hbar}{\sqrt{2m\rho_0\delta g}}. \quad (7)$$

Then the characteristic time scale for the polarization dynamics can be measured in units of

$$T_p = \frac{\xi_p}{c_p} = \frac{\hbar}{\rho_0\delta g}. \quad (8)$$

T_p and ξ_p are much larger than the corresponding characteristic time and length associated with density waves, and for the study of the polarization nonlinear waves it is thus appropriate to pass to the non-dimensional variables

$$\zeta = \frac{x}{\xi_p}, \quad \tau = \frac{t}{T_p}. \quad (9)$$

Then a very important consequence can be inferred from the second equation (5) that, in new non-dimensional variables, can be written as

$$\frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} = \frac{\delta g}{2g} \cdot \left\{ \frac{\cot \theta}{\rho} (\rho \theta_\zeta)_\zeta - \Phi_\tau - \frac{\rho_\zeta^2}{2\rho^2} + \frac{\rho_{\zeta\zeta}}{\rho} - \frac{1}{2}(\Phi_\zeta^2 + \phi_\zeta^2 + \theta_\zeta^2) + \frac{\rho}{\rho_0} - 1 \right\}. \quad (10)$$

We see that for $\theta \sim 1$ at space and time scales of order (7) and (8), correspondingly, the right-hand side becomes small if $\delta g/g \ll 1$. In this case we can assume at the leading order that $\rho \approx \rho_0$, so that the polarization hydrodynamics is decoupled from the density dynamics. This important feature of the two-component BEC dynamics with a small difference of the inter and intra-nonlinear constants was first indicated in Ref. [16] for the case of polarization solitons. The appearance of the $\cot \theta$ -function in the first term in the braces shows that the condition $\delta g/g \ll 1$ should be complemented by another condition: θ should not be too close to zero or π so that the right-hand side of (10) remains small. Thus, in addition to (2), we assume also that

$$\max\{\theta, \pi - \theta\} \gg \frac{\delta g}{g}. \quad (11)$$

This condition implies that the densities ρ_\uparrow or ρ_\downarrow are not too close to ρ_0 or 0, cf. Eqs. (18).

If the conditions (2) and (11) are fulfilled, then the density and polarization dynamics are decoupled and we can study the polarization dynamics separately assuming that $\rho(x, t) = \rho_0 = \text{const}$ and disregarding the second equation in the system (5). This approximation greatly simplifies the other equations. The first one reduces to

$$(\Phi_\zeta - \phi_\zeta \cos \theta)_\zeta = 0. \quad (12)$$

If we choose to work in a reference frame in which there is no flux of the total density, Eq. (12) simplifies to

$$\Phi_\zeta = \phi_\zeta \cos \theta, \quad (13)$$

and Φ_ζ can then be excluded from the remaining two equations. This yields the system

$$\begin{aligned} \theta_\tau + 2\theta_\zeta \phi_\zeta \cos \theta + \phi_{\zeta\zeta} \sin \theta &= 0, \\ \phi_\tau - \cos \theta (1 - \phi_\zeta^2) - \frac{\theta_{\zeta\zeta}}{\sin \theta} &= 0. \end{aligned} \quad (14)$$

This closed system of nonlinear equations shows that, for time scales of order T_p and length scales of order ξ_p , the polarization degree of freedom decouples from the density degree of

freedom, even in the nonlinear regime. All dimensional parameters have been scaled out from Eqs. (14) which thus correspond to a universal behavior of polarization waves. Note here that the relevant characteristic time (8) and length (7) have been identified for equal densities of both components (and will keep the same value throughout the paper), but the validity of the system (14) does not rely on this assumption: it describes the polarization dynamics in the limit (11), for a system verifying (2). In this case, we see from Eq. (10), that the ratio of the amplitude of density waves with respect to the one of polarization waves is roughly of order $\delta g/g$.

The system (14) can be derived from the Hamilton principle of extremal action [16] for a Lagrangian $\Lambda = \int \mathcal{L} d\zeta$ with a Lagrangian density

$$\mathcal{L} = \phi_\tau \cos \theta - \frac{1}{2} \left[\theta_\zeta^2 + (\phi_\zeta^2 - 1) \sin^2 \theta \right]. \quad (15)$$

From this expression we can write the (correctly dimensioned) energy of the system under the form

$$E = \frac{1}{2} \rho_0^2 \delta g \xi_p \int d\zeta u(\zeta, \tau). \quad (16)$$

where

$$u = \phi_\tau \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_\tau} + \theta_\tau \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_\tau} - \mathcal{L} = \frac{1}{2} \left[\theta_\zeta^2 + (\phi_\zeta^2 - 1) \sin^2 \theta \right] \quad (17)$$

is the energy density corresponding to the Lagrangian (15). This expression coincides with the energy of ferromagnetic bodies in dissipationless Landau-Lifshitz theory [17] with account of dispersion and uniaxial easy-plane anisotropy.

The system (14) can be cast into other forms that may be more convenient in some instances. In particular, the angle θ is related to the density of each component by the formulas

$$\rho_\uparrow = \frac{1}{2} \rho_0 (1 + \cos \theta), \quad \rho_\downarrow = \frac{1}{2} \rho_0 (1 - \cos \theta), \quad (18)$$

hence

$$w \equiv \cos \theta = \frac{\rho_\uparrow - \rho_\downarrow}{\rho_0} \quad (19)$$

is the variable describing the variations of the relative density. On the other hand,

$$v \equiv \phi_\zeta = \frac{v_\downarrow - v_\uparrow}{2c_p} \quad (20)$$

represents the non-dimensional relative velocity of the components. In terms of the two variables (w, v) which have clear physical meanings, the system (14) takes the form

$$\begin{aligned} w_\tau - [(1 - w^2)v]_\zeta &= 0, \\ v_\tau - [(1 - v^2)w]_\zeta + \left[\frac{1}{\sqrt{1 - w^2}} \left(\frac{w_\zeta}{\sqrt{1 - w^2}} \right)_\zeta \right] &= 0. \end{aligned} \quad (21)$$

This system coincides with the one-dimensional version of the system derived in the recent preprint [18] for hydrodynamic description of magnetization dynamics in ferromagnetic thin films.

For subsonic flows with velocities $|v| < 1$ we can introduce a variable σ such that

$$v = \cos \sigma, \quad (22)$$

and then in terms of (θ, σ) -variables the system of equations of the polarization dynamics reads

$$\begin{aligned} \theta_\tau + 2 \cos \theta \cdot \cos \sigma \cdot \theta_\zeta - \sin \theta \cdot \sin \sigma \cdot \sigma_\zeta &= 0, \\ \sigma_\tau + 2 \cos \theta \cdot \cos \sigma \cdot \sigma_\zeta - \sin \theta \cdot \sin \sigma \cdot \theta_\zeta + \frac{1}{\sin \sigma} \left(\frac{\theta_{\zeta\zeta}}{\sin \theta} \right)_\zeta &= 0. \end{aligned} \quad (23)$$

The importance of distinguishing subsonic from supersonic flows—an essential assumption for being able to write the relation (22)—can be seen from the following observation: consider a stationary uniform background characterized by a relative density w_0 and a relative velocity v_0 . Linear perturbations of the form

$$w = w_0 + w', \quad v = v_0 + v', \quad \text{where} \quad w'(\zeta, \tau), v'(\zeta, \tau) \propto \exp[i(k\zeta - \omega\tau)],$$

obey the following dispersion relation:

$$\omega = \left(2w_0v_0 \pm \sqrt{(1-w_0^2)(1-v_0^2) + k^2} \right) k. \quad (24)$$

By definition we always have $|w_0| \leq 1$, however v_0 can have any value, and for $|v_0| > 1$ the frequency ω is complex for small enough wavevectors k . This implies a long wavelength instability of supersonic relative motions of two-component superfluids, more precisely for a background relative velocity $v_\downarrow - v_\uparrow$ larger than $2c_p$. This mechanism of instability has been first theoretically studied in Ref. [23], and the regime (2) we consider here corresponds to what is denoted as “strong coupling” in this reference.

We note here for future use that, for subsonic flows with $w_0 = \cos \theta_0$ and $v_0 = \cos \sigma_0$, the dispersion relation (24) can be written as

$$\omega = \left(2 \cos \sigma_0 \cos \theta_0 \pm \sqrt{\sin^2 \sigma_0 \sin^2 \theta_0 + k^2} \right) k. \quad (25)$$

The long wave length behavior of the dispersion relations (24) and (25) is linear and corresponds to a velocity of sound in the laboratory frame

$$c = 2w_0v_0 \pm \sqrt{(1-w_0^2)(1-v_0^2)} = 2 \cos \sigma_0 \cos \theta_0 \pm \sin \sigma_0 \sin \theta_0. \quad (26)$$

For a uniform system in which both components have equal densities ($w_0 = 0$) and no relative velocity ($v_0 = 0$) one gets $c = \pm 1$, i.e., going back to dimensional quantities, the speed of the polarization sound is c_p as expected.

3 Traveling waves and solitons of polarization

In this section we consider traveling wave for which the physical variables θ and v depend on $\xi = \zeta - V\tau$ only, V being the phase velocity of the wave. In the framework of the system (14) this corresponds in making the *ansatz* that the velocity potential $\phi(\zeta, \tau)$ and $\theta(\zeta, \tau)$ can be represented as

$$\phi(\zeta, \tau) = q\zeta + \tilde{\phi}(\xi), \quad \theta = \theta(\xi). \quad (27)$$

Substitution into the first equation of the system (14), multiplication by $\sin \theta$ and integration give at once

$$\tilde{\phi}_\xi = -q + V \cdot \frac{B - \cos \theta}{\sin^2 \theta}, \quad (28)$$

where B is an integration constant. Substituting this expression into the second equation of the system (14) gives after simple transformations the equation

$$\theta_{\xi\xi} = V^2 \cdot \frac{(B - \cos \theta)(B \cos \theta - 1)}{\sin^3 \theta} - \sin \theta \cos \theta + Vq \sin \theta. \quad (29)$$

Multiplication by θ_{ξ} and integration yield the final equation for the variable $w = \cos \theta$:

$$w_{\xi}^2 = -Q(w), \quad \text{with} \quad Q(w) = w^4 - 2Vqw^3 + (C - 1)w^2 + 2V(q - VB)w + V^2(1 + B^2) - C, \quad (30)$$

where C is an integration constant. The four parameters V, q, B, C can be expressed in terms of the four zeroes $w_1 \leq w_2 \leq w_3 \leq w_4$ of the polynomial

$$Q(w) = \prod_{i=1}^4 (w - w_i) = w^4 - s_1 w^3 + s_2 w^2 - s_3 w + s_4, \quad (31)$$

where the s_i 's are standard symmetric functions of the zeroes w_i ¹. In particular, we obtain

$$V = \pm \frac{1}{2} \left[Q(1) + Q(-1) + 2\sqrt{Q(1)Q(-1)} \right]^{1/2}, \quad (32)$$

and

$$q = \frac{s_1}{2V}. \quad (33)$$

The solution of Eq. (30) can be expressed in terms of Jacobi elliptic functions and, without going into well-known details (see, e.g., [24]), we shall present here the final results.

The variable w can oscillate between two zeroes of the polynomial $Q(w)$ where $Q(w) \leq 0$ provided these two zeroes are located in the interval $[-1, 1]$. There are two possibilities, labeled as (A) and (B) below.

(A) In the first case the periodic solution corresponds to oscillations of w in the interval

$$w_1 \leq w \leq w_2. \quad (34)$$

The solution of Eq. (30) can be written as

$$\xi = \int_{w_1}^w \frac{dw}{\sqrt{(w - w_1)(w_2 - w)(w_3 - w)(w_4 - w)}}. \quad (35)$$

To simplify the notations, we put in (35) (and in all subsequent similar equations) the integration constant ξ_0 equal to zero. A standard calculation yields

$$w = w_2 - \frac{(w_2 - w_1) \text{cn}^2(W, m)}{1 + \frac{w_2 - w_1}{w_4 - w_2} \text{sn}^2(W, m)}, \quad (36)$$

where

$$W = \sqrt{(w_3 - w_1)(w_4 - w_2)} \xi / 2, \quad m = \frac{(w_4 - w_3)(w_2 - w_1)}{(w_4 - w_2)(w_3 - w_1)}, \quad (37)$$

cn and sn being Jacobi elliptic functions [25]. The wavelength is given by

$$L = \frac{4K(m)}{\sqrt{(w_3 - w_1)(w_4 - w_2)}}, \quad (38)$$

¹ $s_1 = \sum_i w_i, s_2 = \sum_{i \neq j} w_i w_j, s_3 = \sum_{i \neq j \neq k \neq i} w_i w_j w_k$ and $s_4 = \prod_i w_i$.

where $K(m)$ is the complete elliptic integral of the first kind [25]. In the limit $w_3 \rightarrow w_2$ ($m \rightarrow 1$) the wavelength tends to infinity and the solution (36) transforms to a soliton

$$w = w_2 - \frac{w_2 - w_1}{\cosh^2 W + \frac{w_2 - w_1}{w_4 - w_2} \sinh^2 W}. \tag{39}$$

This is a “dark soliton” for the variable $w = \cos \theta$.

The limit $m \rightarrow 0$ can be reached in two ways.

(i) If $w_2 \rightarrow w_1$, then we get

$$w \cong w_2 - \frac{1}{2}(w_2 - w_1) \cos[k(\zeta - V\tau)], \quad \text{where } k = \sqrt{(w_3 - w_1)(w_4 - w_1)}. \tag{40}$$

This is a small-amplitude limit describing propagation of a harmonic wave.

(ii) If $w_4 = w_3$ but $w_1 \neq w_2$, then we get a nonlinear wave represented in terms of trigonometric functions:

$$w = w_2 - \frac{(w_2 - w_1) \cos^2 W}{1 + \frac{w_2 - w_1}{w_3 - w_2} \sin^2 W}, \quad \text{where } W = \sqrt{(w_3 - w_1)(w_3 - w_2)} \xi / 2. \tag{41}$$

If we take the limit $w_2 - w_1 \ll w_3 - w_1$ in this solution, then we return to the small-amplitude limit (40) with $w_4 = w_3$. On the other hand, if we take here the limit $w_2 \rightarrow w_3 = w_4$, then the trigonometric functions in (41) have a small argument and can be approximated by the first terms of their series expansions. This yields a solution which we denote as an “algebraic soliton”:

$$w = w_2 - \frac{w_2 - w_1}{1 + (w_2 - w_1)^2 (\zeta - V\tau)^2 / 4}. \tag{42}$$

(B) In the second case the variable w oscillates in the interval

$$w_3 \leq w \leq w_4 \tag{43}$$

so that instead of (35) we get

$$\xi = \int_{w_3}^w \frac{dw}{\sqrt{(w - w_1)(w - w_2)(w - w_3)(w_4 - w)}}. \tag{44}$$

Again, a standard calculation yields

$$w = w_3 + \frac{(w_4 - w_3) \text{cn}^2(W, m)}{1 + \frac{w_4 - w_3}{w_3 - w_1} \text{sn}^2(W, m)}. \tag{45}$$

with the same definitions for W , m , and L as in Eqs. (37) and (38). In the soliton limit $w_3 \rightarrow w_2$ ($m \rightarrow 1$) we get

$$w = w_2 + \frac{w_4 - w_2}{\cosh^2 W + \frac{w_4 - w_2}{w_2 - w_1} \sinh^2 W}. \tag{46}$$

This is a “bright soliton” for the variable $w = \cos \theta$.

Again, the limit $m \rightarrow 0$ can be reached in two ways.

(i) If $w_4 \rightarrow w_3$, then we obtain a small-amplitude harmonic wave

$$w \cong w_3 + \frac{1}{2}(w_4 - w_3) \cos[k(\zeta - V\tau)], \quad \text{where } k = \sqrt{(w_3 - w_1)(w_3 - w_2)}. \tag{47}$$

This is a small-amplitude limit describing a harmonic wave.

(ii) If $w_2 = w_1$, then we obtain another nonlinear trigonometric solution,

$$w = w_3 + \frac{(w_4 - w_3) \cos^2 W}{1 + \frac{w_4 - w_3}{w_3 - w_1} \sin^2 W}, \quad \text{where } W = \sqrt{(w_3 - w_1)(w_4 - w_1)} \xi / 2. \quad (48)$$

If we assume in this solution $w_4 - w_3 \ll w_4 - w_1$, then we reproduce the small-amplitude limit (47) with $w_2 = w_1$. On the other hand, in the limit $w_3 \rightarrow w_2 = w_1$ we obtain the algebraic soliton solution:

$$w = w_1 + \frac{w_4 - w_1}{1 + (w_4 - w_1)^2 (\zeta - V\tau)^2 / 4}. \quad (49)$$

This ends the general presentation of the different solutions of Eq. (30).

It is now interesting to discuss in more detail the soliton solutions which play a special role in the description of dispersive shock waves (Sec. 5.2). The bright soliton solution (46) corresponds to an increased number of particles in the “up” component:

$$\Delta N_{\uparrow} = \int dx (\rho_{\uparrow}^{\text{sol}} - \rho_{\uparrow}^{(0)}), \quad (50)$$

where $\rho_{\uparrow}^{(0)} = \rho_0(1 + w_2)/2$ is the background density of the up component and $\rho_{\uparrow}^{\text{sol}}(\zeta, \tau) = \rho_0(1 + w)/2$, $w(\xi)$ being given by (46). One gets

$$\Delta N_{\uparrow} = 2 \rho_0 \xi_p \arctan \sqrt{\frac{w_4 - w_2}{w_2 - w_1}}. \quad (51)$$

The soliton is characterized by the three zeros w_1 , $w_2 (= w_3)$ and w_4 which relate to the physical variables w_0 (relative background density of the components), V (velocity of the soliton) and v_0 (relative background velocity of the components) through

$$w_2 = w_0, \quad \text{and} \quad w_{4/1} = v_0(V - v_0 w_0) \pm \sqrt{(1 - v_0^2)[1 - (V - v_0 w_0)^2]}. \quad (52)$$

The energy of the soliton is the difference between the energy (16) of the system in the presence and in the absence of the soliton. It reads $E_{\text{sol}} = \frac{1}{2} \delta g \rho_0^2 \xi_p \mathcal{E} = \frac{1}{2} \hbar \rho_0 c_p \mathcal{E}$ where

$$\mathcal{E} = \int d\zeta \left[u(\xi) - \frac{1}{2} (v_0^2 - 1)(1 - w_0^2) \right], \quad (53)$$

$u(\xi)$ being here the energy density (17) computed for the distribution (46). It is shown in Appendix A that

$$\mathcal{E} = 2 \sqrt{(w_4 - w_2)(w_2 - w_1)} = 2 \sqrt{(1 - v_0^2)(1 - w_0^2) - (V - 2v_0 w_0)^2}. \quad (54)$$

The soliton solution found in [16] is reproduced from Eqs. (39) and (46) if we consider the situation where the two components have equal background densities ($w_0 = 0$), and no relative velocity ($v_0 = 0$). In this case, one gets from Eq. (52)

$$w_2 = w_3 = 0, \quad \text{and} \quad w_{4/1} = \pm \sqrt{1 - V^2}, \quad (55)$$

that is $Q(w) = w^2(w^2 - 1 + V^2)$ which agrees with formula (32). As a result we obtain

$$w = \cos \theta = \pm \frac{\sqrt{1 - V^2}}{\cosh[\sqrt{1 - V^2}(\zeta - V\tau)]}, \quad (56)$$

and Eqs. (18) give the corresponding densities of each component. From (51) and (54), one sees that this soliton corresponds to an increase of the number particles of the up component

$\Delta N_{\uparrow} = \frac{\pi}{2} \rho_0 \xi_p$ and to an energy $E_{\text{sol}} = \hbar \rho_0 c_p \sqrt{1 - V^2}$, in agreement with the findings of Ref. [16]. Note however that the existence of polarization solitons of the form (39) and (46) is not restricted to the condition of equal background densities $\rho_{\uparrow 0} = \rho_{\downarrow 0}$ considered in Ref. [16].

Our approach made it possible to identify new algebraic solitons (42) and (49) with unique properties which we now briefly discuss. The algebraic soliton (49) can be obtained as the limit $w_2 (= w_3) \rightarrow w_1$ of (46). It corresponds to an increased number of “up” particles $\Delta N_{\uparrow} = \pi \rho_0 \xi_p$. At variance with the case of dark/bright solitons, once the background parameters w_0 and v_0 are fixed, the velocity V of an algebraic soliton is not free. One finds that it is fixed to be exactly the sound velocity (26). For an algebraic soliton, one has $w_2 \rightarrow w_1$ and thus the energy (54) of such a soliton is zero, as can be checked directly from (49) and (53).

Also note that the dark/bright solitons (39) and (46) are of a quite different nature than the one identified by Busch and Anglin in Ref. [26] and observed in Ref. [27]. It can be shown that if one considers the limit of a stationary soliton of type (46) with no pedestal ($w_0 \rightarrow -1$), then one does not reach the limit of the dark-bright solitons of Ref. [26], but instead one obtains an algebraic soliton of the form $\rho_{\uparrow}(\zeta, \tau) = \rho_0 (1 + \zeta^2)^{-1}$.

4 Dispersionless approximation and simple-waves

4.1 Dispersionless hydrodynamics and Riemann equations

If the velocity and density distributions v and w are smooth enough, that is, if they experience little change over one polarization healing length (7), then we can neglect the dispersion effects described by the last terms in the second equations of the systems (21) and (23)². This corresponds to the so-called dispersionless approximation. We shall present the corresponding equations in two forms—for the variables (w, v) ,

$$w_{\tau} - [(1 - w^2)v]_{\zeta} = 0, \quad v_{\tau} - [(1 - v^2)w]_{\zeta} = 0, \quad (57)$$

and for the variables (θ, σ) ,

$$\begin{aligned} \theta_{\tau} + 2 \cos \theta \cdot \cos \sigma \cdot \theta_{\zeta} - \sin \theta \cdot \sin \sigma \cdot \sigma_{\zeta} &= 0, \\ \sigma_{\tau} + 2 \cos \theta \cdot \cos \sigma \cdot \sigma_{\zeta} - \sin \theta \cdot \sin \sigma \cdot \theta_{\zeta} &= 0. \end{aligned} \quad (58)$$

These are equations of hydrodynamic type which can be studied by means of well documented methods.

First of all, we find at once from the system (58) that the variables

$$r_1 = \sigma - \theta, \quad \text{and} \quad r_2 = \sigma + \theta \quad (59)$$

satisfy the equations

$$\frac{\partial r_{1,2}}{\partial \tau} + V_{1,2}(r_1, r_2) \frac{\partial r_{1,2}}{\partial \zeta} = 0, \quad (60)$$

where

$$V_{1,2} = \frac{3}{2} \cos r_{1,2} + \frac{1}{2} \cos r_{2,1} = 2 \cos \sigma \cos \theta \pm \sin \sigma \sin \theta, \quad (61)$$

or in terms of the variables (v, w)

$$V_{1,2} = 2vw \pm \sqrt{(1 - w^2)(1 - v^2)}. \quad (62)$$

²In this regime, the dispersion relation (24) can be approximated by a straight line of slope c [c being the speed of sound, as given by (26)], which is legitimate when $k \ll 1$, i.e., for wave lengths large compared to ξ_p .

The characteristic velocities V_1 and V_2 are the velocities of propagation of small disturbances along a non-uniform background (θ, σ) or (w, v) , correspondingly. In the case of a uniform background $w = w_0 = \cos \theta_0$, $v = v_0 = \cos \sigma_0$ they coincide with the sound velocities (26). The variables $r_{1,2}$ are called Riemann invariants, and Eqs. (60) are the hydrodynamic equations written in the Riemann invariant form (see, e.g., Ref. [28]). They have the familiar form of equations of compressible gas dynamics written in terms of the Riemann invariants, however the relationships between the Riemann invariants and the physical variables are more complicated here than for a gaseous system. Once r_1 and r_2 have been found, the physical variables w, v are given by

$$w = \cos[(r_1 - r_2)/2], \quad v = \cos[(r_1 + r_2)/2]. \quad (63)$$

At this point, we have reduced the polarization hydrodynamic equations to the symmetric Riemann form (60). We shall now study a special class of solutions of these equations.

4.2 Simple wave solutions

In the framework of the hydrodynamic approximation a special role is played by the so-called *simple wave* solutions that are characterized by the fact that one of the Riemann invariants (59) is constant along the solution, so that the system (60) reduces to a single equation of the Hopf type. For example, let $r_2 = r_2^0 = \text{const}$; then we get the equation

$$\frac{\partial r_1}{\partial \tau} + V_1(r_1, r_2^0) \frac{\partial r_1}{\partial \zeta} = 0 \quad (64)$$

for the variable r_1 . This equation admits the well-known solution

$$\zeta - V_1(r_1, r_2^0) \tau = f(r_1), \quad (65)$$

where $f(r_1)$ is an arbitrary function. Equation (65) determines the dependence of r_1 on ζ and τ in an implicit form. The function $f(r_1)$ can be thought of as the inverse function of the initial distribution of r_1 at the moment $\tau = 0$, i.e., $f^{-1}(\zeta) = r_1(\zeta, \tau = 0)$. The simple wave solution with constant Riemann invariant $r_1 = r_1^0 = \text{const}$ can be easily written in a similar form.

The importance of the simple wave solutions is related to the fact that, generally speaking, a hydrodynamic solution of a typical problem consists of different functions defined on several regions in the (ζ, τ) -plane separated by lines of discontinuity of the fields (here θ and σ). Along the so-called *weak discontinuities* one has discontinuities of the derivatives while the functions remain continuous. In particular, if the fluid flow has a boundary with adjacent quiescent fluid, then this boundary is a weak discontinuity and the neighboring flow is described by a simple wave solution (see, e.g., [28]).

A special role is played by self-similar solutions, for which $r_{1,2}$ depend on the self-similar variable $z = \zeta/\tau$ only. In particular, such solutions appear in problems where the initial distributions do not contain parameters with dimension of a length, e.g., in the case of initial discontinuities with abrupt jumps of the variables w and/or v (θ and/or σ). The jump occurs at some coordinate that can be taken as the origin of the ζ -coordinate frame. In this case, $r_{1,2} = r_{1,2}(z)$ and the hydrodynamic equations (60) take the form

$$(V_1 - z) \frac{dr_1}{dz} = 0, \quad (V_2 - z) \frac{dr_2}{dz} = 0. \quad (66)$$

Their solutions are evidently

$$\begin{aligned} r_2 = r_2^0 = \text{const}, \quad \text{and} \quad V_1(r_1, r_2^0) = z, \\ \text{or} \quad r_1 = r_1^0 = \text{const}, \quad \text{and} \quad V_2(r_1^0, r_2) = z. \end{aligned} \quad (67)$$

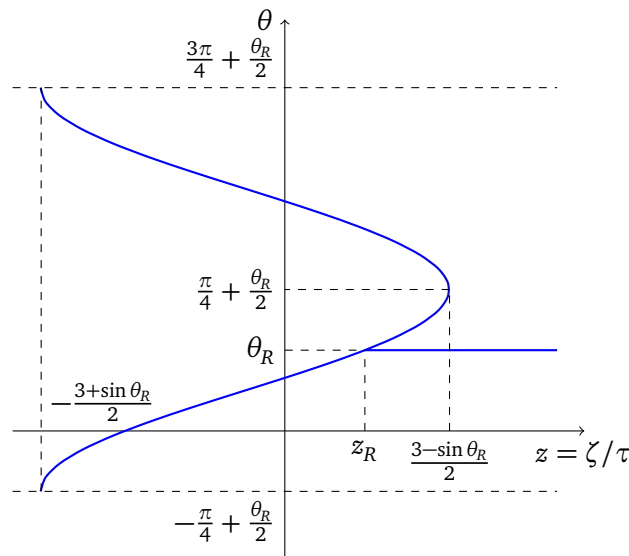


Figure 1: Distribution of $\theta(z)$ in the simple wave solution with fixed value of $r_2 = \sigma + \theta = \pi/2 + \theta_R$. The flow is attached on its right side to a condensate at rest with $\theta = \theta_R$ and $\sigma = \pi/2$ which corresponds to the horizontal line. Here $z_R = \sin \theta_R$.

These are particular cases of simple wave solutions (65) with $f \equiv 0$. Eqs. (67) yield for the variable θ the distributions

$$\begin{aligned} \theta &= \pm \frac{1}{2} \arccos \left(\frac{2}{3}z - \frac{1}{3} \cos r_2^0 \right) + \frac{1}{2}r_2^0 + n\pi, \\ \text{or } \theta &= \pm \frac{1}{2} \arccos \left(\frac{2}{3}z - \frac{1}{3} \cos r_1^0 \right) - \frac{1}{2}r_1^0 + n\pi, \end{aligned} \tag{68}$$

where the values of the constants (r_2^0 or r_1^0 and $n \in \mathbb{Z}$) and the signs are to be determined from the boundary conditions.

Let us consider here such solutions in the case where a dispersionless polarization flow is neighboring a condensate at rest. We shall first consider a self-similar simple wave matching at its right side a quiescent condensate (i.e., with $\sigma = \pi/2$) where $\theta = \theta_R = \text{const}$. It is easy to see from simple considerations [28] that its right edge, being a weak discontinuity, must propagate to the right with the sound velocity $c = \sin \theta_R$ [cf., (26)]; that is, this self-similar flow has to satisfy the boundary condition $\theta = \theta_R$ at $z = z_R = \sin \theta_R$. Simple inspection shows that this is achieved by the first of solutions (68) (where $r_2 = \sigma + \theta = \pi/2 + \theta_R = \text{const}$) with a lower sign and $n = 0$. Hence, owing to the relation $\arccos x = \pi/2 - \arcsin x$, we obtain

$$\theta = \frac{1}{2} \arcsin \left(\frac{2}{3}z + \frac{1}{3} \sin \theta_R \right) + \frac{1}{2}\theta_R, \tag{69}$$

and, consequently, by virtue of constancy of $r_2 = r_2^0 = \frac{\pi}{2} + \theta_R$,

$$\sigma = \frac{1}{2}\pi + \theta_R - \theta. \tag{70}$$

It is usually supposed that θ takes values in the interval $0 \leq \theta \leq \pi$, however any interval of same length is suitable for the description of the physical variable $w = \cos \theta$. We shall use here the equivalent interval

$$-\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}\theta_R \leq \theta \leq \frac{3}{4}\pi + \frac{1}{2}\theta_R \tag{71}$$

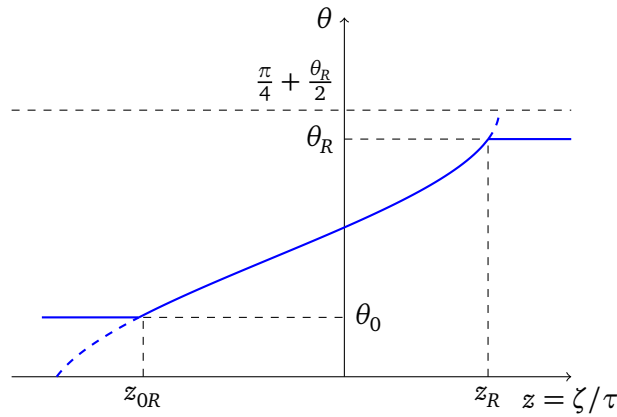


Figure 2: Distribution of $\theta(z)$ in the simple wave solution; case (a) (see (73)). Here $z_R = \sin \theta_R$, $z_{0R} = \frac{3}{2} \sin(2\theta_0 - \theta_R) - \frac{1}{2} \sin \theta_R$.

which is more suitable for the solution (69). The solution (69) does not cover all the interval (71) over which one has

$$z(\theta) = \frac{3}{2} \sin(2\theta - \theta_R) - \frac{1}{2} \sin \theta_R. \quad (72)$$

The resulting plot is displayed in Fig. 1 for a value of θ_R chosen in the interval $0 < \theta_R < \pi$.

The left edge of this wave must have a boundary either with one of the general solutions of equations (60), or with another simple wave with constant values of σ and θ (that is, with a plateau in the density distribution). For future applications we shall confine ourselves to the second possibility and demand that the left edge of the solution corresponds to $\theta = \theta_0$ and, consequently, to $\sigma = \sigma_0 = \pi/2 + \theta_R - \theta_0$, since r_2 is constant across our simple wave. Here we have to distinguish two main typical situations denoted as (a) and (b) below.

Case (a): If

$$-\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}\theta_R < \theta_0 < \theta_R, \quad (73)$$

then the constant left flow characterized by σ_0 and θ_0 is connected with the quiescent condensate at the right by a rarefaction wave shown in Fig. 2 (region $z_{0R} < z < z_R$ of this figure) whose left edge propagates with velocity

$$z_{0R} = \frac{3}{2} \sin(2\theta_0 - \theta_R) - \frac{1}{2} \sin \theta_R. \quad (74)$$

The corresponding distributions of the density ρ_1 and the flow velocity $v = \cos \sigma = \sin(\theta - \theta_R)$ are shown in Figs. 3 and 4, respectively.

Case (b):

$$\theta_R < \theta_0 < \frac{3}{4}\pi + \frac{1}{2}\theta_R. \quad (75)$$

We will see that in this case there is an interval on the z -axis where the formal solution of the hydrodynamic equations becomes three-valued. Although such a solution does not have a direct physical meaning, it provides important relations remaining correct after replacement of the nonphysical multi-valued parts of the flow by a dispersive shock wave. To be definite, we illustrate such a situation in Fig. 5 which is drawn in the subcase we denote as (b1) in which

$$\theta_R < \theta_0 < \frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}\theta_R. \quad (76)$$

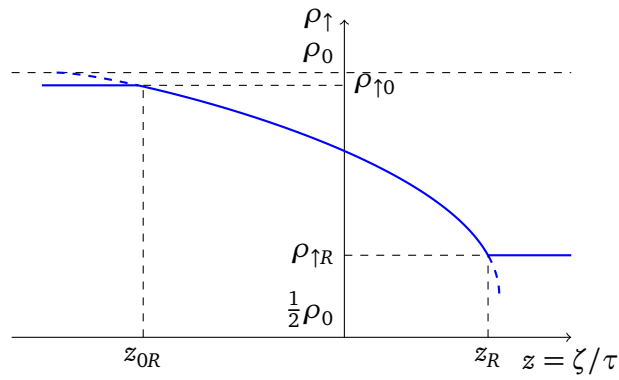


Figure 3: Distribution of $\rho_{\uparrow}(z)$ in the simple wave solution; case (a). Here $z_R = \sin \theta_R$, $z_{0R} = \frac{3}{2} \sin(2\theta_0 - \theta_R) - \frac{1}{2} \sin \theta_R$, $\rho_{\uparrow 0} = \rho_0 \cos^2(\theta_0/2)$, $\rho_{\uparrow R} = \rho_0 \cos^2(\theta_R/2)$.

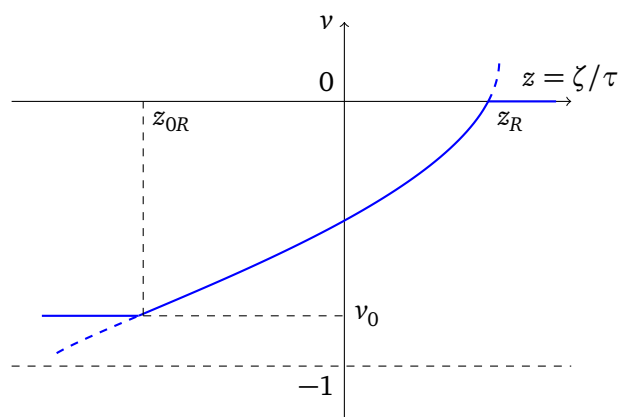


Figure 4: Distribution of $v(z)$ in the simple wave solution; case (a). Here $v_0 = \sin(\theta_0 - \theta_R)$.

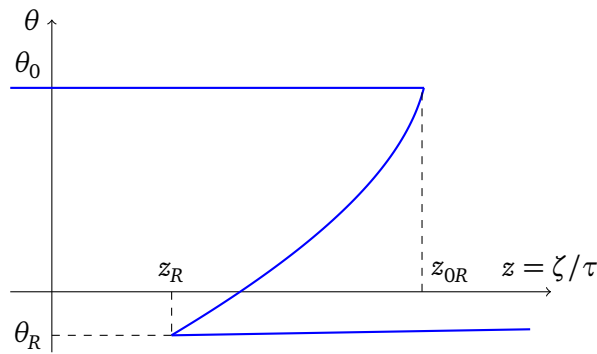


Figure 5: Distribution of $\theta(z)$ in the simple wave solution; case (b1) (see (76)). Here $z_R = \sin \theta_R$, $z_{0R} = \frac{3}{2} \sin(2\theta_0 - \theta_R) - \frac{1}{2} \sin \theta_R$.

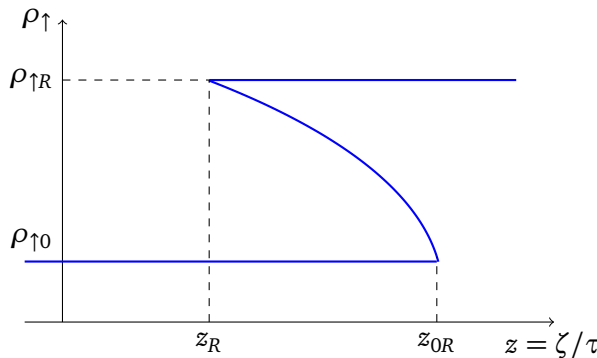


Figure 6: Distribution of $\rho_{\uparrow}(z)$ in the simple wave solution; case (b1). Here $z_R = \sin \theta_R$, $z_{0R} = \frac{3}{2} \sin(2\theta_0 - \theta_R) - \frac{1}{2} \sin \theta_R$.

In this case, in the region of the simple wave, $\theta(z)$ is given by the single-valued solution (69), but the matching with the left and right boundaries can only be performed at the price of overlapping the region of validity of the single wave solution with the ones of the plateau at the boundary. This corresponds to an overall multi-valued solution, as shown in Fig. 5. The corresponding plot of the density is shown in Fig. 6 and a similar graph can be plotted for the flow velocity $v(z)$.

In the subcase we denote as (b2) for which

$$\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}\theta_R < \theta_0 < \frac{3}{4}\pi + \frac{1}{2}\theta_R, \tag{77}$$

the simple wave solution obtained from (72) already corresponds to a multi-valued $\theta(z)$ and the graphs of the formal hydrodynamic solutions can be easily plotted.

Let us now turn to a self-similar simple wave propagating to the left into a quiescent condensate with $\sigma = \pi/2$, $\theta = \theta_L = \text{const}$. This problem is obviously symmetric to the one just studied: the left edge of the wave propagates here to the left with the sound velocity $c = -\sin \theta_L$ that is, we have to satisfy the boundary condition $\theta = \theta_L$ at $z = z_L = -\sin \theta_L$. This time we have to consider the second of solutions (68) (where $r_1 = \sigma - \theta = \pi/2 - \theta_L = \text{const}$) with an upper sign and $n = 0$. Hence, we obtain

$$\theta = -\frac{1}{2} \arcsin\left(\frac{2}{3}z - \frac{1}{3} \sin \theta_L\right) + \frac{1}{2}\theta_L, \tag{78}$$

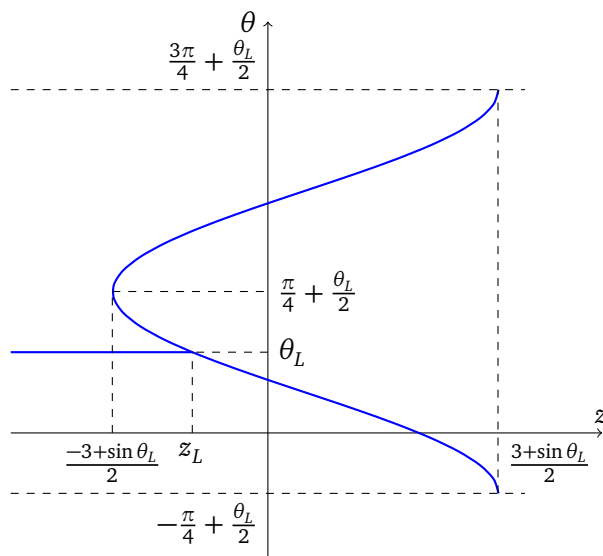


Figure 7: Distribution of $\theta(z)$ in the simple wave solution with fixed value of $r_1 = \sigma - \theta = \pi/2 - \theta_L$. The flow with $\theta = \theta_L$ and $\sigma = \pi/2$ (condensate at rest) can be attached to this solution on its left edge. It is shown by the horizontal line. Here $z_L = -\sin \theta_L$.

and, consequently,

$$\sigma = \frac{1}{2}\pi - \theta_L + \theta. \tag{79}$$

It is clear that the plots for this case can be obtained from the previous ones by the change $z \rightarrow -z$ replacing the notation $\theta_R \rightarrow \theta_L$, etc. Therefore we shall illustrate such a situation only by the plot of $\theta(z)$ which is displayed in Fig. 7.

Thus, we have obtained simple wave solutions which match on one boundary with a quiescent uniform condensate, and on the other with a flow with constant density and velocity—the “plateau solution”.

Two important typical situations have been identified in this section. First, in some cases, the plateau solution can be connected to a simple wave solution joining a quiescent condensate on its other boundary. This is the situation illustrated in Figs. 3 and 4. For such flows the dispersionless hydrodynamic approach is indeed legitimate, and it is just expected that a more precise treatment of the weak discontinuities should exhibit a small amount of linear radiation (on both sides of the simple wave). Such flows are called *rarefaction waves*. Second, in some instances, the solution of the dispersionless hydrodynamic approach is multi-valued in some regions of space, cf. Fig. 6. In these regions, the physical flow is expected to be a *dispersive shock wave*, as commonly encountered in similar situations. In the next section we shall consider a configuration where these two possibilities are realized.

5 Evolution of a step-like discontinuity

As a typical application of the theory, let us consider an initial step-like distribution of polarization

$$\theta(\zeta, \tau = 0) = \begin{cases} \theta_L, & \text{when } \zeta < 0, \\ \theta_R, & \text{when } \zeta > 0. \end{cases} \tag{80}$$

and we assume here that the left and right asymptotic regions are both initially at rest,

$$\sigma(\zeta, \tau = 0) = \begin{cases} \sigma_L = \frac{\pi}{2}, & \text{when } \zeta < 0, \\ \sigma_R = \frac{\pi}{2}, & \text{when } \zeta > 0. \end{cases} \quad (81)$$

We shall consider this problem in the framework of the polarization dynamics governed by Eqs. (14), (21) or (23). We shall begin with the dispersionless hydrodynamic approximation corresponding to Eqs. (57) or (58) that can be written in the Riemann invariant form (60).

5.1 Hydrodynamic approximation

The step-like discontinuity evolves into a wave whose edges propagate into quiescent regions located at $\zeta \rightarrow \pm\infty$. If such an edge is represented by a weak discontinuity, then the adjacent flow is described by a simple wave solution. The step-like initial distribution (80) does not include any parameter having the dimension of a length and, consequently, the solution has to depend only on the self-similar variable $z = \zeta/\tau$ (and of course also, parametrically, on θ_L and θ_R).

One cannot find a single simple wave joining its right and left boundaries with asymptotic regions corresponding to the initial conditions (80) and (81). Instead, the initial discontinuity evolves, for $\tau > 0$, into a more complex structure: an expanding self-similar wave consisting of two simple waves separated by a plateau characterized by the constant parameters θ_0 and σ_0 . One edge of each simple wave has a boundary with a condensate whose parameters are given by one (the left or the right) of the boundary conditions (80) and (81), the other edge matching the plateau distribution. As was discussed in the preceding section, along the simple wave solution [matching with the left asymptotic region $\sigma = \pi/2$, $\theta = \theta_L$] we have $r_1 = \sigma - \theta = \pi/2 - \theta_L = \sigma_0 - \theta_0$, and along the other simple wave solution [matching with the right asymptotic region $\sigma = \pi/2$, $\theta = \theta_R$] we have $r_2 = \sigma + \theta = \pi/2 + \theta_R = \sigma_0 + \theta_0$. These two conditions determine the parameters of the flow on the plateau:

$$\theta_0 = \frac{1}{2}(\theta_L + \theta_R), \quad \sigma_0 = \frac{1}{2}(\theta_R - \theta_L + \pi). \quad (82)$$

Combining with the simple wave solutions (whose characteristics are discussed in the previous section), we find the full solution of the problem – determined within the dispersionless approach – under the form

$$\theta(z) = \begin{cases} \theta_L, & z < z_L, \\ \frac{1}{2}\theta_L - \frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{2}{3}z - \frac{1}{3}\sin\theta_L\right), & z \in (z_L, z_{0L}), \\ \frac{1}{2}(\theta_L + \theta_R), & z_{0L} < z < z_{0R}, \\ \frac{1}{2}\theta_R + \frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{2}{3}z + \frac{1}{3}\sin\theta_R\right), & z \in (z_{0R}, z_R), \\ \theta_R, & z > z_R, \end{cases} \quad (83)$$

where

$$\begin{aligned} z_L &= -\sin\theta_L, \\ z_{0L} &= \frac{1}{2}\sin\theta_L - \frac{3}{2}\sin\theta_R, \\ z_{0R} &= \frac{3}{2}\sin\theta_L - \frac{1}{2}\sin\theta_R, \\ z_R &= \sin\theta_R. \end{aligned} \quad (84)$$

The edge at $\zeta = -z_L \cdot \tau$ propagates to the left at velocity $-\sin\theta_L$ which is the sound velocity in the left condensate. The edge at $\zeta = z_R \cdot \tau$ propagates to the right with velocity $\sin\theta_R$ which

is the sound velocity in the right condensate [cf. (26)], and the plateau is located between the edges $z_{0L} \cdot \tau \leq \zeta \leq z_{0R} \cdot \tau$.

Thus, for given values of the densities at both sides of the initial discontinuity (i.e. for given values of θ_L and θ_R) one can calculate the parameters θ_0, σ_0 defining the plateau distribution from (82) and determining the “left” and “right” simple wave solutions joining the quiescent condensates with the plateau. One of these simple waves represents a rarefaction wave and the other one describes a formal non-physical multi-valued solution. This means that the hydrodynamic approximation fails in the region where the flow is multi-valued and we have there to take into account the dispersion effects neglected in the long wavelength hydrodynamic theory. As a result of dispersion effects, the multi-valued region is replaced by a dispersive shock wave which is an oscillatory nonlinear wave structure. Such a situation is illustrated in Fig. 8. There the orange line describes the hydrodynamic approximation (83), for

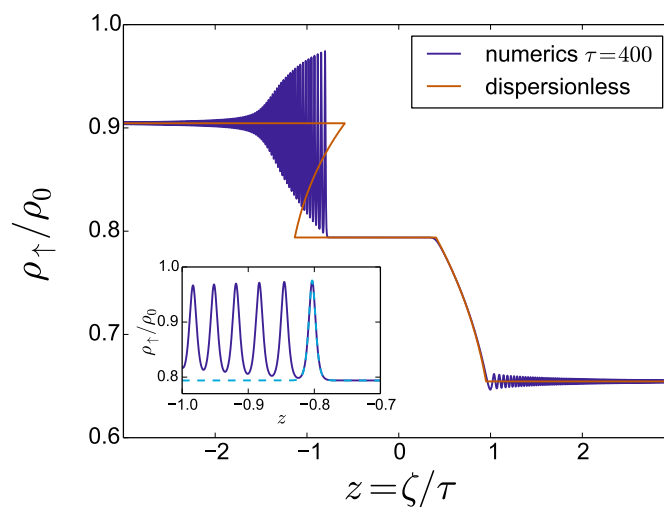


Figure 8: ρ_{\uparrow}/ρ_0 plotted as a function of $z = \zeta/\tau$ at $\tau = 400$. The initial profile is given by (85) and (86). The left and right asymptotic densities are $\rho_{\uparrow,L}/\rho_0 = \cos^2(\theta_L/2) = 0.9045$ and $\rho_{\uparrow,R}/\rho_0 = \cos^2(\theta_R/2) = 0.6545$. The dark blue curve corresponds to the numerical solution of Eqs. (14). The orange curve is the result of the dispersionless approximation. The inset displays the blow-up of the region of the soliton edge of the DSW. The dashed (light blue) line is the plot of the first soliton whose characteristics are determined in Sec. 5.2.

which the simple wave at the left of the plateau is multi-valued. The blue line corresponds to the numerical solution of the polarization dynamics equations (14) for an initial profile given by

$$v(\zeta, \tau = 0) = 0, \quad \text{and} \quad \theta(\zeta, \tau = 0) = \frac{\theta_R + \theta_L}{2} + \frac{\theta_R - \theta_L}{2} \tanh\left(\frac{\zeta}{\zeta_0}\right), \quad (85)$$

with

$$\theta_L = 0.2\pi, \quad \theta_R = 0.4\pi, \quad \text{and} \quad \zeta_0 = 1. \quad (86)$$

The value of ζ_0 is not negligibly small, and the argument previously invoked for justifying the self-similar nature of the flow does not hold for all times. Instead, the structure of the flow – with a well defined plateau joined to both asymptotic regions by specific structures – does not appear instantaneously, but takes a finite amount of time to get formed. As a result, the flow can be considered as self-similar only for times large compared with this set-up time, which we numerically evaluate to be of order of $\tau_{\text{setup}} \simeq 8$ in the case of the initial conditions specified by (85) and (86).

It is clearly seen from Fig. 8 that both the right rarefaction wave and the plateau region are very well described by the hydrodynamic theory, the dispersion effects leading only to small oscillations in vicinity of the weak discontinuities located at the interface between these two regions. On the contrary, the region of large amplitude oscillations on the left side of the wave pattern is completely beyond reach of the dispersionless approach and in the next subsection we shall use a theory able to describe such dispersive shock wave (DSW) structures with account of dispersion effects.

5.2 Whitham modulation theory and Gurevich-Pitaevskii problem

As seen in Fig. 8, the numerical solution suggests that the dispersive shock wave can be seen as a nonlinear periodic solution of the polarization equations – such as those studied in Section 3 – which is however modulated, as shown by the fact that the amplitude of the oscillations is not constant. This modulation is gentle, in the sense that the parameters (amplitude, velocity, period, etc.) of the wave change little over one wavelength and one period of oscillation. This means that we can apply the Whitham averaging method for the description of this structure. In his original paper [29], Whitham assumed that the evolution of slowly modulated nonlinear waves can be described by equations obtained by averaging the densities and fluxes of the conservation laws over the rapid oscillations of the wave. He derived these averaged equations for several nonlinear wave equations, in particular, for the case of cnoidal wave solutions of the celebrated Korteweg-de Vries (KdV) equation, and—what was most remarkable from a mathematical point of view—he succeeded in transforming these equations into a diagonal Riemann form analogous to equations (60) obtained in the dispersionless approximation of hydrodynamic flows. As it became clear later, this success was related to the specific mathematical properties—complete integrability—of the KdV equation.

For the case we are interested in, a most important application of the Whitham theory was suggested by Gurevich and Pitaevskii [30]. In their approach it was assumed that the expanding DSW which develops after wave breaking can be described by the nonlinear periodic solution of the wave equation provided the parameters of this solution change slowly with time and space coordinate. They illustrated the method by applying it to the evolution of an initial step-like discontinuity and to the formation of a DSW after the wave breaking moment for the KdV wave dynamics.

Since the publications of the work of Whitham and Gurevich and Pitaevskii, the Whitham theory has been considerably developed in different directions and has found many applications in nonlinear physics. In particular, it was shown that many problems can be reduced to the consideration of the evolution of an initial step-like discontinuity. It was therefore of great importance to discover [31] that, for this specific step-like problem, the main characteristics of DSWs can be obtained by a simple method applicable to both completely integrable and non-integrable nonlinear wave equations. In our case the polarization wave dynamics is governed by the 1D version of the dissipationless Landau-Lifshitz equation which is completely integrable (see, e.g., [32]). However, the Whitham theory is not developed well enough for this equation and therefore El's method [31] seems the most appropriate for the description of the DSW observed in Fig. 8.

We thus assume that, instead of the multi-valued solutions found in the dispersionless approximation in the preceding subsection, a DSW is generated that joins the neighboring quiescent condensate at the left side of the wave structure with the plateau region. For definiteness, and in accordance with the example shown in Fig. 8, we consider the case where the Riemann invariant $r_1 = \sigma - \theta$ is constant across the multi-valued region. As was assumed by Gurevich and Meshcherkin [33] – and confirmed in many particular cases – one of the Riemann invariants preserves its value even after replacement of the multi-valued solution by the oscillatory DSW: in a sense, an equality of the type $r_1|_- = r_1|_+$ replaces in the case of DSWs

the well-known Rankine-Hugoniot relation of the theory of viscous shocks. It is then natural to assume that this relation is preserved by the Whitham averaging method, which yields an appropriate interpolation between the two edges of the DSW.

As we know, at the small-amplitude edge the DSW can be approximated by a modulated linear wave (47), however now propagating along a non-uniform background corresponding to the simple wave solution with $r_1 = \sigma - \theta = \pi/2 - \theta_L = \text{const}$, where we have used the values of the parameters at the left edge that matches with the left boundary conditions. With help of this relation we can write $\sigma = \pi/2 - (\theta_L - \theta)$ in the dispersion relation (25), leading to

$$\Omega(k, \theta) = - \left[2 \sin(\theta - \theta_L) \cdot \cos \theta + \sqrt{\cos^2(\theta - \theta_L) \sin^2 \theta + k^2} \right] k. \quad (87)$$

In (87) we have chosen the minus sign in front of the square root of (25) because we consider wave propagating to the left with respect to the background condensate. Equation (87) is the dispersion of linear waves propagating along a non-uniform θ -distribution. During the smooth evolution of the oscillatory structure the local “number of waves” is preserved [34] which is expressed by the equation

$$k_\tau + \Omega_\zeta = 0. \quad (88)$$

Following El [31], we make a simple-wave type of assumption: in the DSW the wave number k is a function of θ only, $k = k(\theta)$. Then, with account of (87), the law (88) of conservation of number of waves can be written under the form

$$\frac{dk}{d\theta} \cdot \theta_\tau + \left(\frac{\partial \Omega}{\partial k} \cdot \frac{dk}{d\theta} + \frac{\partial \Omega}{\partial \theta} \right) \theta_\zeta = 0. \quad (89)$$

On the other hand, substitution of $\sigma = \pi/2 + \theta - \theta_L$ into the first of equations (23) yields

$$\theta_\tau + \mathcal{V} \cdot \theta_\zeta = 0, \quad \text{where} \quad \mathcal{V} = -[2 \sin(\theta - \theta_L) \cos \theta + \cos(\theta - \theta_L) \sin \theta]. \quad (90)$$

Imposing consistency of (89) and (90) considered as equations for θ , we get

$$\frac{dk}{d\theta} = \frac{\partial \Omega / \partial \theta}{\mathcal{V} - \partial \Omega / \partial k}. \quad (91)$$

This is El’s equation that can be extrapolated into the large amplitude nonlinear region by imposing the condition that the wavelength tends to infinity at the soliton edge, that is

$$k = 0 \quad \text{at} \quad \theta = \theta_0 = (\theta_L + \theta_R)/2. \quad (92)$$

Introducing the function

$$\alpha(\theta) = \sqrt{1 + \frac{k^2}{\cos^2(\theta - \theta_L) \sin^2 \theta}}, \quad (93)$$

makes it possible to cast equation (91) into the form

$$\frac{d\alpha}{\alpha + 1} = \left(\frac{\sin(\theta - \theta_L)}{\cos(\theta - \theta_L)} - \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \right) d\theta, \quad (94)$$

whose solution—with account of the boundary condition (92)—reads

$$\alpha(\theta) = \frac{\sin \theta_L + \sin \theta_R}{\cos(\theta - \theta_L) \sin \theta} - 1. \quad (95)$$

This yields

$$k(\theta_L) = \sqrt{\sin^2 \theta_R - \sin^2 \theta_L}. \quad (96)$$

Consequently, the left edge of the DSW propagates with the group velocity evaluated at $k(\theta_L)$:

$$v_{gr} = \left. \frac{\partial \Omega}{\partial k} \right|_{k(\theta_L)} = -\frac{2 \sin^2 \theta_R - \sin^2 \theta_L}{\sin \theta_R}. \quad (97)$$

At the soliton edge of the DSW, we use the ‘‘soliton dispersion law’’ [31]

$$\tilde{\Omega}(\kappa, \theta) = -\left[2 \sin(\theta - \theta_L) \cdot \cos \theta + \sqrt{\cos^2(\theta - \theta_L) \sin^2 \theta - \kappa^2} \right] \kappa \quad (98)$$

relating the velocity $V = \tilde{\Omega}/\kappa$ of the soliton with the inverse width κ that describes the exponential profile $w \cong w_3 + \frac{1}{2}(w_4 - w_3) \exp\{-\kappa|\zeta + V\tau|\}$ of the soliton far away from its center (in the regime $|\zeta| \rightarrow \infty$). The relation (98) follows from the remark that the soliton’s tail propagates with the same velocity as the soliton itself and therefore the soliton’s velocity can be found from the asymptotic behavior of its profile, see, e.g., [35, 36]. Again following El, we assume that along the shock $\kappa = \kappa(\theta)$. Then the following equation can be derived (see [31]) for this function:

$$\frac{d\kappa}{d\theta} = \frac{\partial \tilde{\Omega}/\partial \theta}{\mathcal{V} - \partial \tilde{\Omega}/\partial \kappa}. \quad (99)$$

If we extrapolate the solution of (99) to the small amplitude region where κ tends to zero, we obtain the boundary condition

$$\kappa(\theta_L) = 0. \quad (100)$$

Similarly to what has been done for the leading edge of the DSW [Eq. (91)], it is convenient for solving Eq. (99) to introduce the auxiliary function

$$\tilde{\alpha}(\theta) = \sqrt{1 - \frac{\kappa^2}{\cos^2(\theta - \theta_L) \sin^2 \theta}}. \quad (101)$$

Inserting (101) into (99) and taking into account the boundary condition (100) one obtains

$$\tilde{\alpha}(\theta) = \frac{2 \sin \theta_L}{\cos(\theta - \theta_L) \sin \theta} - 1. \quad (102)$$

Then, at the soliton edge, $\tilde{\alpha}$ is equal to

$$\tilde{\alpha}(\theta_0) = \frac{4 \sin \theta_L}{\sin \theta_L + \sin \theta_R} - 1,$$

and, consequently, this edge propagates with velocity

$$V_s = \frac{\tilde{\Omega}(\kappa(\theta_0), \theta_0)}{\kappa(\theta_0)} = -\frac{1}{2}(\sin \theta_L + \sin \theta_R). \quad (103)$$

The comparison of the analytic predictions (97) and (103) for the velocities of the edges of the dispersive shock wave with our numerical simulations is easily done for the well defined soliton edge, because, indeed, a leading soliton is easily identified at this edge of the numerically determined DSW. The velocity of this soliton tends for large time to the theoretical value, as illustrated in Fig. 9. In this figure, the numerical result for the velocity $V(\tau)$ of the soliton at the interface between the DSW and the plateau region is fitted with the empirical formula $V(\tau) = V_s^{\text{fit}} + b \tau^{-a}$, where V_s^{fit} , a and b are fitting parameters. At $\tau = 400$, V is still off by about 5% from its asymptotic value, but the trend is in excellent agreement with the prediction (103) since one obtains $V_s^{\text{fit}} = -0.764$ whereas from (103) one expects $V_s^{\text{theo}} = -0.769$. The fitting procedure yields for the other parameters the values $a = 0.74$ and $b = -3.34$. Knowing

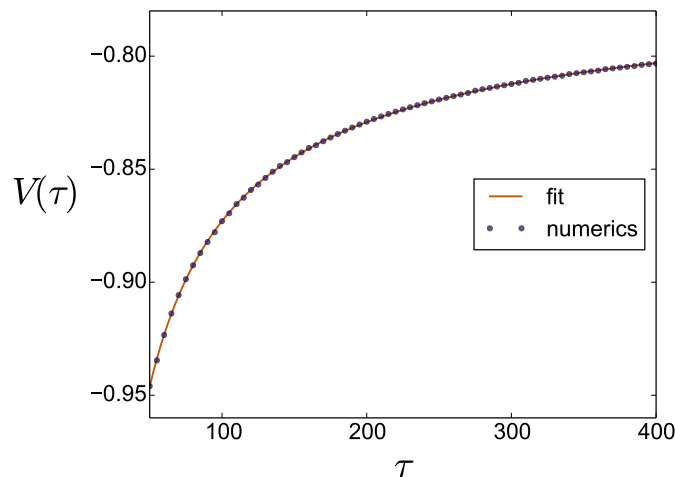


Figure 9: Dots: numerically determined velocity $V(\tau)$ of the trailing edge of the numerical solution. The initial conditions are specified in Eq. (85) and (86). Continuous line: fit of the numerical data by the formula: $V(\tau) = V_s^{\text{fit}} + b \tau^{-a}$. One obtains $V_s^{\text{fit}} = -0.764$, in close agreement with the theoretical prediction from Eq. (103): $V_s^{\text{theo}} = -0.769$.

the velocity of the trailing edge soliton and the velocity and density of the background plateau over which it propagates, one can determine from (52) all the parameters w_1 , $w_2 = w_3$ and w_4 characterizing the soliton. Again, the corresponding theoretical profile (46) is in excellent agreement with the numerics, as shown in the inset of Fig. 8. Note that whereas the shape and velocity of the soliton match the numerics, its position is not exactly the one expected for a purely self-similar flow (in which case it would be $z = V_s = -0.769$): this is to be related to the finite set-up time for creation of the flow structure, cf. the discussion presented at the end of section 5.1 [after Eq. (86)].

As one can see in Fig. 8, it is difficult from the numerical solution to unambiguously locate the dispersive edge of the shock. Hence, at variance with the situation for the soliton edge, the velocity of the dispersive edge cannot be precisely extracted from the numerical simulation. However, one can reasonably argue that the value $v_{\text{gr}} = -1.54$ obtained from the theoretical formula (97) for the initial data (86) matches quite well with the numerical results (cf. Fig. 8).

6 Discussion

In this section we discuss the accuracy of the polarization description of the dynamics of a two-component BEC [Eqs. (14)] and also the relevance of our approach to experimental studies.

A first question can be asked: in which extent does the assumption of decoupled dynamics apply? In other words, how small should $\delta g/g$ be in order for the approach followed in the present work to apply? A simple way for answering this question is to compare the results obtained from (14) with the ones obtained from the numerical solution of the full Gross-Pitaevskii system (1). This is done in Fig. 10 which displays the evolution of an initial profile of type (85). As one can see from this plot, the agreement is reasonable already for $\delta g/g = 0.2$ and becomes quite good for $\delta g/g = 0.05$. The lower part of the Figure shows that the assumption of constant total density is verified with an accuracy of order of 0.5% for $\delta g/g = 0.05$. We note that the largest departure of the total density from a constant occurs when ρ_{\uparrow}/ρ_0 is close to unity, i.e., when θ is close to 0, as anticipated in Eq. (11). Note also that the spatial and time scales (ξ_p and T_p) are quite relevant: the Gross-Pitaevskii system is solved for

quite different values of these characteristic scales (the value of ξ_p is multiplied by a factor 2 and the one of T_p by a factor 4 when one goes from $\delta g/g = 0.2$ to $\delta g/g = 0.05$), but after the same time expressed in units of T_p ($24 T_p$ in the case of Fig. 10), the spatial structures almost overlap if the appropriate units are used.

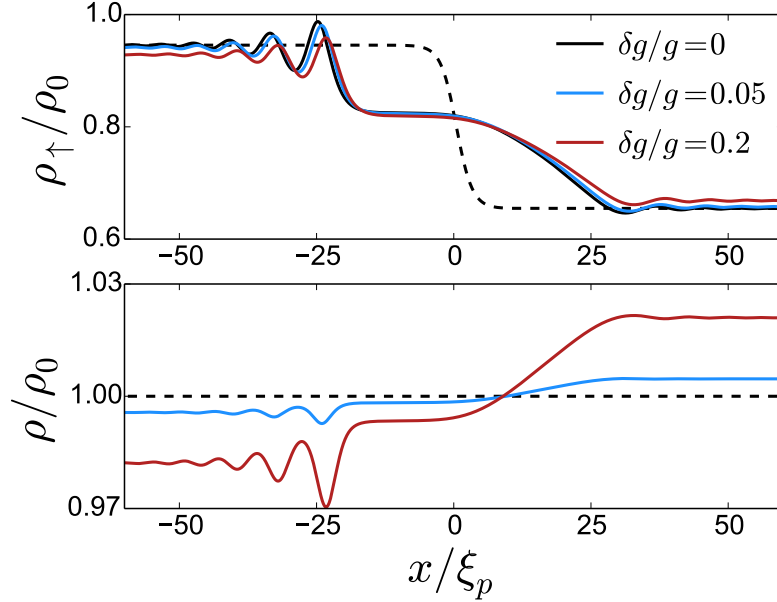


Figure 10: Upper plot: The black solid line represents ρ_\uparrow as a function of position as obtained from solving the system (14) for the initial condition (85) with $\theta_L = 0.15\pi$, $\theta_R = 0.4\pi$ and $\zeta_0 = 3$ (dashed line). The numerical solution of the Gross-Pitaevskii system for the same initial condition and different values of $\delta g/g$ is represented by colored lines. Lower plot: same as above for the total density ρ .

Another question naturally arises: since Bose-Einstein condensation of ultra-cold atomic vapors is always realized in trapped systems, it is important to evaluate the experimental relevance of the infinitely extended configuration studied in the present work. One can first state that the theory has a physical meaning as long as its characteristic length ξ_p (7) is much less than the size X of spatial overlap of the two components which can be estimated in the framework of the Thomas-Fermi approximation presented in Appendix B :

$$\xi_p \ll X = \frac{\sqrt{g\rho_0}}{\omega_\parallel \sqrt{m}}, \quad (104)$$

where ω_\parallel is the longitudinal trapping angular frequency and $\rho_0 \simeq N/X$, N being the total number of atoms. The condition (104) combined with (2) reads

$$\frac{m\omega_\parallel^2 \xi^2}{\rho_0 g} \ll \frac{\delta g}{g} \ll 1, \quad (105)$$

where $\xi = \hbar/\sqrt{2m\rho_0 g}$ is the healing length ($\xi_p = \xi \sqrt{g/\delta g}$). The first inequality of (105) can be also rewritten as

$$\omega_\parallel \xi \ll c_p \quad \text{or} \quad \frac{\xi}{c_p} \ll \frac{1}{\omega_\parallel}, \quad (106)$$

that is the polarization sound velocity must be much greater than the healing length divided by the period of oscillations of atoms in the trap, or, in other words, the polarization wave passes the healing length in a time much less than the period of oscillations in the trap.

It is also worthwhile to address another point: it is known [37–39] that, in the presence of a trapping potential, the condition of uniform miscibility (which, in our notations, reads $\delta g > 0$) is not sufficient to ensure a good spatial overlap of the two components. This point is discussed in Appendix B where it is shown that, close to the mixing-demixing transition, the trapping potential induces a kind of phase separation if the lower of the intra-species nonlinear constants (say $g_{\downarrow\downarrow}$) is smaller than the inter-species constant $g_{\uparrow\downarrow}$, although the criterion of uniform miscibility $g_{\uparrow\downarrow} < \sqrt{g_{\uparrow\uparrow}g_{\downarrow\downarrow}}$ is (weakly) fulfilled.

This phenomenon could explain why, in Ref. [40], a kind of phase separation is observed in the mixture of the two hyperfine states $|\downarrow\rangle = |F = 1, m_F = -1\rangle$ and $|\uparrow\rangle = |F = 1, m_F = 0\rangle$ of ^{87}Rb in spite of fulfilment of the uniform mixing condition. For this system $(a_{\uparrow\uparrow}, a_{\downarrow\downarrow}, a_{\uparrow\downarrow}) = (100.86 a_0, 100.4 a_0, 100.41 a_0)$, where a_0 is the Bohr radius. Thus $a_{\downarrow\downarrow} < a_{\uparrow\downarrow}$ which implies mixing of the components in a uniform case; but non-uniformity caused by the trap potential induces phase separation. Instead, for the mixture of the two hyperfine states $|\uparrow\rangle = |F = 1, m_F = -1\rangle$ and $|\downarrow\rangle = |F = 2, m_F = -2\rangle$ of ^{87}Rb one has $(a_{\uparrow\uparrow}, a_{\downarrow\downarrow}, a_{\uparrow\downarrow}) = (100.4 a_0, 98.98 a_0, 98.98 a_0)$, that is the criterion on miscibility is also fulfilled, but here $a_{\downarrow\downarrow} = a_{\uparrow\downarrow}$ and the authors observe a large region of overlap of the two components.

Finally, concerning the comparison of our results with the ones presented in Ref. [20], it is worth noticing that if $\theta_L \rightarrow 0$, that is $\rho_{\uparrow L} \rightarrow 1$, then the left edge group velocity (97) tends to the value $v_{gr} = -2 \sin \theta_R$ which coincides with the limiting value of velocity (74) of the left edge of the rarefaction wave z_{0R} corresponding to $\theta_0 = 0$. This means that the DSW pattern is represented by small amplitude oscillations around the extrapolation of the rarefaction wave to the region with $\theta_L \rightarrow 0$, $\rho_{\uparrow L} \rightarrow 1$. As a result, the pattern looks like the rarefaction wave connecting two regions of quiescent condensates with different values of θ : $\theta_L = 0$ and $\theta_R \neq 0$. This apparently agrees with the numerical simulations of the so-called subcritical regime discussed in [20] where only the rarefaction wave was observed for small enough values of the relative velocity and $\rho_{\uparrow L} = 1$.

7 Conclusion

In vicinity of the mixing/demixing transition, in the limit (2) first identified in Ref. [16], the polarization dynamics decouples from density waves and is described by the universal equations (14). In this paper we have identified new specific polarization structures associated with these equations in the case of a one dimensional system: algebraic solitons, simple waves, dispersive shock waves, etc. But more remains to be done. For instance, the non-monotonous behavior of the Riemann velocities (cf. section 4.2) is typically associated to a rich variety of different types of shocks [24] which remain to be investigated in the case at hand; in particular for situations with large jumps of the parameter θ , when DSWs consisting of combined cnoidal and trigonometric parts are expected. The precise behavior of algebraic solitons in several instances, and a reliable procedure for their physical implementation would also be of great interest. The configuration described by the initial distributions (80) and (81) is too schematic for being able to describe the experiments presented in [20] where regions with different density ratios are colliding with finite initial relative velocities. One should thus consider the case where σ_L and σ_R are not both equal to $\pi/2$, and where the plateau formed after the collision is modulationally unstable. Finally, the approach developed in this paper can be generalized to include Rabi coupling between the components (see, e.g., [41]) and also to two- or three-dimensional situations [42]. In particular, formation of oblique polarization solitons by the flow of the binary condensate past a polarized obstacle (see, e.g., [43]) can be considered in the framework of the present method. Works in these directions are in progress.

Acknowledgements

We thank S. Stringari for fruitful discussions. AMK thanks Laboratoire de Physique Théorique et Modèles Statistiques (Université Paris-Sud, Orsay) where this work was started, for kind hospitality.

Funding information This work was supported by the French ANR under grant n° ANR-15-CE30-0017 (Haralab project).

A Computation of the energy of a soliton

We briefly present here the computation leading to the result (54) for the energy of the soliton. From (27) and (28) one gets $\phi_\zeta = V(B-w)/(1-w^2)$ with $B = (1-w_2^2)v_0/V + w_2$ and from (30) $\theta_\zeta^2 = -Q(w)/(1-w^2)$. This yields for the energy (53)

$$\mathcal{E} = \int_{\mathbb{R}} \frac{d\zeta}{2} \left\{ \frac{-Q(w)}{1-w^2} + (1-w^2) \left[V^2 \frac{(B-w)^2}{(1-w^2)^2} - 1 \right] + (1-v_0^2)(1-w_2^2) \right\}. \quad (107)$$

The integrand being symmetric —since $w(\zeta)$ is— one can thus restrict the range of integration to the domain $(-\infty, 0]$ over which one can write $d\zeta = +dw/\sqrt{-Q(w)}$. Using the fact that one can express B , v_0 and V as functions of w_1 , w_2 and w_4 [cf. Eq. (52)], it is then possible to re-write (107) under the form

$$\mathcal{E} = \int_{w_2}^{w_4} dw \frac{2w - w_2 - w_4}{\sqrt{(w_4 - w)(w - w_1)}}, \quad (108)$$

which yields the result (54).

B Effective demixing in a 1D trap

In this appendix we present 1D computations in the framework of the Thomas-Fermi description of the system (1) in the presence of a trapping potential [44]. It is known [45] that the Thomas-Fermi approximation cannot quantitatively describe all the possible configurations encountered the mixture of two BECs, but it will permit to identify specific situations which will then have to be confirmed by a full numerical solution.

We consider here N_\uparrow and N_\downarrow atoms of each component placed in a harmonic potential of longitudinal angular frequency ω_\parallel much smaller than the radial trapping angular frequency ω_\perp . In the so called “1D mean field regime” [46], the system can be described by the effective 1D Gross-Pitaevskii equation (1) with $g_{\uparrow\uparrow} = 2\hbar\omega_\perp a_{\uparrow\uparrow}$ [47] where $a_{\uparrow\uparrow}$ is the 3D intra-species s-wave scattering length of the “up” component (an similar expressions for $g_{\downarrow\downarrow}$ and $g_{\uparrow\downarrow}$). In the situation we are interested in where $N_\uparrow \sim N_\downarrow$ and $a_{\uparrow\uparrow} \sim a_{\uparrow\downarrow} \sim a_{\downarrow\downarrow}$, the 1D mean field regime holds when $N_\uparrow(\omega_\parallel/\omega_\perp)(a_{\uparrow\uparrow}/a_\perp) \ll 1$, where $a_\perp = \sqrt{\hbar/m\omega_\perp}$ is the radial harmonic oscillator length.

We chose the parameters so that the mean field condition of miscibility $\sqrt{a_{\uparrow\uparrow}a_{\downarrow\downarrow}} > a_{\uparrow\downarrow} > 0$ is always fulfilled, and in the following we denote as A the parameter having the dimension of length defined by

$$A^2 = a_{\uparrow\uparrow}a_{\downarrow\downarrow} - a_{\uparrow\downarrow}^2 > 0. \quad (109)$$

We define the non-dimensional position $X = x/a_\parallel$, where $a_\parallel = \sqrt{\hbar/m\omega_\parallel}$ is the longitudinal harmonic oscillator length, and the non-dimensional densities $n_{\uparrow,\downarrow}$ such that $\int n_{\uparrow,\downarrow}(X)dX =$

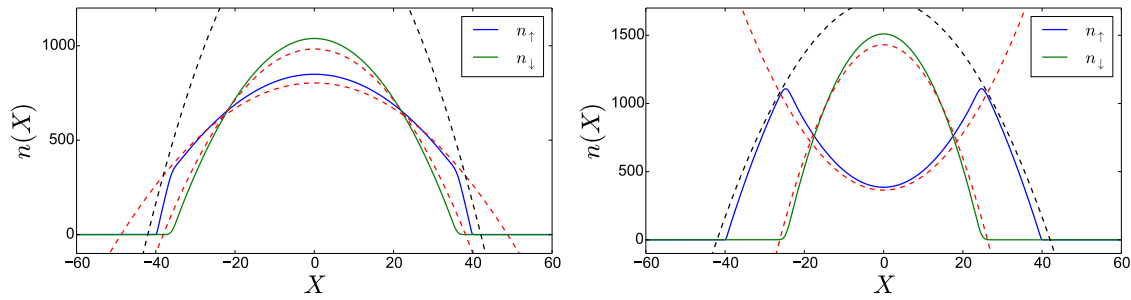


Figure 11: Distribution of atoms in a 1D trapped two-component BEC. The trap parameters are $\omega_{\parallel} = 2\pi \times 1$ Hz, $\omega_{\perp} = 2\pi \times 500$ Hz and $N_{\uparrow} = N_{\downarrow} = 5 \times 10^4$. The condensates are formed by ^{87}Rb atoms, this yields $a_{\parallel} = 10.8 \mu\text{m}$. The red dashed lines correspond to $n_{\uparrow}^a(x)$ and $n_{\downarrow}^a(x)$, Eqs. (113) and (111). The black dashed lines display $n_{\uparrow}^b(x)$ (114). The solid lines correspond to the numerical solution of the Gross-Pitaevskii equations. The left plot corresponds to the values $(a_{\uparrow\uparrow}, a_{\downarrow\downarrow}, a_{\uparrow\downarrow}) = (102 a_0, 101 a_0, 100 a_0)$ for the scattering lengths. The right plot corresponds to $(a_{\uparrow\uparrow}, a_{\downarrow\downarrow}, a_{\uparrow\downarrow}) = (102 a_0, 99 a_0, 100 a_0)$. The precise values of these scattering lengths have been chosen for exemplifying the phenomenon of effective demixing, but they all lie within a realistic range for ^{87}Rb .

$N_{\uparrow,\downarrow}$. We denote as “down” the component for which the intra-species interaction is the lowest, i.e., $a_{\downarrow\downarrow} < a_{\uparrow\uparrow}$. Within the Thomas-Fermi approach one obtains

$$n_{\uparrow}(X) = \begin{cases} n_{\uparrow}^a(X) & \text{if } |X| \leq X_{\downarrow}, \\ n_{\uparrow}^b(X) & \text{if } X_{\downarrow} \leq |X| \leq X_{\uparrow}, \\ 0 & \text{if } X_{\uparrow} \leq |X|, \end{cases} \quad (110)$$

and

$$n_{\downarrow}(X) = \begin{cases} \frac{\omega_{\parallel}}{\omega_{\perp}} \frac{(a_{\uparrow\uparrow} - a_{\uparrow\downarrow})a_{\parallel}}{4A^2} (X_{\downarrow}^2 - X^2) & \text{if } |X| \leq X_{\downarrow}, \\ 0 & \text{if } X_{\downarrow} \leq |X|, \end{cases} \quad (111)$$

where

$$X_{\uparrow}^3 = \frac{3\omega_{\perp}}{\omega_{\parallel}} \frac{a_{\uparrow\uparrow}N_{\uparrow} + a_{\uparrow\downarrow}N_{\downarrow}}{a_{\parallel}}, \quad X_{\downarrow}^3 = \frac{3\omega_{\perp}}{\omega_{\parallel}} \frac{A^2N_{\downarrow}}{(a_{\uparrow\uparrow} - a_{\uparrow\downarrow})a_{\parallel}}, \quad (112)$$

$$n_{\uparrow}^a(X) = \frac{\omega_{\parallel}}{\omega_{\perp}} \left[\frac{a_{\parallel}}{4a_{\uparrow\uparrow}} X_{\uparrow}^2 - \frac{a_{\uparrow\downarrow}a_{\parallel}}{4A^2} \left(1 - \frac{a_{\uparrow\downarrow}}{a_{\uparrow\uparrow}}\right) X_{\downarrow}^2 - \frac{(a_{\downarrow\downarrow} - a_{\uparrow\downarrow})a_{\parallel}}{4A^2} X^2 \right], \quad (113)$$

and

$$n_{\uparrow}^b(X) = \frac{\omega_{\parallel}}{\omega_{\perp}} \frac{a_{\parallel}}{4a_{\uparrow\uparrow}} (X_{\uparrow}^2 - X^2). \quad (114)$$

These results are compared in Fig. 11 with the numerical solutions of Eqs. (1) in the presence of a trapping potential $V(x) = \frac{1}{2}m\omega_{\parallel}^2x^2$. The two plots of this figure are drawn for a configuration verifying the miscibility condition (109)³. In the left plot $a_{\downarrow\downarrow} > a_{\uparrow\downarrow}$ whereas the situation is reversed in the right one (similar plots have already been obtained in Ref. [37]). Although the corresponding change of scattering lengths is minute, close to the mixing-demixing transition the effect is spectacular: one reaches a situation of quasi-demixing where the component with the largest scattering length (the up component) is expelled from the trap’s center. This

³For the chosen sets of parameters, one is at the limit of the 1D mean field regime : $N_{\uparrow}(\omega_{\parallel}/\omega_{\perp})(a_{\uparrow\uparrow}/a_{\perp}) \simeq 1$. The condition of applicability of the Thomas-Fermi approximation [46] is well fulfilled: $[N_{\uparrow}(a_{\uparrow\uparrow}/a_{\perp})\sqrt{\omega_{\perp}/\omega_{\parallel}}]^{1/3} \simeq 23 \gg 1$.

situation would be expected in the situation $a_{\downarrow\downarrow} \ll a_{\uparrow\downarrow} \simeq a_{\uparrow\uparrow}$. The point is here that the same effect is observed for a system verifying the miscibility condition (109) provided one remains close to immiscibility and that $a_{\downarrow\downarrow} \lesssim a_{\uparrow\downarrow}$. The parameter governing the expulsion of the up component from the center of the trap is the non-dimensional curvature of its density at $X = 0$. From (113) this parameter is equal to

$$-\frac{\omega_{\parallel}}{\omega_{\perp}} \times \frac{(a_{\downarrow\downarrow} - a_{\uparrow\downarrow})a_{\parallel}}{a_{\uparrow\uparrow}a_{\downarrow\downarrow} - a_{\uparrow\downarrow}^2}. \quad (115)$$

In the cases presented in Fig. 11 the value of this parameter changes from -1.3 (in the left plot of the figure) to $+4.2$ (right plot) just by changing $a_{\downarrow\downarrow}$ by 2%.

References

- [1] N. N. Bogoliubov, *On the theory of superfluidity*, J. Phys. USSR **11**, 23 (1947).
- [2] E. P. Gross, *Structure of a quantized vortex in boson systems*, Nuovo Cimento **20**, 454 (1961), doi:[10.1007/BF02731494](https://doi.org/10.1007/BF02731494).
- [3] L. P. Pitaevskii, *Vortex lines in an imperfect Bose gas*, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **40**, 646 (1961) [Sov. Phys. JETP **13**, 451 (1961)].
- [4] T. Tsuzuki, *Nonlinear waves in the Pitaevskii-Gross equation*, J. Low Temp. Phys. **4**, 441 (1971), doi:[10.1007/BF00628744](https://doi.org/10.1007/BF00628744).
- [5] S. Burger, K. Bongs, S. Dettmer, W. Ertmer, K. Sengstock, A. Sanpera, G. V. Shlyapnikov, and M. Lewenstein, *Dark Solitons in Bose-Einstein Condensates*, Phys. Rev. Lett. **83**, 5198 (1999), doi:[10.1103/PhysRevLett.83.5198](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.83.5198).
- [6] J. Denschlag, J. E. Samsarian, D. L. Feder, C. W. Clark, L. A. Collins, J. Cubizolles, L. Deng, E. W. Hagley, K. Helmerson, W. P. Reinhardt, S. L. Rolston, B. I. Schneider, and W. D. Phillips, *Generating solitons by phase engineering of a Bose-Einstein condensate*, Science **287**, 97 (2000), doi:[10.1126/science.287.5450.97](https://doi.org/10.1126/science.287.5450.97).
- [7] G. A. El, A. Gammal, and A. M. Kamchatnov, *Oblique Dark Solitons in Supersonic Flow of a Bose-Einstein Condensate*, Phys. Rev. Lett. **97**, 180405 (2006), doi:[10.1103/PhysRevLett.97.180405](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.97.180405).
- [8] A. M. Kamchatnov and L. P. Pitaevskii, *Stabilization of Solitons Generated by a Supersonic Flow of Bose-Einstein Condensate Past an Obstacle*, Phys. Rev. Lett. **100**, 160402 (2008), doi:[10.1103/PhysRevLett.100.160402](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.100.160402).
- [9] A. M. Kamchatnov and S. V. Korneev, *Condition for convective instability of dark solitons*, Phys. Lett. A **375**, 2577 (2011), doi:[10.1016/j.physleta.2011.05.036](https://doi.org/10.1016/j.physleta.2011.05.036).
- [10] A. Amo, S. Pigeon, D. Sanvitto, V. G. Sala, R. Hivet, I. Carusotto, F. Pisanello, G. Leménaier, R. Houdré, E. Giacobino, C. Ciuti, and A. Bramati, *Polariton superfluids reveal quantum hydrodynamic solitons*, Science **332**, 1167 (2011), doi:[10.1126/science.1202307](https://doi.org/10.1126/science.1202307).
- [11] G. Grosso, G. Nardin, F. Morier-Genoud, Y. Léger, and B. Deveaud-Plédran, *Soliton instabilities and vortex street formation in a polariton quantum fluid*, Phys. Rev. Lett. **107**, 245301 (2011), doi:[10.1103/PhysRevLett.107.245301](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.107.245301).

- [12] M. A. Hoefer, M. J. Ablowitz, I. Coddington, E. A. Cornell, P. Engels, and V. Schweikhard, *Dispersive and classical shock waves in Bose-Einstein condensates and gas dynamics*, Phys. Rev. A **74**, 023623 (2006), doi:[10.1103/PhysRevA.74.023623](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.74.023623).
- [13] A. M. Kamchatnov, A. Gammal, and R. A. Kraenkel, *Dissipationless shock waves in Bose-Einstein condensates with repulsive interaction between atoms*, Phys. Rev. A **69**, 063605 (2004), doi:[10.1103/PhysRevA.69.063605](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.69.063605).
- [14] G. A. El and M. A. Hoefer, *Dispersive shock waves and modulation theory*, Physica D **333**, 11 (2016), doi:[10.1066/j.physd.2016.04.006](https://doi.org/10.1066/j.physd.2016.04.006)
- [15] A. M. Kamchatnov, Y. V. Kartashov, P.-É. Larré, and N. Pavloff, *Nonlinear polarization waves in a two-component Bose-Einstein condensate*, Phys. Rev. A **89**, 033618 (2014), doi:[10.1103/PhysRevA.89.033618](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.89.033618).
- [16] C. Qu, L. P. Pitaevskii, and S. Stringari, *Magnetic solitons in a binary Bose-Einstein condensate*, Phys. Rev. Lett. **116**, 160402 (2016), doi:[10.1103/PhysRevLett.116.160402](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.116.160402).
- [17] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *On the theory of the dispersion of magnetic permeability in ferromagnetic bodies*, Phys. Zs. Sowjet. **8**, 153 (1935).
- [18] E. Iacocca, Th. Silva, and M. A. Hoefer, *Breaking of Galilean invariance in the hydrodynamic formulation of ferromagnetic thin films*, [arXiv:1606.01565](https://arxiv.org/abs/1606.01565).
- [19] S. Knoop, T. Schuster, R. Scelle, A. Trautmann, J. Appmeier, M. K. Oberthaler, E. Tiesinga, and E. Tiemann, *Feshbach spectroscopy and analysis of the interaction potentials of ultracold sodium*, Phys. Rev. A **83**, 042704 (2011), doi:[10.1103/PhysRevA.83.042704](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.83.042704).
- [20] C. Hamner, J. J. Chang, P. Engels, M. A. Hoefer, *Generation of dark-bright soliton trains in superfluid-superfluid counterflow*, Phys. Rev. Lett. **106**, 065302 (2011), doi:[10.1103/PhysRevLett.106.065302](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.106.065302).
- [21] C. J. Pethick and H. Smith, *Bose-Einstein Condensation in Dilute Gases* (Cambridge University Press, Cambridge, 2002).
- [22] L. Pitaevskii and S. Stringari, *Bose-Einstein Condensation* (Clarendon Press, Oxford, 2003).
- [23] C. K. Law, C. M. Chan, P. T. Leung, and M.-C. Chu, *Critical velocity in a binary mixture of moving Bose condensates*, Phys. Rev. A **63**, 063612 (2001), doi:[10.1103/PhysRevA.63.063612](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.63.063612).
- [24] A. M. Kamchatnov, Y.-H. Kuo, T.-C. Lin, T.-L. Horng, S.-C. Gou, R. Clift, G. A. El, and R. H. J. Grimshaw, *Undular bore theory for the Gardner equation*, Phys. Rev. E **86**, 036605 (2012), doi:[10.1103/PhysRevE.86.036605](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.86.036605).
- [25] M. Abramowitz and I. A. Stegun, *Handbook of mathematical functions*, (Dover Publications, New-York, 1972).
- [26] Th. Busch and J. R. Anglin, *Dark-Bright Solitons in Inhomogeneous Bose-Einstein Condensates*, Phys. Rev. Lett. **87**, 010401 (2001), doi:[10.1103/PhysRevLett.87.010401](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.87.010401).
- [27] C. Becker, S. Stellmer, P. Soltan-Panahi, S. Dörscher, M. Baumert, E.-M. Richter, J. Kronjäger, K. Bongs, and K. Sengstock, *Oscillations and interactions of dark and dark-bright solitons in Bose-Einstein condensates*, Nature Physics **4**, 496 (2008), doi:[10.1038/nphys962](https://doi.org/10.1038/nphys962).

- [28] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Fluid Mechanics*, Pergamon, Oxford, (1959).
- [29] G. B. Whitham, *Non-linear dispersive waves*, Proc. Roy. Soc. London A, **283**, 238 (1965), doi:[10.1098/rspa.1965.0019](https://doi.org/10.1098/rspa.1965.0019).
- [30] A. V. Gurevich and L. P. Pitaevskii, *Nonstationary structure of a collisionless shock wave*, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **65**, 590 (1973) [Sov. Phys. JETP **38**, 291 (1974)].
- [31] G. A. El, *Resolution of a shock in hyperbolic systems modified by weak dispersion*, Chaos **15**, 037103 (2005), doi:[10.1063/1.1947120](https://doi.org/10.1063/1.1947120).
- [32] A. M. Kamchatnov, *Periodic nonlinear waves in a uniaxial ferromagnet*, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **102**, 1606 (1992) [Sov. Phys. JETP **75**, 868 (1992)].
- [33] A. V. Gurevich and A. P. Meshcherkin, *Expanding self-similar discontinuities and shock waves in dispersive hydrodynamics*, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **87**, 1277 (1984) [Sov. Phys. JETP **60**, 732 (1984)].
- [34] G. B. Whitham, *Linear and Nonlinear Waves* (Wiley– Interscience, New York, 1974).
- [35] O. Akimoto and K. Ikeda, *Steady propagation of a coherent light pulse in a dielectric medium. I*, J. Phys. A: Math. Gen. **10**, 425 (1977), doi:[10.1088/0305-4470/10/3/015](https://doi.org/10.1088/0305-4470/10/3/015); K. Ikeda and O. Akimoto, *Steady propagation of a coherent light pulse in a dielectric medium. II. The effect of spatial dispersion*, J. Phys. A: Math. Gen. **12**, 1105 (1979), doi:[10.1088/0305-4470/12/7/027](https://doi.org/10.1088/0305-4470/12/7/027).
- [36] S. A. Darmanyan, A. M. Kamchatnov, and M. Nevière, *Polariton effect in nonlinear pulse propagation*, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **123**, 997 (2003) [Sov. Phys. JETP **96**, 876 (2003)], doi:[10.1134/1.1581941](https://doi.org/10.1134/1.1581941).
- [37] M. Trippenbach, K. Góral, K. Rzazewski, B. Malomed, and Y. B. Band, *Structure of binary Bose-Einstein condensates*, J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys. **33**, 4017 (2000), doi:[10.1088/0953-4075/33/19/314](https://doi.org/10.1088/0953-4075/33/19/314).
- [38] S. Tojo, Y. Taguchi, Y. Masuyama, T. Hayashi, H. Saito, and T. Hirano, *Controlling phase separation of binary Bose-Einstein condensates via mixed-spin-channel Feshbach resonance*, Phys. Rev. A **82**, 033609 (2010), doi:[10.1103/PhysRevA.82.033609](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.82.033609).
- [39] J. Polo, V. Ahufinger, P. Mason, S. Sridhar, T. P. Billam, and S. A. Gardiner, *Analysis beyond the Thomas-Fermi approximation of the density profiles of a miscible two-component Bose-Einstein condensate*, Phys. Rev. A **91**, 053626 (2015), doi:[10.1103/PhysRevA.91.053626](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.91.053626).
- [40] I. Danaila, M.A. Khamsehchi, V. Gokhroo, P. Engels, P.G. Kevrekidis, *Vector dark-antidark solitary waves in multi-component Bose-Einstein condensates*, [arXiv:1606.05607](https://arxiv.org/abs/1606.05607).
- [41] C. Qu, M. Tylutki, S. Stringari, and L. P. Pitaevskii, *Magnetic solitons in Rabi-coupled Bose-Einstein condensates*, [arXiv:1609.08499](https://arxiv.org/abs/1609.08499).
- [42] E. Iacocca, T. Silva, and M. A. Hofer, private communication.
- [43] A. M. Kamchatnov and Y. V. Kartashov, *Oblique Breathers Generated by a Flow of Two-Component Bose-Einstein Condensates Past a Polarized Obstacle*, Phys. Rev. Lett. **111**, 140402 (2013), doi:[10.1103/PhysRevLett.111.140402](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.111.140402).
- [44] Tin-Lun Ho and V. B. Shenoy, *Binary Mixtures of Bose Condensates of Alkali Atoms*, Phys. Rev. Lett. **77**, 3276 (1996), doi:[10.1103/PhysRevLett.77.3276](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.77.3276).

- [45] H. Pu and N. P. Bigelow, *Properties of Two-Species Bose Condensates*, Phys. Rev. Lett. **80**, 1130 (1998), doi:[10.1103/PhysRevLett.80.1130](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.80.1130).
- [46] C. Menotti and S. Stringari, *Collective oscillations of a one-dimensional trapped Bose-Einstein gas*, Phys. Rev. A **66**, 043610 (2002), doi:[10.1103/PhysRevA.66.043610](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.66.043610).
- [47] M. Olshanii, *Atomic Scattering in the Presence of an External Confinement and a Gas of Impenetrable Bosons*, Phys. Rev. Lett. **81**, 938 (1998), doi:[10.1103/PhysRevLett.81.938](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.81.938).

Article 3 : Evolution of initial discontinuities in the Riemann problem for the Kaup-Boussinesq equation with positive dispersion

Durant l'étude du problème de Riemann (décrit dans la Section 4) nous avons remarqué que l'équation de Landau-Lifshitz pouvait être réécrite sous la forme d'une équation de Kaup-Boussinesq (3.161-3.162) (équation KB) dans la limite où la vitesse relative entre les deux composantes est proche de la vitesse du son de polarisation [cf. l'Eq. (3.159)]. Cette observation nous a alors amené à considérer le problème de Riemann pour ce nouveau système. Dans un premier temps, la résolution du problème de Riemann pour l'équation KB nous a permis de mieux appréhender la richesse du problème de Riemann pour l'équation de Landau-Lifshitz et de déterminer notamment ses solutions dans le cas où la vitesse relative v est proche de 1. Dans un second temps, les équations (3.161-3.162) correspondant à un nouveau régime dispersif de l'équation KB non considéré auparavant, nous avons pu étudier de nouvelles solutions au problème de Riemann associé dont le comportement est différent de celui observé dans des travaux antérieurs [166].

Evolution of initial discontinuities in the Riemann problem for the Kaup-Boussinesq equation with positive dispersion

T. Congy,¹ S. K. Ivanov,^{2,3} A. M. Kamchatnov,² and N. Pavloff¹

¹LPTMS, CNRS, Univ. Paris-Sud, Université Paris-Saclay, 91405 Orsay, France

²Institute of Spectroscopy, Russian Academy of Sciences, Troitsk, Moscow 108840, Russia

³Moscow Institute of Physics and Technology, Institutsky lane 9, Dolgoprudny, Moscow region 141700, Russia

(Received 17 May 2017; accepted 18 July 2017; published online 9 August 2017)

We consider the space-time evolution of initial discontinuities of depth and flow velocity for an integrable version of the shallow water Boussinesq system introduced by Kaup. We focus on a specific version of this “Kaup-Boussinesq model” for which a flat water surface is modulationally stable, we speak below of “positive dispersion” model. This model also appears as an approximation to the equations governing the dynamics of polarisation waves in two-component Bose-Einstein condensates. We describe its periodic solutions and the corresponding Whitham modulation equations. The self-similar, one-phase wave structures are composed of different building blocks, which are studied in detail. This makes it possible to establish a classification of all the possible wave configurations evolving from initial discontinuities. The analytic results are confirmed by numerical simulations. *Published by AIP Publishing.* [<http://dx.doi.org/10.1063/1.4997052>]

The Kaup-Boussinesq (KB) water wave equation is integrable, but its generic form suffers from a dynamical instability. We study here the Riemann problem for a version of this equation, which does not suffer from the same deficiency. This equation appears as an approximation of the nonlinear polarization dynamics of a two-component Bose-Einstein condensate, and in this context, it is important to characterize the time evolution of simple, but experimentally relevant initial profiles.

I. INTRODUCTION

In many physical wave systems, the initial value problem treated in the long-wavelength (hydrodynamic) approximation leads to wave breaking after a finite time. As a result, the formal solution becomes multivalued, i.e., it loses its physical meaning. At the wave breaking point, the first spatial derivative of the physical variables diverges and the hydrodynamic approximation fails. This suggests that this nonphysical behavior can be remedied by accounting for physical effects described by terms with higher-order derivatives in the corresponding evolution equations. For example, within the Navier-Stokes description of the dynamics of a compressible gas, the effects of viscosity are described by second-order derivative terms, and this leads, instead of wave breaking, to the formation of viscous shocks, which can often be formally described by surfaces of discontinuities in the physical variables. Formulated in this way, the theory of “shock waves” has found a number of important applications.^{1,2}

At the same time, in many physical systems, the dissipative effects may be relatively weaker than the dispersive ones, and in such cases, so-called “dispersive shock waves” (DSWs) are formed instead of viscous shocks. DSWs can be represented as modulated nonlinear oscillations whose envelope varies over characteristic distances much greater than

their wavelength. In recent years, such systems have attracted much attention in fluid dynamics, nonlinear optics, physics of Bose-Einstein condensates, and other areas of physics (see, e.g., Refs. 3 and 4). This type of problem was studied for the first time in the context of the physics of shallow water waves whose evolution is described by the celebrated Korteweg-de Vries (KdV) equation.^{5,6} The equations governing the slow evolution of the envelope of the nonlinear oscillations had been derived by Whitham,⁷ and later, they were applied to the description of the DSW structure by Gurevich and Pitaevskii.⁸ Because of the universality of the KdV equation, this approach can naturally be applied to many other physical situations. When the condition of unidirectional propagation is relaxed, shallow water waves are described by various forms of Boussinesq equation.⁹ The most convenient form for our purpose has been derived by Kaup,¹⁰ this is the so-called Kaup-Boussinesq (KB) equation. The KB equation is completely integrable, and the well-developed methods of inverse scattering transform and finite-gap integration can be used for explicitly deriving its multi-soliton and (quasi-)periodic solutions.¹¹

In the applications of this theory to concrete physical problems, only the KB equations with negative dispersion have been considered so far. In this case, linear perturbations can be sought under the form of plane waves with angular frequency ω and wavelength k . In non-dimensional notations, the corresponding dispersion relation reads (h_0 is a constant depth)

$$\omega^2 = h_0 k^2 - \frac{1}{4} k^4. \quad (1)$$

The Whitham modulation equations were derived for this case in Ref. 12, and a complete classification of all the possible wave structures resulting from an initial discontinuous profile was obtained. Besides that, the analytic solution for a generic wave breaking regime was found in Ref. 13—with

the use of a generalized hodograph transform—and stationary undular bore structures whose form was stabilized by weak viscous effects were studied in Ref. 14. However, the dispersion relation (1) corresponds to a dynamical instability of small wavelength perturbations over a fluid of constant depth h_0 . There exists another form of the KB system, with positive dispersion, for which the dispersion relation of linear waves reads

$$\omega^2 = h_0 k^2 + \frac{1}{4} k^4. \tag{2}$$

The corresponding KB system can be written under the following non-dimensional form:

$$\begin{aligned} h_t + (hu)_x - \frac{1}{4} u_{xx} &= 0, \\ u_t + uu_x + h_x &= 0. \end{aligned} \tag{3}$$

In the context of shallow water wave physics, h is the local height of the water layer and u is a local mean flow velocity.¹⁵ Equation (2) represents the dispersion relation of linear waves propagating along a uniform background characterized by the physical variables $h_0 = \text{const}$ and $u_0 = 0$. It does not suffer from the instability of Eq. (1). The positive dispersion KB system (3) may be obtained in the case of capillary waves propagating on top of a thin fluid layer (see, e.g., Ref. 3). Besides this physical realization, the system (3) appears as an approximation to the Landau-Lifshitz equation for the propagation of magnetization waves in easy-plane magnets and to the Gross-Pitaevskii equations for the propagation of polarization waves in two-component Bose-Einstein condensates.¹⁶

Motivated by these applications of the KB system (3), we consider in the present paper the so-called Riemann problem. This corresponds to the study of the time evolution of initial discontinuous profiles of the form

$$\begin{aligned} h(x, t = 0) &= h_L, \quad \text{and} \quad u(x, t = 0) = u_L \quad \text{for } x < 0, \\ h(x, t = 0) &= h_R, \quad \text{and} \quad u(x, t = 0) = u_R \quad \text{for } x > 0. \end{aligned} \tag{4}$$

As we shall see, the resulting wave structures differ considerably from those found in Ref. 12 for the negative dispersion case. In the case of Eq. (3) studied in the present work, the classification of the possible wave structures follows closely the scheme found for the nonlinear Schrödinger equation in Refs. 17 and 18. We shall obtain simple analytic formulae for the main parameters of the wave structures and confirm their accuracy by comparison with numerical solutions of the KB system (3).

II. PERIODIC WAVES AND WHITHAM MODULATION EQUATIONS

In this section, we derive the periodic wave solutions (the so-called cnoidal waves) of the system (3) and the Whitham equations governing the modulational dynamics of a cnoidal wave. This is achieved by using the methods described, e.g., in Ref. 3 (see also Ref. 13). These techniques are based on the possibility to represent the system (3) as a compatibility condition for the linear system¹⁰

$$\psi_{xx} = \mathcal{A}\psi, \quad \psi_t = -\frac{1}{2}\mathcal{B}_x\psi + \mathcal{B}\psi_x \tag{5}$$

with

$$\mathcal{A} = h - \left(\lambda - \frac{1}{2}u\right)^2, \quad \text{and} \quad \mathcal{B} = -\left(\lambda + \frac{1}{2}u\right), \tag{6}$$

where λ is a free spectral parameter. Demanding that $(\psi_{xx})_t = (\psi_t)_{xx}$ for any λ , we reproduce the KB system (3).

The second order spatial linear differential equation in (5) has two independent solutions $\psi_+(x, t)$ and $\psi_-(x, t)$. Their product $g = \psi_+\psi_-$ satisfies the following third order equation:

$$g_{xxx} - 2\mathcal{A}_xg - 4\mathcal{A}g_x = 0. \tag{7}$$

Upon multiplication by g , this equation can be integrated once to give

$$\frac{1}{2}gg_{xx} - \frac{1}{4}g_x^2 - \mathcal{A}g^2 = P(\lambda), \tag{8}$$

where the integration constant has been written as $P(\lambda)$ since it can only depend on λ . The time dependence of $g(x, t)$ is determined by the equation

$$g_t = \mathcal{B}g_x - \mathcal{B}_xg. \tag{9}$$

We are interested in the one-phase periodic solutions of the system (3). They are distinguished by the condition that $P(\lambda)$ in (8) is a fourth degree polynomial of the form¹⁹

$$P(\lambda) = \prod_{i=1}^4 (\lambda - \lambda_i) = \lambda^4 - s_1\lambda^3 + s_2\lambda^2 - s_3\lambda + s_4. \tag{10}$$

In expression (10), we chose for definiteness to order the zeroes λ_i according to

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \lambda_4. \tag{11}$$

Then we find from Eq. (8) that $g(x, t)$ is a first-degree polynomial in λ , of the form

$$g(x, t) = \lambda - \mu(x, t), \tag{12}$$

where $\mu(x, t)$ is connected with $u(x, t)$ and $h(x, t)$ by the relations

$$\begin{aligned} u(x, t) &= s_1 - 2\mu(x, t), \\ h(x, t) &= \frac{1}{4}s_1^2 - s_2 - 2\mu^2(x, t) + s_1\mu(x, t), \end{aligned} \tag{13}$$

which follow from a comparison of the coefficients of the different powers of λ on both sides of Eq. (8). The spectral parameter λ is arbitrary, and on substitution of $\lambda = \mu$ into Eq. (8), we obtain an equation for μ ,

$$\mu_x = 2\sqrt{-P(\mu)},$$

while a similar substitution into Eq. (9) gives

$$\mu_t = -\left(\mu + \frac{1}{2}u\right)\mu_x = -\frac{1}{2}s_1\mu_x.$$

Hence, $\mu(x, t)$ and $u(x, t)$ and $h(x, t)$ depend only on the phase

$$\theta = x - \frac{1}{2}s_1t, \tag{14}$$

so that

$$V = \frac{1}{2}s_1 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 \lambda_i \tag{15}$$

is the phase velocity of the nonlinear wave, and $\mu(\theta)$ is determined by the equation

$$\mu_\theta = 2\sqrt{-P(\mu)}. \tag{16}$$

It follows from Eq. (13) that the variable μ must be real. For the fourth degree polynomial (10), the real solution of (16) corresponds to oscillations of μ in one of the two possible intervals,

$$\lambda_1 \leq \mu \leq \lambda_2 \quad \text{or} \quad \lambda_3 \leq \mu \leq \lambda_4, \tag{17}$$

within which $P(\mu)$ assumes negative values. It is well known that the solution of Eq. (16) with boundaries (17) can be expressed in terms of elliptic functions (see, e.g., Refs. 20 and 21). Without going into details, we shall list here the results which are the most relevant to our study.

- For the case

$$\lambda_1 \leq \mu \leq \lambda_2 \tag{18}$$

the cnoidal wave solution of Eq. (17) with the initial condition $\mu(0) = \lambda_1$ is given by

$$\mu(\theta) = \lambda_2 - \frac{(\lambda_2 - \lambda_1)\text{cn}^2(W, m)}{1 + \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_4 - \lambda_2}\text{sn}^2(W, m)}, \tag{19}$$

where $W = \sqrt{(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_4 - \lambda_2)}\theta$ and

$$m = \frac{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_4 - \lambda_3)}{(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_4 - \lambda_2)} \tag{20}$$

is the modulus of the Jacobi elliptic functions sn and cn. Substitution of (19) into (13) gives the corresponding expressions for $u(\theta)$ and $h(\theta)$ for a one-phase periodic nonlinear wave. Its wavelength is given by

$$L = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \frac{d\mu}{\sqrt{-P(\mu)}} = \frac{2K(m)}{\sqrt{(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_4 - \lambda_2)}}, \tag{21}$$

where $K(m)$ is the complete elliptic integral of the first kind. The soliton solution corresponds to the limit $\lambda_3 \rightarrow \lambda_2$ ($m \rightarrow 1$). We obtain

$$\mu(\theta) = \lambda_2 - \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\cosh^2W + \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_4 - \lambda_2}\sinh^2W}. \tag{22}$$

This is a dark soliton solution for the variable μ . In the limit $\lambda_2 \rightarrow \lambda_1$, we get a small-amplitude harmonic wave

$$\mu = \lambda_2 - \frac{1}{2}(\lambda_2 - \lambda_1)\cos[k(x - Vt)],$$

where $k = 2\sqrt{(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_4 - \lambda_1)}$. (23)

If $\lambda_4 = \lambda_3$ but $\lambda_1 \neq \lambda_2$, then we have again $m = 0$ and (22) reduces to a nonlinear trigonometric wave, but we shall not present its explicit form here (cf. e.g., Refs. 20 and 21).

- In a similar way, for the case

$$\lambda_3 \leq \mu \leq \lambda_4, \tag{24}$$

the cnoidal wave solutions are of the form [$\mu(0) = \lambda_4$]

$$\mu(\theta) = \lambda_3 + \frac{(\lambda_4 - \lambda_3)\text{cn}^2(W, m)}{1 + \frac{\lambda_4 - \lambda_3}{\lambda_3 - \lambda_1}\text{sn}^2(W, m)}. \tag{25}$$

In the soliton limit $\lambda_3 \rightarrow \lambda_2$ ($m \rightarrow 1$), we obtain

$$\mu(\theta) = \lambda_2 + \frac{\lambda_4 - \lambda_2}{\cosh^2W + \frac{\lambda_4 - \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1}\sinh^2W}. \tag{26}$$

This is a bright soliton (for μ -variable) over a constant background. In the limit $\lambda_4 \rightarrow \lambda_3$, we get a small-amplitude harmonic wave

$$\mu = \lambda_3 + \frac{1}{2}(\lambda_4 - \lambda_3)\cos[k(x - Vt)],$$

where $k = 2\sqrt{(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_1)}$. (27)

As discussed above, nonlinear trigonometric waves also exist, here in the case where $\lambda_1 = \lambda_2$ but $\lambda_3 \neq \lambda_4$. If furthermore $\lambda_3 \rightarrow \lambda_1$, one reaches the limit of an algebraic soliton^{20,21}

$$\mu(\theta) = \lambda_1 + \frac{\lambda_4 - \lambda_1}{1 + (\lambda_4 - \lambda_1)^2\theta^2}. \tag{28}$$

- We now consider slowly modulated cnoidal waves. In this case, the parameters λ_i ($i = 1, 2, 3, 4$) become slowly varying functions of x and t changing weakly over a wavelength L . Their evolution is governed by the Whitham modulation equations^{3,4}

$$\frac{\partial \lambda_i}{\partial t} + v_i \frac{\partial \lambda_i}{\partial x} = 0, \quad i = 1, 2, 3, 4. \tag{29}$$

The Whitham velocities v_i appearing in Eq. (29) can be computed *via* the formulae (see, e.g., Refs. 3 and 4)

$$v_i(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) = \left(1 - \frac{L}{\partial_{\lambda_i} L} \partial_{\lambda_i}\right)V, \quad i = 1, 2, 3, 4, \tag{30}$$

where the phase velocity V and the wavelength L are given by Eqs. (15) and (21). A simple calculation yields the explicit expressions

$$\begin{aligned}
 v_1 &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 \lambda_i - \frac{(\lambda_4 - \lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_1)K(m)}{(\lambda_4 - \lambda_1)K(m) - (\lambda_4 - \lambda_2)E(m)}, \\
 v_2 &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 \lambda_i + \frac{(\lambda_3 - \lambda_2)(\lambda_2 - \lambda_1)K(m)}{(\lambda_3 - \lambda_2)K(m) - (\lambda_3 - \lambda_1)E(m)}, \\
 v_3 &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 \lambda_i - \frac{(\lambda_4 - \lambda_3)(\lambda_3 - \lambda_2)K(m)}{(\lambda_3 - \lambda_2)K(m) - (\lambda_4 - \lambda_2)E(m)}, \\
 v_4 &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 \lambda_i + \frac{(\lambda_4 - \lambda_2)(\lambda_4 - \lambda_1)K(m)}{(\lambda_4 - \lambda_1)K(m) - (\lambda_3 - \lambda_1)E(m)},
 \end{aligned}
 \tag{31}$$

where m is given by (20) and $K(m)$ and $E(m)$ are complete elliptic integrals of the first and second kind, respectively.

In the soliton limit $m \rightarrow 1$ (i.e., $\lambda_3 \rightarrow \lambda_2$), the Whitham velocities reduce to

$$\begin{aligned}
 v_1 &= \frac{1}{2}(3\lambda_1 + \lambda_4), & v_2 &= v_3 = \frac{1}{2}(\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_4), \\
 v_4 &= \frac{1}{2}(\lambda_1 + 3\lambda_4).
 \end{aligned}
 \tag{32}$$

In a similar way, in the small amplitude limit $m \rightarrow 0$ (i.e., $\lambda_2 \rightarrow \lambda_1$) we obtain

$$\begin{aligned}
 v_1 &= v_2 = 2\lambda_1 + \frac{(\lambda_4 - \lambda_3)^2}{2(\lambda_3 + \lambda_4 - 2\lambda_1)}, \\
 v_3 &= \frac{1}{2}(3\lambda_3 + \lambda_4), & v_4 &= \frac{1}{2}(\lambda_3 + 3\lambda_4),
 \end{aligned}
 \tag{33}$$

and in another small amplitude limit ($m \rightarrow 0$ when $\lambda_3 \rightarrow \lambda_4$) we have

$$\begin{aligned}
 v_1 &= \frac{1}{2}(3\lambda_1 + \lambda_2), & v_2 &= \frac{1}{2}(\lambda_1 + 3\lambda_2), \\
 v_3 &= v_4 = 2\lambda_4 + \frac{(\lambda_2 - \lambda_1)^2}{2(\lambda_1 + \lambda_2 - 2\lambda_4)}.
 \end{aligned}
 \tag{34}$$

III. KEY ELEMENTS OF SELF-SIMILAR WAVE STRUCTURES

The initial profiles (4), being infinitely sharp, do not involve any characteristic length. However the dispersion relation (2) is characterized by the value of the shallow water wave velocity: $c_s = \omega/k|_{k \rightarrow 0} = \sqrt{h_0}$. Therefore, the large scale features of the solution of this problem (with characteristic length scale much greater than the wavelength) can only depend on the self-similar variable $\xi = x/t$, which can be made non-dimensional with the help of the velocity c_s . This means that the large scale features of the wave pattern must be self-similar and should be composed of (possibly several) regions where h and v either smoothly depend on ξ , or consist of modulated periodic waves whose envelopes (and wavelength L) depend slowly on ξ .

In the framework of the hydrodynamic approximation, these regions are separated by weak discontinuities where the physical variables have cusps. If the hydrodynamic approximation leads to non-monotonous dependence of velocities on the wave amplitude, then the wave structure

can be more complicated; an example of such a situation was considered, e.g., in Ref. 20. At first we shall consider smooth solutions of the KB system (3).

A. Dispersionless limit

For smooth enough wave patterns, we can neglect the last dispersive term in the first equation of the system (3) and arrive at the so-called dispersionless equations

$$h_t + (hu)_x = 0, \quad u_t + uu_x + h_x = 0,
 \tag{35}$$

which coincide with the well-known shallow water equations. Introducing the Riemann invariants

$$\lambda_{\pm} = \frac{u}{2} \pm \sqrt{h},
 \tag{36}$$

the system (35) can be written in the following diagonal form:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \lambda_{\pm}}{\partial t} + v_{\pm}(\lambda_{-}, \lambda_{+}) \frac{\partial \lambda_{\pm}}{\partial x} &= 0, \\
 \text{where } v_{\pm}(\lambda_{-}, \lambda_{+}) &= \frac{1}{2}(3\lambda_{\pm} + \lambda_{\mp}).
 \end{aligned}
 \tag{37}$$

The physical variables are expressed in terms of λ_{\pm} as

$$u = \lambda_{+} + \lambda_{-}, \quad h = (\lambda_{+} - \lambda_{-})^2/4.
 \tag{38}$$

For the self-similar solutions, one has $\lambda_{\pm} = \lambda_{\pm}(\xi)$ and the system (37) reduces to

$$\frac{d\lambda_{+}}{d\xi} \cdot (v_{+} - \xi) = 0, \quad \frac{d\lambda_{-}}{d\xi} \cdot (v_{-} - \xi) = 0.
 \tag{39}$$

This system admits a trivial solution for which $\lambda_{+} = \text{const}$ and $\lambda_{-} = \text{const}$. It describes a uniform flow with constants h and u . We shall call such a solution a ‘‘plateau.’’

Other solutions of (39) are called simple waves. For such flows, one of the Riemann invariants is constant (say, λ_{-}), whereas the other one changes in such a way that the term between parenthesis in its equation is zero ($v_{+} = \xi$ in the example considered). One has thus two possible types of self-similar simple waves:

$$\begin{cases} \lambda_{-} = C^{\text{st}} \equiv \bar{\lambda}_{-}, & \text{with} \\ v_{+}(\bar{\lambda}_{-}, \lambda_{+}) = \frac{1}{2}(3\lambda_{+} + \bar{\lambda}_{-}) = \xi = x/t, \end{cases}
 \tag{40}$$

or

$$\begin{cases} \lambda_{+} = C^{\text{st}} \equiv \bar{\lambda}_{+}, & \text{with} \\ v_{-}(\lambda_{-}, \bar{\lambda}_{+}) = \frac{1}{2}(3\lambda_{-} + \bar{\lambda}_{+}) = \xi = x/t. \end{cases}
 \tag{41}$$

The constancy of one of the Riemann invariants means that h and u are related by a simple formula: either $\lambda_{-} = u/2 - h^{1/2} = \text{const} = \bar{\lambda}_{-} = \bar{u}/2 - \bar{h}^{1/2}$ or $\lambda_{+} = u/2 + h^{1/2} = \text{const} = \bar{\lambda}_{+} = \bar{u}/2 + \bar{h}^{1/2}$, where \bar{u} and \bar{h} are some values that fix the value of the constant Riemann invariant and can be chosen at convenience for solving a specific problem.

Thus, for given values of \bar{u} and \bar{h} , a simple wave corresponds to a configuration where the variables u and h are connected by the relations corresponding to one of the two parabolae drawn in the plane (u, h) in Fig. 1. The parabolae cross at the point $P = (\bar{u}, \bar{h})$, which represents a uniform flow with constant values of $u = \bar{u}$ and $h = \bar{h}$ which is a trivial “plateau solution” of Eq. (35).

The dispersionless system (35) requires continuity of the functions $u(x, t)$ and $h(x, t)$, but, as usual in hydrodynamics, admits jumps of their space derivatives, i.e., “weak discontinuities.” Therefore, a plateau solution (\bar{u}, \bar{h}) can be attached at one of its boundaries to a simple wave. We have here two possibilities. If the uniform flow corresponding to $P = (\bar{u}, \bar{h})$ matches with the simple wave along which $\lambda_+ = \bar{\lambda}_+ = \text{const}$ (one of the solid parabolae in Fig. 1), then from Eq. (41) one gets for this flow

$$\begin{cases} u(x, t) = \frac{2}{3} \left(\frac{x}{t} + \bar{\lambda}_+ \right) = \frac{2}{3} \left(\frac{x}{t} + \frac{\bar{u}}{2} + \sqrt{\bar{h}} \right), \\ h(x, t) = \frac{1}{9} \left(\frac{x}{t} - 2\bar{\lambda}_+ \right)^2 = \frac{1}{9} \left(\frac{x}{t} - \bar{u} - 2\sqrt{\bar{h}} \right)^2. \end{cases} \quad (42)$$

This wave configuration represents a rarefaction wave (RW) propagating to the right. If it propagates into “vacuum,” then Eq. (42) gives the full solution of the problem (4) with left boundaries $h_L = \bar{h}$ and $u_L = \bar{u}$, whereas at the right boundary $h_R = 0$ (the value of u_R is irrelevant in the space without fluid). This situation is depicted in Fig. 2(a). The left edge of this rarefaction wave propagates to the left at the velocity $s_- = u_L - \sqrt{h_L}$ and the right edge propagates to the right into the empty space with the velocity $s_+ = u_L + 2\sqrt{h_L}$.

In a similar way, if $P = (\bar{u}, \bar{h})$ matches with the simple wave along which $\lambda_- = \bar{\lambda}_- = \text{const}$, then (40) yields

$$\begin{cases} u(x, t) = \frac{2}{3} \left(\frac{x}{t} + \bar{\lambda}_- \right) = \frac{2}{3} \left(\frac{x}{t} + \frac{\bar{u}}{2} + \sqrt{\bar{h}} \right), \\ h(x, t) = \frac{1}{9} \left(\frac{x}{t} - 2\bar{\lambda}_- \right)^2 = \frac{1}{9} \left(\frac{x}{t} - \bar{u} + 2\sqrt{\bar{h}} \right)^2. \end{cases} \quad (43)$$

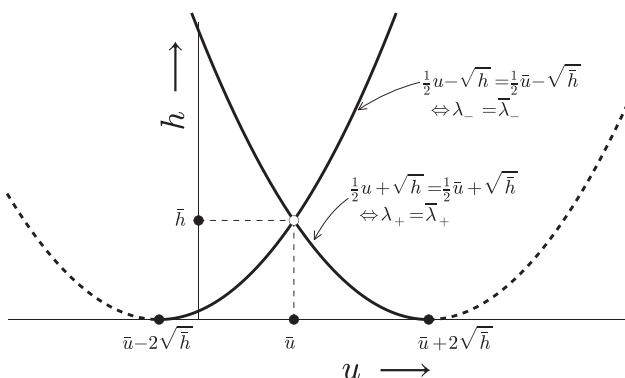


FIG. 1. Relation between u and h for simple wave solutions in the dispersionless regime. The solid lines correspond to the curve $\lambda_+ = C^{\text{st}} = \bar{\lambda}_+$ [portion of parabola ending at point with coordinates $(\bar{u} + 2\sqrt{\bar{h}}, 0)$] and to the curve $\lambda_- = C^{\text{st}} = \bar{\lambda}_-$ [portion of parabola ending at point $(\bar{u} - 2\sqrt{\bar{h}}, 0)$]. They are continued by the dashed curves along which $\lambda_- = \bar{\lambda}_+$ (right dashed curve) and $\lambda_+ = \bar{\lambda}_-$ (left dashed curve). These dashed curves are of no significance for the present discussion of simple waves, but will become important in Sec. IV.

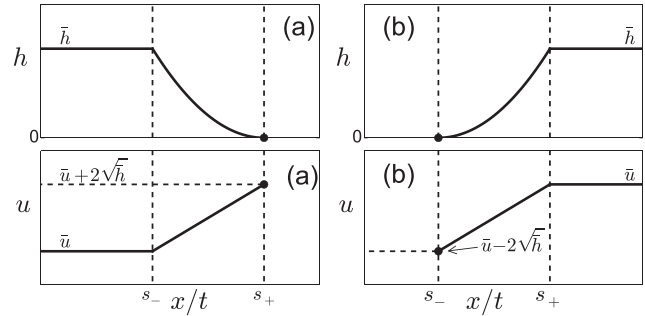


FIG. 2. Height and velocity profiles for self-similar rarefaction wave solutions of the dispersionless equations (35) expanding into empty space (the so-called “dam problem”). Panel (a) corresponds to a flow expanding in the positive x direction and panel (b) to a flow expanding in the negative x direction. The values of the edge velocities s_{\pm} are given in the text.

This represents a rarefaction wave propagating to the left. Again, it corresponds—in the hydrodynamic approximation—to the solution of the problem (4) with $h_L = 0$, whereas at the right boundary $h_R = \bar{h}$ and $u_R = \bar{u}$ (see Fig. 2(b)). The edge velocities are equal to $s_- = u_R - 2\sqrt{h_R}$ and $s_+ = u_R + \sqrt{h_R}$.

It is clear that we can generalize these solutions to the cases where both sides of the rarefaction wave connect uniform flows with equal values of the corresponding Riemann invariants $u_L/2 + \sqrt{h_L} = u_R/2 + \sqrt{h_R}$ or $u_L/2 - \sqrt{h_L} = u_R/2 - \sqrt{h_R}$. In these cases, the rarefaction wave connects two uniform flows and the corresponding distributions of h and u are shown in Fig. 3. The velocities of the edges of the rarefaction waves are given in both cases by the formulae $s_- = u_L - \sqrt{h_L}$, $s_+ = u_R + \sqrt{h_R}$. These values have simple physical interpretation: they are the sums of the local flow velocities (u_L or u_R) and of the propagation velocities of small amplitude disturbances directed to the left for the left edge ($-\sqrt{h_L}$) and to the right for the right edge ($+\sqrt{h_R}$).

It is important to note that the system (39) only admits solutions of the type (40) and (41) for which the non-constant Riemann invariant increases with $\zeta = x/t$. The above wave structures correspond to the conditions (a) $\lambda_+^L < \lambda_+^R$, $\lambda_-^L = \lambda_-^R$ or (b) $\lambda_+^L = \lambda_+^R$, $\lambda_-^L < \lambda_-^R$, as illustrated in Figs. 4(a) and 4(b). The other two situations represented in Figs. 4(c) and 4(d), that is (c) $\lambda_+^L = \lambda_+^R$, $\lambda_-^L > \lambda_-^R$ and (d) $\lambda_+^L > \lambda_+^R$, $\lambda_-^L = \lambda_-^R$, result in multi-valued solutions and are

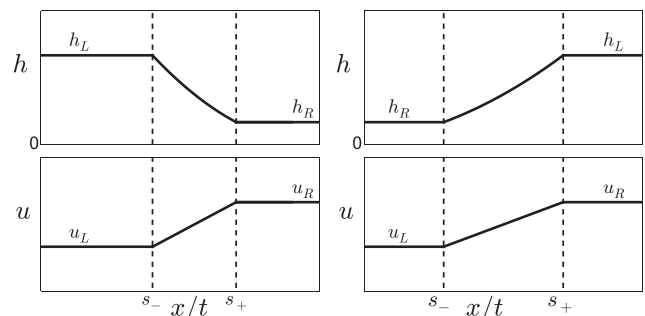


FIG. 3. Self-similar solutions of the dispersionless equations (35) composed by a rarefaction wave connecting two uniform flows. The two left plots correspond to the situation where $\lambda_+ = \text{const}$ for the whole flow; the two right ones to $\lambda_- = \text{const}$.

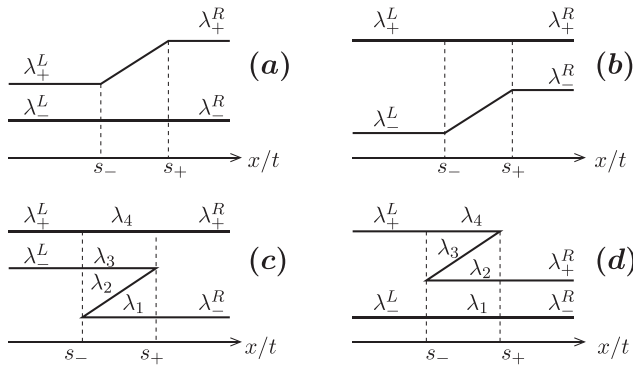


FIG. 4. Diagrams representing the evolution of the Riemann invariants as a function of x/t . Plots (a) and (b) correspond to the configuration where a dispersionless rarefaction wave connects two uniform flows. Plots (c) and (d) considered within the dispersionless approximation correspond to a formal multi-valued solution. In this case, the dispersionless approximation breaks down and one observes a dispersive shock wave, accurately described by 4 Riemann invariants within the Whitham modulational approach, cf. Sec. III B.

therefore nonphysical: the dispersionless approximation is not applicable in these cases and we have to turn to another type of key elements for describing such structures.

B. Dispersive shock waves

Since the pioneering work of Gurevich and Pitaevskii,⁸ it is known that wave breaking—such as depicted in Figs. 4(c) and 4(d) for the dispersionless Riemann invariants—is regularized by the replacement of the nonphysical multi-valued dispersionless solution by a dispersive shock wave. This wave pattern can be represented approximately as a modulated nonlinear periodic wave whose parameters λ_i ($i = 1, 2, 3, 4$, cf. Sec. II) change slowly along the wave structure. In this case, the two dispersionless Riemann invariants λ_{\pm} are replaced in the DSW region by four Riemann invariants λ_i (cf. Figs. 4(c) and 4(d)). In this region, the evolution of the DSW is determined by the Whitham equations (29). In our case, when we consider of self-similar solution, all Riemann invariants depend only on $\xi = x/t$, and the Whitham equations reduce to

$$\frac{d\lambda_i}{d\xi} \cdot [v_i(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) - \xi] = 0, \quad i = 1, 2, 3, 4. \quad (44)$$

One of the two factors in this equation must vanish, that is, for each i , either the Riemann invariant λ_i is constant, or $v_i = \xi$. For the Whitham velocities (31), there exist solutions for which, in the DSW region, only one of the Riemann invariants varies, whereas the three others remain constant. These solutions correspond qualitatively to the same patterns as the ones depicted in Figs. 4(c) and 4(d). However, naturally, the dependence of the Riemann invariants on ξ resulting from (44) differs from the one obtained from (39) (different equations and different variables). As a result, the velocities of the edges of the DSW do not coincide with the velocities of the nonphysical solutions of the dispersionless equations. It nonetheless remains true that Figs. 4(c) and 4(d) schematically represent the structure of the Riemann invariants for the solutions of the Whitham equations (44):

in Fig. 4(c), λ_2 varies and $(\lambda_1, \lambda_3, \lambda_4)$ remain constant, whereas in Fig. 4(d), λ_3 varies and $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_4)$ remain constant. We thus arrive at the following description of these solutions:

- In the case of Fig. 4(c) where $\lambda_+^L = \lambda_+^R$, $\lambda_-^L > \lambda_-^R$ we have

$$\lambda_1 = \lambda_-^R, \quad \lambda_3 = \lambda_-^L, \quad \lambda_4 = \lambda_+^L = \lambda_+^R, \quad (45)$$

and λ_2 depends on ξ according to the equation

$$v_2(\lambda_-^R, \lambda_2, \lambda_-^L, \lambda_+^L) = \xi. \quad (46)$$

The resulting wave pattern is obtained by substitution of these values of $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$ into (19) and (13). The left, small amplitude, edge of the DSW propagates with the velocity

$$s_- = 2\lambda_+^R + \frac{(\lambda_+^L - \lambda_-^L)^2}{2(\lambda_+^L + \lambda_-^L - 2\lambda_+^R)}. \quad (47)$$

The right edge corresponds to the soliton limit, propagating with the velocity

$$s_+ = \frac{1}{2}(\lambda_-^R + 2\lambda_-^L + \lambda_+^L). \quad (48)$$

- In a similar way, in the case of Fig. 4(d) where $\lambda_+^L > \lambda_+^R$, $\lambda_-^L = \lambda_-^R$ we have

$$\lambda_1 = \lambda_-^L = \lambda_-^R, \quad \lambda_2 = \lambda_+^R, \quad \lambda_4 = \lambda_+^L, \quad (49)$$

and the dependence of λ_3 on ξ is determined by the implicit equation

$$v_3(\lambda_-^R, \lambda_+^R, \lambda_3, \lambda_+^L) = \xi. \quad (50)$$

Substitution of the values of λ_i resulting from (49) and (50) into (25) and then (13) yields the oscillatory DSW structure for the physical variables u and h . The left edge of the DSW corresponds to the soliton limit and this soliton moves with the velocity

$$s_- = \frac{1}{2}(\lambda_-^R + 2\lambda_+^R + \lambda_+^L). \quad (51)$$

Its right edge corresponds to the small amplitude limit propagating with the velocity

$$s_+ = 2\lambda_+^L + \frac{(\lambda_+^R - \lambda_-^L)^2}{2(\lambda_+^R + \lambda_-^R - 2\lambda_+^L)}. \quad (52)$$

IV. CLASSIFICATION OF SOLUTIONS OF THE RIEMANN PROBLEM

For a given choice of initial conditions (4), the solution of the Riemann problem consists of combinations of the key elements listed in the preceding Sec. III: plateaus, rarefaction waves and dispersive shocks. It is important to notice that if

an RW or a DSW matches with a plateau at its both left and right edges, then these plateaus share one of their (dispersionless) Riemann invariants. For example, in Figs. 4(a) and 4(d), we have $\lambda_-^L = \lambda_-^R$ and in Figs. 4(b) and 4(c) we have $\lambda_+^L = \lambda_+^R$.

Also, in the case of a DSW, despite the fact that the dynamics inside the shock region is described by four Riemann invariants, two of them coincide with the dispersionless invariants of one of the plateaus at the edges of the shock. Hence one may say that the value of one of the dispersionless Riemann invariants [λ_- say, as in the case of Fig. 4(d)] is “transferred” through the DSW, although, if it were computed using formula (36), one would find that it strongly oscillates inside the DSW region. The equality $\lambda_-^L = \lambda_-^R$ [for the case of Fig. 4(d)] connects the parameters of the flow at both sides of the dispersive shock, and in this sense, it plays a role similar to that of the Rankine-Hugoniot condition in the theory of viscous shocks (see Refs. 22 and 23).

Due to this property of the dispersionless Riemann invariants, the points corresponding to the edges of the DSW (or of the RW) must lie on one of the parabolae along which the value of the dispersionless Riemann invariant remains constant. Hence, the dispersionless parabolae of Fig. 1 are useful tools for the classification of all possible solutions. One should keep in mind that the parabolic arcs symbolize the different types of solutions: a physically acceptable single-valued RW [Figs. 4(a) and 4(b)] or a formal multi-valued solution [Figs. 4(c) and 4(d)] which should be replaced by a DSW correctly treated within the Whitham approach. After these preliminary remarks, we can proceed to the classification of the wave structures.

The left and right boundaries of the whole wave structure connect with undisturbed plateau regions whose parameters coincide with the initial conditions (4); for instance, in any situation, one should always have at the left boundary: $u(x/t \leq s_-^L) = u_L$ and $h(x/t \leq s_-^L) = h_L$. Consequently, the left and right edges propagate into plateau regions represented by the two points (u_L, h_L) and (u_R, h_R) in the (u, h) plane. We represent in Fig. 5 the two parabolae corresponding to the constant dispersionless invariants $\lambda_{\pm}^L = u_L/2 \pm \sqrt{h_L}$ including their branches extending beyond the tangent points with the u -axis (which were represented as dashes lines in Fig. 1). These parabolae cut the physical half-plane $h > 0$ into six domains labeled by the symbols A, B, ..., F.

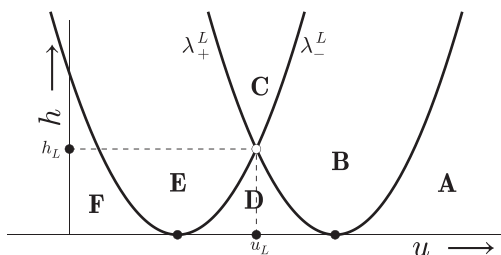


FIG. 5. Regions in the (u, h) plane corresponding to different types of flow. The left boundary corresponds to point L of coordinates (u_L, h_L) . The two parabolae are defined by the equations $h = (\frac{1}{2}u - \lambda_+^L)^2$ and $h = (\frac{1}{2}u - \lambda_-^L)^2$. The type of flow depends on the region (A, B, ..., or F) in which lies the right boundary point R of coordinates (u_R, h_R) .

Depending on the domain in which the point R with coordinates (u_R, h_R) lies, one has one of the six following possible orderings of the left and right Riemann invariants:

$$\begin{aligned}
 \text{A : } & \lambda_-^L < \lambda_+^L < \lambda_-^R < \lambda_+^R, & \text{B : } & \lambda_-^L < \lambda_-^R < \lambda_+^L < \lambda_+^R, \\
 \text{C : } & \lambda_-^R < \lambda_-^L < \lambda_+^L < \lambda_+^R, & \text{D : } & \lambda_-^L < \lambda_-^R < \lambda_+^R < \lambda_+^L, \\
 \text{E : } & \lambda_-^R < \lambda_-^L < \lambda_+^R < \lambda_+^L, & \text{F : } & \lambda_-^R < \lambda_+^R < \lambda_-^L < \lambda_+^L.
 \end{aligned}
 \tag{53}$$

These six situations correspond to the six possible wave structures resulting from the initial discontinuous profiles (4). We shall now describe their main properties and parameters. Note that, as expected, the typology below does not depend on the absolute values of u_R and u_L , but only on their relative positions.

(A) In this case, the two rarefaction waves represented in Figs. 2(a) and 2(b) are combined into a single wave structure where they are separated by an empty region [in which $h(x, t) = 0$]. The velocities of the edges of the RWs are given by the formulae

$$\begin{aligned}
 s_-^L &= u_L - \sqrt{h_L}, & s_+^L &= u_L + 2\sqrt{h_L}, \\
 s_-^R &= u_R - 2\sqrt{h_R}, & s_+^R &= u_R + \sqrt{h_R}.
 \end{aligned}
 \tag{54}$$

The corresponding wave structure is displayed in Fig. 6(A). As expected, the dispersionless approximation gives a very accurate description of the solution.

In the hydrodynamic context, this situation corresponds to launching two fluids in opposite directions with velocities so large that the rarefaction waves are not able to fill the empty regions between them.

(B) Here the parabolae $u/2 + \sqrt{h} = u_L/2 + \sqrt{h_L}$ and $u/2 - \sqrt{h} = u_R/2 - \sqrt{h_R}$ cross at the point $P = (u_P, h_P)$ with the Riemann invariants $\lambda_{\pm}^P = u_P/2 \pm \sqrt{h_P}$, and their equality yields the values of the physical variables

$$\begin{aligned}
 u_P &= \lambda_+^P + \lambda_-^P = \frac{1}{2}(u_L + u_R) + \sqrt{h_L} - \sqrt{h_R}, \\
 h_P &= \frac{1}{4}(\lambda_+^P - \lambda_-^P)^2 = \frac{1}{4} \left[\frac{1}{2}(u_L - u_R) + \sqrt{h_L} + \sqrt{h_R} \right]^2.
 \end{aligned}
 \tag{55}$$

In this case, one has two rarefaction waves separated by a plateau region, which is represented by point P in the (u, h) plane of Fig. 6(B). The velocities of the edges can be easily found from the self-similar solutions (40) and (41)

$$\begin{aligned}
 s_-^L &= v_-(\lambda_-^L, \lambda_+^L) = \frac{1}{2}(3\lambda_-^L + \lambda_+^L) = u_L - \sqrt{h_L}, \\
 s_+^L &= v_-(\lambda_-^P, \lambda_+^L) = \frac{1}{2}(3\lambda_-^R + \lambda_+^L), \\
 s_-^R &= v_+(\lambda_-^P, \lambda_+^P) = \frac{1}{2}(\lambda_-^R + 3\lambda_+^L), \\
 s_+^R &= v_+(\lambda_-^R, \lambda_+^R) = \frac{1}{2}(\lambda_-^R + 3\lambda_+^R) = u_R + \sqrt{h_R}.
 \end{aligned}
 \tag{56}$$

The corresponding wave structure is displayed in Fig. 6(B). As in case (A), the dispersionless approximation gives a very accurate description of the solution.

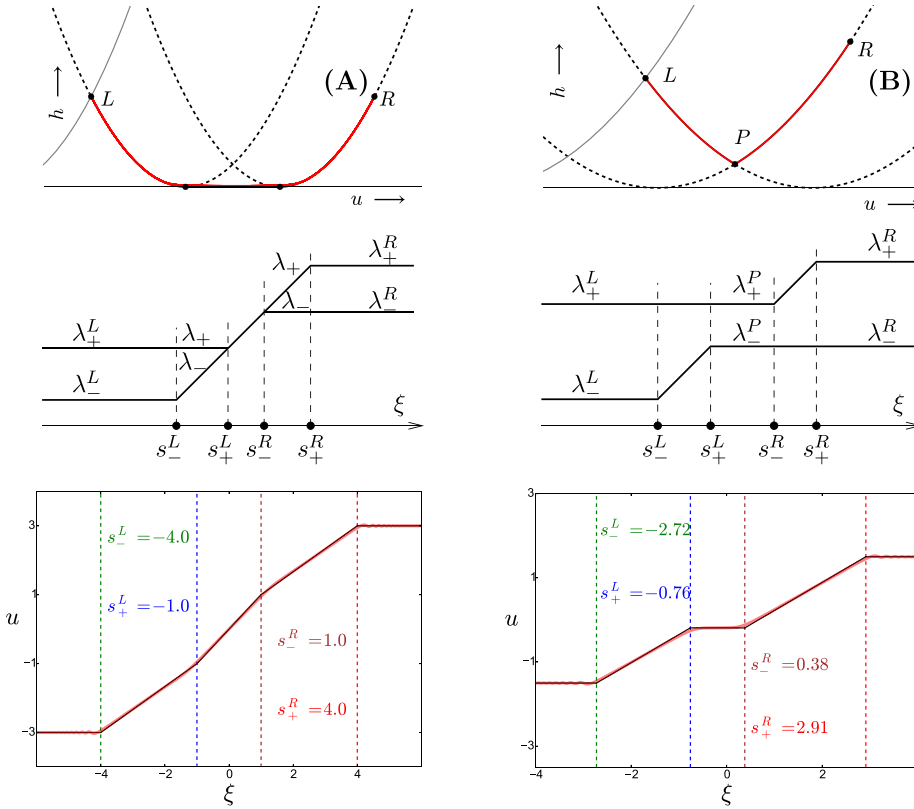


FIG. 6. Solutions in the cases (A) (three plots of the left column) and (B) (three plots of the right column). The initial profiles are characterized by $h_L = 1, u_L = -3, h_R = 1, u_R = 3$ in case (A) and $h_L = 1.5, u_L = -1.5, h_R = 2, u_R = 1.5$ in case (B). The upper plots display the behavior of the solution in the (u, h) plane. The black solid line (almost perfectly recovered by the red line) is the result expected from the dispersionless approximation. The red solid line displays the results of numerical simulations. The middle plots schematically represent the behavior of the Riemann invariant as functions of ξ . These are sketches, not on scale with the two other rows. The lower plots compare the numerical simulations for the velocity field $u(\xi)$ (pink thick lines) with the analytic approach (black solid lines) from the dispersionless approximation. In these plots, the vertical colored line are the velocities of the edges between the different components of the wave structure, as determined from (54) in case (A) and (56) in case (B).

Here the hydrodynamic interpretation is that the two fluids are moving away from each other with velocities lower than in the previous case (A), and the rarefaction waves are now able to provide enough flux of fluid to create a plateau in the region which separates them. This plateau has a fixed value of the height h and the flow velocity u .

(C) In this case, the initial profile evolves to form a DSW on the left, an RW on the right, and a plateau in between. The Riemann invariants in the plateau region are $\lambda_-^P = \lambda_-^R$ and $\lambda_+^P = \lambda_+^L$. In the DSW region, the Riemann invariants behave as schematically represented in Fig. 4(c). The edges of the DSW propagate with velocities

$$s_-^L = v_2(\lambda_-^R, \lambda_-^R, \lambda_-^L, \lambda_+^L) = 2\lambda_-^R + \frac{(\lambda_+^L - \lambda_-^L)^2}{2(\lambda_+^L + \lambda_-^L - 2\lambda_-^R)},$$

$$s_+^L = v_2(\lambda_-^R, \lambda_-^L, \lambda_-^L, \lambda_+^L) = \frac{1}{2}(\lambda_-^R + 2\lambda_-^L + \lambda_+^L),$$

(57)

and the velocities of the edges of the RW are equal to

$$s_-^R = v_+(\lambda_-^P, \lambda_+^P) = \frac{1}{2}(\lambda_-^R + 3\lambda_+^L),$$

$$s_+^R = v_+(\lambda_-^R, \lambda_+^R) = \frac{1}{2}(\lambda_-^R + 3\lambda_+^R).$$

(58)

This situation could be interpreted as if one fluid was colliding with the other flowing away with such velocity that a plateau with increased density is formed between them. The corresponding wave structure is displayed in Fig. 7(C). The right RW and the plateau region are correctly described by

the dispersionless approximation, as can be checked on the upper plot of this figure where the two approaches perfectly match between points P (plateau region) and R (right boundary). Of course, this is not true for the DSW: at variance with the behavior expected on the basis of the dispersionless approximation (black solid line), the numerical results (red solid line) display large oscillations between points P and L . This behavior is, however, quite successfully described by the Whitham approach, as can be seen in the lower plot of Fig. 7(C).

(D) Here we have an RW on the left and a DSW on the right with a plateau in between. The Riemann invariants in the plateau region are equal again to $\lambda_-^P = \lambda_-^R$, $\lambda_+^P = \lambda_+^L$. The velocities of the RW's edges are equal to

$$s_-^L = v_-(\lambda_-^L, \lambda_+^L) = \frac{1}{2}(3\lambda_-^L + \lambda_+^L),$$

$$s_+^L = v_-(\lambda_-^R, \lambda_+^L) = \frac{1}{2}(3\lambda_-^R + \lambda_+^L).$$

(59)

The behavior of the two dispersionless Riemann invariants in the region of the rarefaction wave corresponds to the case illustrated in Fig. 4(b). In the DSW region, there are four Riemann invariants, which behave as schematically represented in Fig. 4(d), and the edges of the DSW propagate with velocities

$$s_-^R = v_3(\lambda_-^R, \lambda_+^R, \lambda_+^L) = \frac{1}{2}(\lambda_-^R + 2\lambda_+^R + \lambda_+^L),$$

$$s_+^R = v_3(\lambda_-^R, \lambda_+^R, \lambda_+^L) = 2\lambda_+^L + \frac{(\lambda_+^R - \lambda_-^R)^2}{2(\lambda_+^R + \lambda_-^R - 2\lambda_+^L)}.$$

(60)

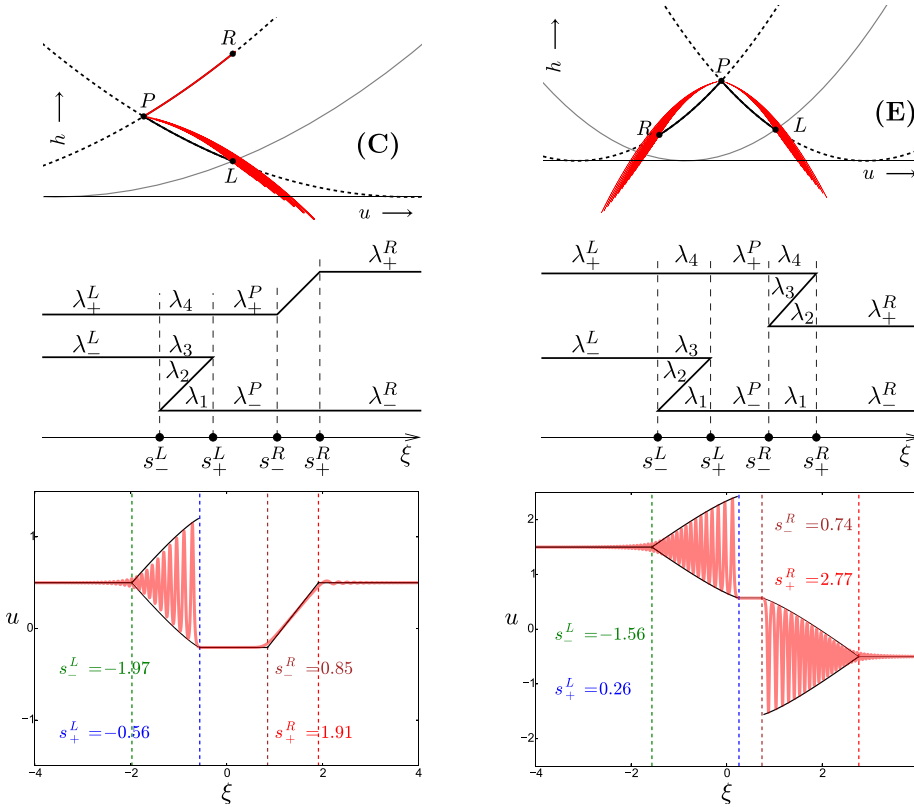


FIG. 7. Same as Fig. 6 for the cases (C) (three plots of the left column) and (E) (three plots of the right column). The initial profiles are characterized by $h_L=0.5, u_L=0.5, h_R=2, u_R=0.5$ in case (C) and $h_L=0.6, u_L=1.5, h_R=0.5, u_R=-0.5$ in case (E). The lower plots compares the numerical simulations for the velocity field $u(\xi)$ (pink thick lines) with the theoretical approach (black solid lines) composed of dispersionless approaches (in the plateau and the RW region) and Whitham modulation theory for the DSW. In the region of the DSW, we only display the envelope of the nonlinear modulated wave. A more accurate comparison is done in Fig. 8.

This situation is similar to the preceding one upon exchanging the roles of the left and right fluids; we thus do not illustrate it by a figure.

(E) In this case, the initial profile evolves in two DSWs separated by a plateau, the parameters of which are $\lambda_-^P = \lambda_-^R$ and $\lambda_+^P = \lambda_+^L$. The DSW's edges propagate with velocities

$$\begin{aligned}
 s_-^L &= v_2(\lambda_-^R, \lambda_-^R, \lambda_-^L, \lambda_+^L) = 2\lambda_-^R + \frac{(\lambda_+^L - \lambda_-^L)^2}{2(\lambda_+^L + \lambda_-^L - 2\lambda_-^R)}, \\
 s_+^L &= v_2(\lambda_-^R, \lambda_-^L, \lambda_-^L, \lambda_+^L) = \frac{1}{2}(\lambda_-^R + 2\lambda_-^L + \lambda_+^L), \\
 s_-^R &= v_3(\lambda_-^R, \lambda_+^R, \lambda_+^R, \lambda_+^L) = \frac{1}{2}(\lambda_-^R + 2\lambda_+^R + \lambda_+^L), \\
 s_+^R &= v_3(\lambda_-^R, \lambda_+^R, \lambda_+^L, \lambda_+^L) = 2\lambda_+^L + \frac{(\lambda_+^R - \lambda_-^R)^2}{2(\lambda_+^R + \lambda_-^R - 2\lambda_+^L)}.
 \end{aligned}
 \tag{61}$$

Here we have a collision of two fluids with “moderate” velocities: the two DSWs do not overlap, but a central plateau region of increased height is formed. This situation is represented in Fig. 7(E). Again, the theoretical approach quite accurately describes the numerical results (cf. the bottom row).

The upper part of the figure illustrates a phenomenon already present in case (C): the large nonlinear oscillations in the DSW regions are associated with locally negative values of $h(x, t)$. This phenomenon is clearly seen in Fig. 8, which represents h as a function of ξ for the two configurations (C) and (E) considered in Fig. 7. Although extended

regions of constant and negative values of h lead to a dynamical instability [as clearly seen from the dispersion relation (2)], nothing forbids local excursions of h below 0, and this is confirmed by the excellent agreement of the numerical and theoretical results presented in Fig. 8. Of course, in this case, the interpretation of h as being the height of a fluid surface becomes meaningless, but, as explained in the introduction, the physical model behind the nonlinear equations (3) can have an origin different from shallow water physics.

(F) In this configuration, the two fluids collide with velocities so large that the central plateau observed in case (E) disappears: the DSWs overlap and, on the basis of a similar situation observed for the nonlinear Schrödinger equation¹⁸ and for the Landau-Lifshitz equation,¹⁶ one would

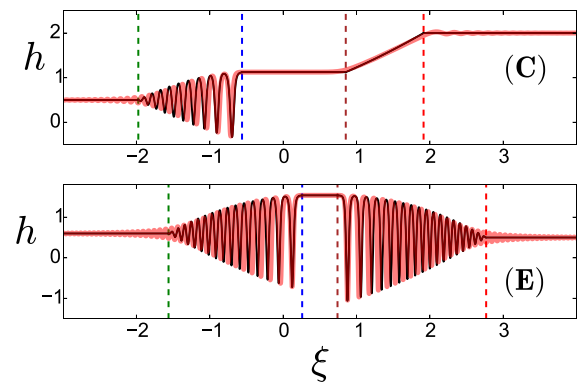


FIG. 8. h as a function of ξ for the same configurations as the ones depicted in Figs. 7(C) and 7(E). The pink solid line represents the results of the numerical simulations, and the black solid line is the theoretical result. Note the numerous excursions of $h(x, t)$ below zero.

expect that the plateau is replaced by a new structure, separating two partial DSWs, which can be approximated by a non-modulated cnoidal wave (whose four Riemann invariants are constant) or more accurately by a two-phase nonlinear wave.

Our numerical simulations show that this is not the case: the collision of the DSW is here associated with a numerical instability which we attribute to a physical dynamical instability of the region of the overlapping DSWs.

V. DAM BREAK AND PISTON PROBLEM

In view of the particularities noticed in Sec. IV—possible negative values of h and dynamical instabilities—it is interesting to study in more detail two model cases, illustrating the specificity of the Kaup-Boussinesq system. The first one is the dam break problem, which corresponds to a particular case of initial conditions (4). The second case is the piston problem. It does not pertain to the same class of initial conditions, but nevertheless provides an instructive insight on non-modulated cnoidal waves whose stability is questioned by the results obtained in case (F).

A. Dam break problem

This is the case where a semi-infinite constant height of water expands into empty space, which would be a model of flow after the abrupt breaking of a dam. Such a configuration is schematically described by an initial condition of type (4) with

$$h_R = 0 \quad \text{and} \quad u_R = 0. \tag{62}$$

On the basis of physical intuition, one expects that the time evolution of this initial profile will result in a rarefaction wave expanding into vacuum, as for the case illustrated in Fig. 2(a). This is not quite correct: such a situation is only reached when u_L is sufficiently negative. More specifically, the initial condition (62) pertains either to case (A) when $u_L < -2\sqrt{h_L}$, to case (D) when $|u_L| < 2\sqrt{h_L}$, or to case (F) when $u_L > 2\sqrt{h_L}$. In other words, this is only when the initial left velocity (the initial velocity of the water of the dam) is negative enough that a rarefaction wave is observed. This behavior is different from the one observed in the similar case for the nonlinear Schrödinger equation.¹⁸ In the present case, the most natural situation where $u_L = 0$ (the water in the dam is initially steady) pertains to case (D) for which the dam break leads to a DSW where the field h becomes negative. Only when u_L becomes negative enough [in practice, when it becomes lower than $-2\sqrt{h_L}$, i.e., when one reaches the regime (A)] does the excursion of $h(x, t)$ below zero disappear.

This point deserves a slightly more detailed discussion: for the dam break problem in case (D), one can easily check that the plateau region has a vanishing extension ($s_+^L = \frac{1}{2}\lambda_+^L = s_+^R$). The behavior of the Riemann invariants is depicted in Fig. 9. In this case, $\lambda_1 = \lambda_2$ and the DSW is described by a nonlinear trigonometric wave^{20,21} whose large amplitude boundary (at s_+^R) corresponds to an algebraic soliton of type (28) for which the largest value of μ is $\lambda_4 = \lambda_+^L$. Then,

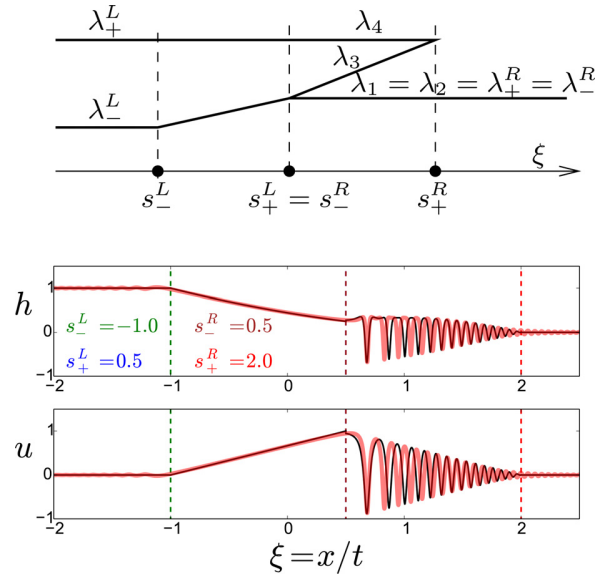


FIG. 9. The upper plot is a sketch of the behavior of the Riemann invariants describing the dam break problem when $|u_L| < 2\sqrt{h_L}$ [type (D) configuration]. The dispersionless Riemann invariants describing the boundary conditions at the right are $\lambda_+^R = \lambda_-^R = 0$, and at the left, $\lambda_{\pm}^L = \frac{1}{2}u_L \pm \sqrt{h_L}$. The two lower plots compare the results of the numerical simulations (pink solid lines) with the theoretical results (black solid lines) for the boundary condition $h_L = 1$ and $u_L = 0$.

from (13), the corresponding extremal value of h is $-\frac{1}{2}\lambda_4^2 = -\frac{1}{2}(\frac{1}{2}u_L + \sqrt{h_L})^2$: it is always negative, and only vanishes when one leaves regime (D) to enter regime (A), i.e., when $u_L \leq -2\sqrt{h_L}$: in this case, the plateau P and the right boundary R coincide and the flow is of the type exemplified in Fig. 2(a), which corresponds to an RW expanding into empty space, as intuitively expected.

B. Piston problem

The piston problem corresponds to the situation where a hard wall (the piston) is moving (in the case considered here, with a constant positive velocity V) with respect to a steady fluid. We work henceforth in the rest frame of the piston. In this frame, the piston is located at $x=0$, and the fluid is incoming from the right with a constant velocity $u_R = -V$ and a fixed constant depth h_R . The boundary condition on the piston is $u(0, t) = 0$: the fluid in contact with the piston is at rest with respect to it. The boundary condition for the height is taken as $h(0, t) = 0$, or $h_x(0, t) = 0$. These two conditions, of Dirichlet or Neumann type, are equivalent if treated within the Whitham approach, since the corresponding profiles differ only locally near 0, over a characteristic length of order 1.

For intermediate velocities V , the profile is of the type characterized by the arrangement of Riemann invariants displayed in Fig. 4(d): there is a plateau in contact with the piston, then, at its right, a DSW, and finally a plateau corresponding to the right boundary condition, characterized by $\lambda_{\pm}^R = \frac{1}{2}u_R \pm \sqrt{h_R}$. The plateau in contact with the piston is characterized by a height h_L (unknown at this point) and a velocity $v_L = 0$; hence $\lambda_{\pm}^L = \pm\sqrt{h_L}$. The constancy of the lower Riemann invariant across the structure of Fig. 4(d) yields $\lambda_-^L = \lambda_-^R$, which fixes the value of $h_L = (\sqrt{h_R} - u_R/2)^2$. The velocities

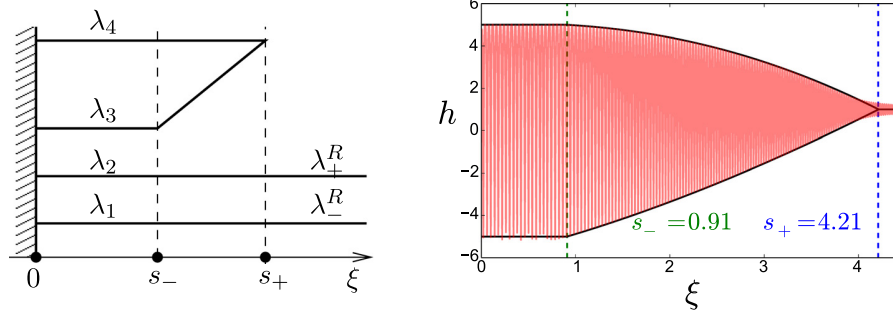


FIG. 10. The piston problem for a velocity $V > 2\sqrt{h_R}$. The left plot displays a sketch of the corresponding arrangement of Riemann invariants. In the rest frame of the piston, the SCW occupies the region $0 < \xi < s_-$, and the DSW the region $s_- < \xi < s_+$. The right plot compares the results of our numerical simulations for $h(x, t)$ with the prediction of Whitham theory. The boundary conditions are $V = 2.5 = -u_R$ and $h_R = 1$. In the numerical approach, the piston is mimicked by a strong repulsive potential.

of the edges of the DSW are determined from (51) and (52). In particular, the boundary between the left plateau and the DSW has a velocity $s_- = \sqrt{h_R} - V/2$. This velocity vanishes when $V = 2\sqrt{h_R}$. For piston velocities V larger than this threshold, the plateau in contact with the piston disappears and the structure of the flow changes: in a good approximation, it is represented by a stationary, non-modulated cnoidal wave (SCW) in contact with the piston. This SCW is connected to its right with a partial DSW, itself connecting to a plateau defined by the right boundary condition. This corresponds to the arrangement of Riemann invariants displayed in Fig. 10.

The fact that the cnoidal wave located in the region $0 < \xi < s_-$ in Fig. 10 is stationary reflects in the relation $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 0$, which fixes its phase velocity to zero. This yields

$$\lambda_3 + \lambda_4 = -\lambda_1 - \lambda_2 = -u_R = V. \tag{63}$$

Another condition is obtained by imposing that there is no flux through the piston, and therefore the average flux vanishes: $\langle hu \rangle = 0$ [it is evident that there is no contribution of the last term in the first Eq. (3) to the average flux, since $\langle u_{xx} \rangle \equiv 0$ by virtue of local periodicity]. The relation (63) yields $s_1 = 0$ and Eq. (13) now reads $u = -2\mu$ and $h(\mu) = -s_2 - 2\mu^2$, where $s_2 = \lambda_1\lambda_2 - (\lambda_1 + \lambda_2)^2 + \lambda_3\lambda_4$. Hence we get the condition

$$s_2\langle \mu \rangle + 2\langle \mu^3 \rangle = 0, \tag{64}$$

where $\langle \mu^n \rangle = L^{-1} \oint \frac{1}{2} \mu^n d\mu / \sqrt{-P(\mu)}$. Condition (64) is fulfilled for $s_3 = (\lambda_1 + \lambda_2)(\lambda_3\lambda_4 - \lambda_1\lambda_2) = 0$. Together with (63) this yields a system for the yet unknown quantities λ_3 and λ_4 . The obvious solutions are [taking into account the ordering (11)] $\lambda_4 = -\lambda_1$ and $\lambda_3 = -\lambda_2$. Then, in the SCW, the height h oscillates between the two opposite values $\pm 2V\sqrt{h_R}$ and the velocity v between $-V \pm 2\sqrt{h_R}$. The velocities of the edges of the DSW are $s_- = v_3(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$ and $s_+ = v_3(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_4, \lambda_4) = 2\sqrt{h_R} + V - h_R/(V + \sqrt{h_R})$. The wavelength of the large amplitude edge of the DSW (at $\xi = s_-$) is given by

$$L = \frac{2K(m^*)}{V}, \quad \text{where} \quad m^* = \frac{4h_R}{V^2} \tag{65}$$

is the modulus (20) of the elliptic functions; $m^* < 1$ in the present case since $V > 2\sqrt{h_R}$. As is checked in Fig. 10, these predictions are in excellent agreement with the numerical simulations.

Two comments are in order here: first, the numerical simulations show that the cnoidal wave is weakly modulated, and, as suggested in Refs. 12 and 24, it should be more accurately described as a two phase solution. However, as seen in Fig. 10, the modulation is small, and the approximate description of the structure as an SCW is quite accurate. Second, and more important, we have here an example of dynamically stable non-modulated cnoidal wave with large amplitude (h oscillate between ± 5 in the SCW region of Fig. 10). This is quite different from the situation observed in Sec. IV [region (F) in Fig. 5] where an expected SCW resulting from the collision of two DSWs has proven unstable. This example shows that the wave structures in the piston problem may have properties quite different from those arising from the evolution of initial discontinuities.

VI. CONCLUSION

In this paper, we have developed a full classification of the wave patterns evolving dynamically from initial discontinuities according to the Kaup-Boussinesq equation with positive dispersion. At variance with the case of negative dispersion considered in Ref. 12, the classification used here follows closely the one for the nonlinear Schrödinger equation,¹⁸ although there are a number of technical differences caused by the possible negative value of the “height” field and also by different representations of dark and bright “soliton trains” and corresponding changes of the Whitham modulation equations. This common behavior of the positive dispersion Kaup-Boussinesq and the nonlinear Schrödinger equation is related to the common sign of dispersion in both equations and will be clarified in a forthcoming publication.¹⁶

Our results can find applications as approximations of the dynamics of polarization waves in two-component Bose-Einstein condensates²¹ and of magnetic systems with easy-plane anisotropy.²⁵ Work in this direction is in progress.

ACKNOWLEDGMENTS

We are grateful to M. A. Hoefer for useful discussions. A.M.K. thanks Laboratoire de Physique Théorique et

Modèles Statistiques (Université Paris-Sud, Orsay) where this work was started, for kind hospitality. This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (Project No. 16-01-00398) and by the French ANR under Grant No. ANR-15-CE30-0017 (Haralab project).

- ¹R. Courant and K. O. Friedrichs, *Supersonic Flow and Shock Waves* (Interscience Publishers, New York, 1956).
- ²Y. B. Zel'dovich and Y. P. Raizer, *Physics of Shock Waves and High-Temperature Hydrodynamic Phenomena* (Dover Books on Physics, New York, 2002).
- ³A. M. Kamchatnov, *Nonlinear Periodic Waves and Their Modulations—An Introductory Course* (World Scientific, Singapore, 2000).
- ⁴G. A. El and M. A. Hofer, “Dispersive shock waves modulation theory,” *Physica (Amsterdam)* **333D**, 11 (2016).
- ⁵D. J. Korteweg and G. de Vries, “On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and on a new type of long stationary waves,” *Philos. Mag.* **39**, 422–443 (1895).
- ⁶T. B. Benjamin and M. J. Lighthill, “On cnoidal waves and bores,” *Proc. R. Soc. London, A* **224**, 448 (1954).
- ⁷G. B. Whitham, “Non-linear dispersive waves,” *Proc. R. Soc. London, A* **283**, 238–261 (1965).
- ⁸A. V. Gurevich and L. P. Pitaevskii, “Nonstationary structure of a collisionless shock wave,” *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **65**, 590–604 (1973) [*Sov. Phys.-JETP* **38**, 291–297 (1974)].
- ⁹J. Boussinesq, “Essai sur la théorie des eaux courantes,” *Mém. Prés. Div. Sav. Acad. Sci. Inst. Fr.* **23**, 1 (1877).
- ¹⁰D. J. Kaup, “A higher-order water-wave equation and the method for solving it,” *Prog. Theor. Phys.* **54**, 396 (1975).
- ¹¹V. B. Matveev and M. I. Yavor, “Solutions presque périodiques et N-solitons de l'équation hydrodynamique non linéaire de Kaup,” *Ann. Inst. Henry Poincaré* **31**, 25 (1979).
- ¹²G. A. El, R. H. J. Grimshaw, and M. V. Pavlov, “Integrable shallow-water equations and undular bores,” *Stud. Appl. Math.* **106**, 157 (2001).
- ¹³G. A. El, R. H. J. Grimshaw, and A. M. Kamchatnov, “Wave breaking and the generation of undular bores in an integrable shallow water system,” *Stud. Appl. Math.* **114**, 395 (2005).
- ¹⁴G. A. El, R. H. J. Grimshaw, and A. M. Kamchatnov, “Analytic model for a weakly dissipative shallow-water undular bore,” *Chaos* **15**, 037102 (2005).
- ¹⁵The negative dispersion in Eq. (1) corresponds to a “+” sign in front of the third derivative term in the first equation of the system (3).
- ¹⁶S. K. Ivanov *et al.*, “The Riemann problem for polarization waves in a two-component Bose-Einstein condensate,” (unpublished).
- ¹⁷A. V. Gurevich and A. L. Krylov, “Dissipationless shock waves in media with positive dispersion,” *Sov. Phys. JETP* **65**, 944–953 (1987).
- ¹⁸G. A. El, V. V. Geogjaev, A. V. Gurevich, and A. L. Krylov, “Decay of an initial discontinuity in the defocusing NLS hydrodynamics,” *Physica D* **87**, 186–192 (1995).
- ¹⁹ $s_1 = \sum_{i=1}^4 \lambda_i$, $s_2 = \sum_{i<j} \lambda_i \lambda_j$, $s_3 = \sum_{i<j<k} \lambda_i \lambda_j \lambda_k$ and $s_4 = \prod_{i=1}^4 \lambda_i$.
- ²⁰A. M. Kamchatnov, Y.-H. Kuo, T.-C. Lin, T.-L. Horng, S.-C. Gou, R. Clift, G. A. El, and R. H. J. Grimshaw, “Undular bore theory for the Gardner equation,” *Phys. Rev. E* **86**, 036605 (2012).
- ²¹T. Congy, A. M. Kamchatnov, and N. Pavloff, “Dispersive hydrodynamics of nonlinear polarization waves in two-component Bose-Einstein condensates,” *SciPost Phys.* **1**, 006 (2016).
- ²²A. V. Gurevich and A. P. Meshcherkin, “Expanding self-similar discontinuities and shock waves in dispersive hydrodynamics,” *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **87**, 1277–1292 (1984), [*Sov. Phys. JETP* **60**, 732–740 (1984)].
- ²³G. A. El, “Resolution of a shock in hyperbolic systems modified by weak dispersion,” *Chaos* **15**, 037103 (2005).
- ²⁴R. F. Bikbaev, “Finite-gap attractors and transition processes of the shock-wave type in integrable systems,” *Zapadn. Nauchno. Semin. POMI* **199**, 25 (1992) [*J. Math. Sci.* **77**, 3033 (1995)].
- ²⁵E. Iacocca, Th. Silva, and M. A. Hofer, “Breaking of Galilean invariance in the hydrodynamic formulation of ferromagnetic thin films,” *Phys. Rev. Lett.* **118**, 017203 (2017).

Article 4 : Solution of the Riemann problem for polarization waves in a two-component Bose-Einstein condensate (prépublication)

Ce dernier travail dont on présente ici la pré-publication correspond à la résolution du problème de Riemann de l'équation de Landau-Lifshitz et constitue la continuation de l'étude débutée dans l'Article 2. Les principaux résultats ont été présentés dans ce dernier chapitre. Au contraire de l'Article 2 où nous avons étudié le problème de Riemann dans un régime où les équations (3.17-3.18) sont dites *genuinely non-linear*²⁴, nous avons résolu ici le problème pour une condition initiale (3.79) générale pour laquelle le système peut parcourir dans l'espace des phases différents triangles de monotonie. Le caractère non *genuinely non-linear* du problème général permet d'observer, comme on l'a présenté dans ce chapitre, de nouvelles structures comme les ondes de choc dispersives de contact et plus généralement les chocs que l'on a appelé chocs mixtes.

D'un point de vue plus formel, le système étudié ici combine deux difficultés : il supporte la propagation d'onde se propageant dans les deux directions et il constitue de façon générale un système d'équations non *genuinely non-linear*; sa résolution est inédite et la méthode proposée ici ouvre la voie à la résolution de nouveaux systèmes intégrables présentant les mêmes propriétés.

24. Dans ce régime, les invariants de Riemann *hydrodynamiques* varient de façon monotone avec les champs physiques.

Solution of the Riemann problem for polarization waves in a two-component Bose-Einstein condensate

S. K. Ivanov,^{1,2} A. M. Kamchatnov,^{1,2} T. Congy,³ and N. Pavloff³

¹*Institute of Spectroscopy, Russian Academy of Sciences, Troitsk, Moscow, 108840, Russia*

²*Moscow Institute of Physics and Technology, Institutsky lane 9, Dolgoprudny, Moscow region, 141700, Russia*

³*LPTMS, CNRS, Univ. Paris-Sud, Université Paris-Saclay, 91405 Orsay, France*

We provide a classification of the possible flow of two-component Bose-Einstein condensates evolving from initially discontinuous profiles. We consider the situation where the dynamics can be reduced to the consideration of a single polarization mode (also denoted as “magnetic excitation”) obeying a system of equations equivalent to the Landau-Lifshitz equation for an easy-plane ferromagnet. We present the full set of one-phase periodic solutions. The corresponding Whitham modulation equations are obtained together with formulas connecting their solutions with the Riemann invariants of the modulation equations. The problem is not genuinely nonlinear, and this results in a non-single-valued mapping of the solutions of the Whitham equations with physical wave patterns as well as to the appearance of new elements — contact dispersive shock waves — that are absent in more standard, genuinely nonlinear situations. Our analytic results are confirmed by numerical simulations.

PACS numbers: 67.85.Fg,47.35.Fg,75.78.-n

I. INTRODUCTION

The first experimental realizations of Bose-Einstein condensation (BEC) of single species ultracold atomic vapors [1, 2] were soon followed by their multi-component counterparts [3] which appeared to be nontrivial extensions of the previous ones, the dynamical and nonlinear aspects of phase separation revealing particularly rich [4, 5]. Over the years, numerous studies have been devoted to theoretical and experimental investigations associated with these specific features, namely nonlinearity and dynamics in multi-component BECs, see, e.g., the reviews [6, 7] and chapters in the books [8–10].

The specific physical ingredients of this body of research are the (intra- and inter-species) interactions, the negligible viscosity and the large dispersive effects. Another important aspect is the different degrees of freedom associated with the different types of motion of the components. For two component systems one can schematically separate global in-phase motion — associated with density fluctuations — from out-of-phase motion, associated with a “polarization” or “magnetic” degree of freedom. This appealing classification of the dynamical behaviors of the system is however oversimplified: in many instances, a clean separation between these idealized types of excitation is not possible, even at the perturbative level (see, e.g., the discussion in [11]). However, a recent theoretical breakthrough has been made in Ref. [12] where it has been shown that for stable two component mixtures close to the immiscibility region, the density and magnetization degrees of freedom decouple, even at the nonlinear level. The polarization sector is particularly interesting, new solitons have been first identified in Ref. [12] and a rich variety of nonlinear excitations rapidly followed [13]: cnoidal waves, nonlinear trigonometric waves, algebraic solitons. The interest of these studies is not uniquely theoretical: the regime of

parameters for which the dynamics of polarization excitations decouples from that of density excitations corresponds to systems of experimental interest; for instance, it is exactly realized in the mixture of the two hyperfine states $|F = 1, m_F = \pm 1\rangle$ of ^{23}Na [14], and, to a good approximation, in the mixture of hyperfine states of ^{87}Rb considered in Refs. [15] ($|1, 1\rangle$ and $|2, 2\rangle$) and [16] ($|1, -1\rangle$ and $|1, 0\rangle$ or $|1, -1\rangle$ and $|2, -2\rangle$).

An investigation of the one-dimensional Riemann problem for polarization excitations was started in Ref. [13], which was motivated by the study of two-species counterflow considered in Ref. [15]: an initial value problem has been considered, consisting, for each component, in piece-wise constant initial (relative) density and velocity, with a single discontinuity. The importance of this type of problems lies in the facts that, first, their solution involves characteristic wave patterns arising in the space-time evolution of quite general initial pulses, and, second, a number of real physical situations can be reduced to the discussion of the dynamics of initial discontinuities. The interest of this so-called “Riemann problem” was first realized in the framework of compressible fluid dynamics, where the well-known viscous shocks play a key role in the classification of evolutions of initial discontinuities (see, e.g., Ref. [17]). Extension of this approach to systems where dispersion effects play a dominant role — instead of viscous ones — started with the ground breaking work of Gurevich and Pitaevskii [18] for the Korteweg-de Vries (KdV) equation, in which dispersive shock waves (DSWs) were approximated by nonlinear modulated waves whose evolution were described by means of Whitham theory of modulations [19, 20]. The theory of DSWs has been much developed since and has found numerous different applications (see, e.g., a recent review [21] and references therein). In particular, the classification of the space-time evolution of initial discontinuities was established for waves whose dynamics

is described by the nonlinear Schrödinger (NLS) equation [22, 23] and by the Kaup-Boussinesq (KB) equation [24, 25]. In all these cases (KdV, NLS and KB), the evolution of the DSW is governed by the dynamical Whitham equations for the so called “Riemann invariants” [17] who have a one-to-one correspondence with relevant physical variables. However, the problem becomes much more complicated when this mapping is multi-valued, even when the Whitham equations can be represented in a diagonal form. For instance, new types of structures appear in such systems, as was indicated in Ref. [26] for the case of the modified KdV (mKdV) equation. The full solution of the Riemann problem for the Gardner equation (related with the modified KdV equation) was given in Ref. [27] and this solution was adapted to the mKdV case in Ref. [28]. These examples refer to a unidirectional wave propagation described by a single nonlinear wave equation. However, similar complicated wave structures were discussed in Ref. [29] for the non-integrable Miyata-Camassa-Choi equation describing two-directional propagation of two-layer shallow water waves.

The case considered in Ref. [13] combines two difficulties: (i) as in the problems studied in Refs. [26–28], it corresponds to a situation where the dispersionless Riemann invariants are non-monotonously dependent on the physical variables, that is, the problem is not *genuinely nonlinear* (see, e.g., [30]) and, (ii) as in Ref. [29], it corresponds to a two-directional wave propagation described by a system of two nonlinear equations. To avoid too many complications, the study of Ref. [13] was initially restricted to a region of parameters where the dependence of the Riemann invariants on the physical variables remains monotonous, that is, the problem considered was actually genuinely nonlinear. In the present paper we extend this study and give the full solution of the Riemann problem for the space-time evolution of polarization waves in a two-component BEC. Our approach is based on the remark made in Ref. [13] that, for the regime of parameters identified in Ref. [12], nonlinear polarization waves can be described by the dissipationless Landau-Lifshitz (LL) equation with uniaxial easy-plane anisotropy [31, 32]. The exact integrability of this equation — which belongs to the Ablowitz-Kaup-Newell-Segur hierarchy — makes it possible to develop a Whitham modulational theory (Sec. IV) for describing configurations where nonlinear waves are slowly modulated, as observed in dispersive shocks. This will permit us to formulate a principle of classification valid for all the numerous wave patterns arising from the evolution of initial discontinuities.

An interesting aspect of the present work is its relevance to systems pertaining to widely different domains in physics. Configurations similar to the ones studied in the present work can be investigated in neighboring fields such as nonlinear fiber optics and also exciton-polariton condensed systems. But the physical ingredients characterizing the phenomena we are interested in — nonlinearity, weak dissipation, dispersion in a multi-component

system — are also encountered in quite different settings. As a result, the solution of the Riemann problem we give in the present work is also relevant to fluid mechanics [33–37] and to the nonlinear magnetization dynamics of anisotropic ferromagnets [38–40].

The paper is organized as follows: the model and the relevant dynamical equations are presented in section II. The exact integrability of the easy plane Landau-Lifshitz equations is used in Sec. III for writing its explicit one-phase solutions, determining the corresponding Riemann invariants, and writing the Whitham modulational equations. The full classification of the solutions of the Riemann problem is presented in Section V in terms of the combination of specific wave patterns, which we denote as “building blocks” or “key elements” which are first analyzed in Sec. IV. Finally, we present our conclusions in Sec. VI.

II. THE MODEL

We consider a one-dimensional system consisting in an elongated two component BEC described by the order parameters $\psi_{\uparrow}(x, t)$ and $\psi_{\downarrow}(x, t)$. The dynamics of the system is described by two coupled Gross-Pitaevskii equations:

$$\left(i\hbar\partial_t + \frac{\hbar^2\partial_x^2}{2m} \right) \begin{pmatrix} \psi_{\uparrow} \\ \psi_{\downarrow} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{\uparrow\uparrow}|\psi_{\uparrow}|^2 & g_{\uparrow\downarrow}\psi_{\uparrow}^*\psi_{\downarrow} \\ g_{\uparrow\downarrow}\psi_{\uparrow}^*\psi_{\downarrow} & g_{\downarrow\downarrow}|\psi_{\downarrow}|^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_{\uparrow} \\ \psi_{\downarrow} \end{pmatrix}, \quad (1)$$

where $g_{\uparrow\uparrow}$ and $g_{\downarrow\downarrow}$ are the intra-species nonlinear constants; $g_{\uparrow\downarrow}$ is the interspecies one. We consider the limit where $g_{\uparrow\uparrow} \approx g_{\downarrow\downarrow}$ and denote as g their common value (the situation where these two constants are not exactly equal is treated in Ref. [11]). We denote as δg the difference $g - g_{\uparrow\downarrow}$ and consider the situation

$$0 < \delta g \ll g. \quad (2)$$

The left condition is the mean-field miscibility condition of the two species (see, e.g., Refs. [8, 9]). The right condition implies that the three interaction constants are close to each other and that the system is close to the region of immiscibility. As discussed in Refs. [12, 13], in this situation the density and magnetic degrees of freedom effectively decouple.

The spinor wave function is parameterized as [41]

$$\begin{pmatrix} \psi_{\uparrow} \\ \psi_{\downarrow} \end{pmatrix} = \sqrt{\rho} e^{i\Phi/2} \Xi, \quad \text{where } \Xi = \begin{pmatrix} \cos\theta e^{-i\phi/2} \\ \sin\theta e^{i\phi/2} \end{pmatrix}. \quad (3)$$

In this expression $\rho(x, t)$ is the total density and $\theta(x, t)$ governs the relative densities of the two components: $\rho_{\uparrow}(x, t) = |\psi_{\uparrow}|^2 = \frac{1}{2}\rho(1 + \cos\theta)$ and $\rho_{\downarrow}(x, t) = |\psi_{\downarrow}|^2 = \frac{1}{2}\rho(1 - \cos\theta)$. $\Phi(x, t)$ and $\phi(x, t)$ are potentials for the velocity fields v_{\uparrow} and v_{\downarrow} of the two components, namely,

$$v_{\uparrow}(x, t) = \frac{\hbar}{2m}(\Phi_x - \phi_x), \quad v_{\downarrow}(x, t) = \frac{\hbar}{2m}(\Phi_x + \phi_x). \quad (4)$$

The small perturbations of a uniform BEC of total density ρ_0 with equal fractions of the two components ($\theta = \pi/2$) correspond to total density fluctuations which propagate with velocity $c_d = [\rho_0(g - \delta g/2)/m]^{1/2}$ and polarization excitations with velocity $c_p = (\rho_0 \delta g/2m)^{1/2}$. In the limit (2) these two velocities are widely different. As a result, even an initial state consisting of a mixture of density and polarization fluctuations rapidly separates into density perturbations propagating at large velocity c_d away from a region where only polarization excitations take place. For considering these excitations, it is appropriate to re-scale the lengths in units of the polarization healing length $\xi_p = \hbar/(2m\rho_0\delta g)^{1/2}$ and time in units of $\tau_p = \xi_p/c_p$. Once this is done, it has been shown in [13] that the dynamics of the polarization excitations is accounted for by the following system of coupled equations

$$\begin{aligned} \theta_t + 2\theta_x \phi_x \cos \theta + \phi_{xx} \sin \theta &= 0, \\ \phi_t - \cos \theta (1 - \phi_x^2) - \frac{\theta_{xx}}{\sin \theta} &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

The other fields are fixed by the conditions $\rho(x, t) = \rho_0$ and $(\Phi_x - \phi_x \cos \theta)_x = 0$. Introducing the effective spin (σ_x, σ_y and σ_z are the Pauli matrices)

$$\mathbf{S} = \Xi^\dagger \boldsymbol{\sigma} \Xi = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi \\ \cos \theta \end{pmatrix}, \quad (6)$$

and the magnetization $\mathbf{M} = -\mathbf{S}$, one can easily verify that the system of equations (5) is equivalent to the dissipationless Landau-Lifshitz equation for an easy plane ferromagnet:

$$\partial_t \mathbf{M} = \mathbf{H}_{\text{eff}} \wedge \mathbf{M}, \quad \text{where} \quad \mathbf{H}_{\text{eff}} = \partial_x^2 \mathbf{M} - M_z \mathbf{e}_z, \quad (7)$$

\mathbf{e}_z being a unit vector of the z -axis. We have found that this form of the equations of motion is particularly appropriate for numerical simulations. The reason is that, contrarily to the systems (5) (and (8), see below), it does not involve small denominators when the density of one of the components gets very small. The other interesting feature of this system is that the anisotropic Landau-Lifshitz system (7) is integrable by the inverse scattering transform method and the corresponding Lax pair is known (see, e.g., [42, 43]). This result has been used in Ref. [44] to derive periodic solutions for ferromagnets with an easy-axis anisotropy, and we shall adapt here this approach to the easy-plane case (7).

For future convenience, we introduce a third version of (5): let us define the quantities $w(x, t) = \cos \theta = S_z = -M_z = (\rho_\uparrow - \rho_\downarrow)/\rho_0$ describing the variations of the relative density, and $v(x, t) = \phi_x = (v_\downarrow - v_\uparrow)/(2c_p)$ which represents the non-dimensional relative velocity. In terms of these two fields the equations of motion read

$$\begin{aligned} w_t - [(1 - w^2)v]_x &= 0, \\ v_t - [(1 - v^2)w]_x + \left[\frac{1}{\sqrt{1 - w^2}} \left(\frac{w_x}{\sqrt{1 - w^2}} \right) \right]_x &= 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Before embarking to the study of nonlinear phenomena, it is interesting to briefly consider linear perturbations of a stationary configuration: let a uniform background be characterized by a relative density w_0 and a relative velocity v_0 . Small perturbations of the type

$$w = w_0 + w'(x, t), \quad v = v_0 + v'(x, t), \quad \text{with } |v'|, |w'| \ll 1$$

can be sought under the form of plane waves with wave vector k and angular frequency ω . Linearizing the system (8) one obtains the following dispersion relation:

$$\omega = \left(2w_0v_0 \pm \sqrt{(1 - w_0^2)(1 - v_0^2) + k^2} \right) k. \quad (9)$$

By definition we always have $|w_0| = |\cos \theta_0| \leq 1$, however v_0 can have any value, and for $|v_0| > 1$ the frequency ω is complex for small enough wavevectors k . This implies a long wavelength modulational instability of a system with large relative velocity of the two components, more precisely for a background relative velocity $v_\downarrow - v_\uparrow$ larger than $2c_p$. This mechanism of instability has been first theoretically studied in Ref. [45].

In what follows, we consider the dynamically stable situation where $|v_0| < 1$. In this case the large wavelength limit of the dispersion relation (9) corresponds to waves propagating with the ‘‘polarization/magnetization sound velocity’’

$$c_\pm = 2w_0v_0 \pm \sqrt{(1 - w_0^2)(1 - v_0^2)}. \quad (10)$$

For a uniform system in which both components have equal densities ($w_0 = 0$) and no relative velocity ($v_0 = 0$) one gets $c_\pm = \pm 1$, i.e., going back to dimensional quantities, the speed of the magnetic sound is $\pm c_p$ as expected. We note that the + sign (– sign) in expression (10) corresponds to polarization excitations propagating to the right (to the left) with respect to the background in the reference frame in which the total flux of the condensate is zero.

A. Limiting regimes

For some specific values of the field variables, the anisotropic Landau-Lifshitz system (7) can be approximated by simpler nonlinear models. In the present subsection we consider two limiting cases: the nonlinear Schrödinger equation (Sec. II A 1) and the Kaup-Boussinesq system (Sec. II A 2). These limiting regimes will be used in Secs. V A and V B to help classifying the large number of different solutions of the Riemann problem.

1. Nonlinear Schrödinger regime

In the regime where $w(x, t)$ is close to unity and $v(x, t)$ is small, defining $w'(x, t) = 1 - w(x, t)$ one can rewrite

the system (8) keeping only terms up to second order in the small quantities v and w' :

$$\begin{aligned} w'_t + 2(w'v)_x &= 0, \\ v_t + 2vv_x + w'_x + \left[\frac{w'^2_x}{4w'^2} - \frac{w'_{xx}}{2w'} \right]_x &= 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Defining $n = w'/2$ and changing variable to $T = 2t$, the system (11) can be cast in the form

$$\begin{aligned} n_T + (nv)_x &= 0, \\ v_T + vv_x + n_x + \left[\frac{n^2_x}{8n^2} - \frac{n_{xx}}{4n} \right]_x &= 0, \end{aligned} \quad (12)$$

which is the hydrodynamic form of the defocusing nonlinear Schrödinger equation

$$i\psi_T = -\frac{1}{2}\psi_{xx} + |\psi|^2\psi. \quad (13)$$

The system (12) is obtained from the standard form (13) by means of the Madelung transform ($n = |\psi|^2$ and $v = (\arg \psi)_x$). We note that a similar approximation is also valid for $w(x, t)$ close to -1 and small $v(x, t)$.

2. Kaup-Boussinesq regime

In the regime where $v(x, t)$ is close to unity and $w(x, t)$ is small, defining $v'(x, t) = 1 - v(x, t)$, one can rewrite the system (8) keeping only terms up to second order in the small quantities v' and w :

$$\begin{aligned} w_t + 2ww_x + v'_x &= 0, \\ v'_t + 2(v'w)_x - w_{xxx} &= 0. \end{aligned} \quad (14)$$

One defines here $u = \sqrt{2}w$, $h = v'$ and changes the spatial variable to $X = x/\sqrt{2}$. This casts the approximate system (14) into the canonical Kaup-Boussinesq form [46]

$$\begin{aligned} u_t + uu_X + h_X &= 0, \\ h_t + (hu)_X - \frac{1}{4}u_{XXX} &= 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Again a similar approximation can be derived when $v(x, t)$ is close to -1 and $w(x, t)$ small.

III. PERIODIC SOLUTIONS AND WHITHAM EQUATIONS

Among the key elements that are generated during the evolution of nonlinear waves, an important role is played by the DSWs that can be represented as modulated periodic solutions of the corresponding nonlinear wave equation. Consequently, for classifying of the wave patterns evolving from an initial discontinuity in the polarization mode, we have to present the periodic solutions of the LL equation in the most convenient form and to derive the corresponding Whitham modulation equations.

In Ref. [13] the periodic solutions have been found by a direct method, and were not parameterized in terms of Riemann invariants. The Whitham equations were used in El's form [47] which provides the main informations concerning the evolution of initial step-like discontinuous distributions without requiring the knowledge of the Riemann invariants. However, for solving the full Riemann problem it is more appropriate to use methods based on the explicit knowledge of the Riemann invariants. In this section we shall obtain the periodic solutions of the LL equation by means of the finite gap integration method, give the explicit form of the Riemann invariants, and derive the corresponding Whitham modulation equations.

A. One-phase finite-gap integration method of the easy-plane Landau-Lifshitz equation

As well known, the LL equation (7) is integrable by the inverse scattering transform method (see, e.g., [42, 43]). The corresponding Lax pair can be written as

$$\frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F & G \\ H & -F \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}, \quad (16)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & -A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}, \quad (17)$$

where

$$\begin{aligned} F &= \frac{i\lambda}{2}M_z, & G &= -\frac{1}{2}\sqrt{1-\lambda^2}M_-, \\ H &= -\frac{1}{2}\sqrt{1-\lambda^2}M_+, \\ A &= \frac{i}{2}(1-\lambda^2)M_z + \frac{\lambda}{4}[(M_-)_xM_+ - M_-(M_+)_x], \\ B &= \frac{1}{2}\lambda\sqrt{1-\lambda^2}M_- + \\ &\quad \frac{i}{2}\sqrt{1-\lambda^2}[(M_z)_xM_- - M_z(M_-)_x], \\ C &= \frac{1}{2}\lambda\sqrt{1-\lambda^2}M_+ - \\ &\quad \frac{i}{2}\sqrt{1-\lambda^2}[(M_z)_xM_+ - M_z(M_+)_x]. \end{aligned} \quad (18)$$

In (18) $M_{\pm} = M_x \pm iM_y$ and λ is a constant spectral parameter. Periodic solutions for ferromagnets with an easy-axis anisotropy were found in Ref. [44] and we shall here adapt the approach used in this reference to the easy-plane case of Eq. (7). The 2×2 linear problems (16) and (17) have two linearly independent basis solutions which we denote as $(\psi_1, \psi_2)^T$ and $(\varphi_1, \varphi_2)^T$. We define the ‘‘squared basis functions’’

$$f = -\frac{i}{2}(\psi_1\varphi_2 + \psi_2\varphi_1), \quad g = \psi_1\varphi_1, \quad h = -\psi_2\varphi_2, \quad (19)$$

which obey the linear equations

$$f_x = -iHg + iGh, \quad (20a)$$

$$g_x = 2iGf + 2Fg, \quad (20b)$$

$$h_x = -2iHf - 2Fh, \quad (20c)$$

and

$$f_t = -iCg + iBh, \quad (21a)$$

$$g_t = 2iBf + 2Ag, \quad (21b)$$

$$h_t = -2iCf - 2Ah. \quad (21c)$$

It is easy to check that the expression $f^2 - gh$ does not depend on x and t , however it can depend on the spectral parameter λ . The (quasi)periodic solutions are distinguished by the condition that the term $f^2 - gh$ be a polynomial $P(\lambda)$. For the one-phase case which we are interested in, it suffices to consider a fourth degree polynomial

$$\begin{aligned} f^2 - gh &= P(\lambda) = \prod_{i=1}^4 (\lambda - \lambda_i) \\ &= \lambda^4 - s_1 \lambda^3 + s_2 \lambda^2 - s_3 \lambda + s_4, \end{aligned} \quad (22)$$

where s_i are standard symmetric functions of the four zeros ($\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ and λ_4) of the polynomial:

$$s_1 = \sum_i \lambda_i, \quad s_2 = \sum_{i<j} \lambda_i \lambda_j, \quad s_3 = \sum_{i<j<k} \lambda_i \lambda_j \lambda_k, \quad (23)$$

$$s_4 = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4.$$

We write the solution of Eqs. (20) and (21) under the form

$$\begin{aligned} f(x, t) &= M_z \lambda^2 - f_1(x, t) \lambda + f_2(x, t), \\ g(x, t) &= M_- \sqrt{1 - \lambda^2} (\lambda - \mu(x, t)), \\ h(x, t) &= M_+ \sqrt{1 - \lambda^2} (\lambda - \mu^*(x, t)), \end{aligned} \quad (24)$$

where, to simplify computations, we have chosen the coefficients of the terms with the highest degrees in λ in such a way that the identity (22) is already satisfied at order λ^4 . The quantity $f_1(x, t)$, $f_2(x, t)$, $\mu(x, t)$ and $\mu^*(x, t)$ in (24) are yet unknown functions; $\mu(x, t)$ and $\mu^*(x, t)$ are *a priori* unrelated, but we shall soon establish that they are complex conjugate one to the other, whence the notation.

Plugging expressions (24) back into (22) and equating the coefficients of the powers of λ yields four conservation laws

$$\begin{aligned} -2f_1 w + (1 - w^2)(\mu + \mu^*) &= s_1, \\ 2f_1 f_2 - (1 - w^2)(\mu + \mu^*) &= s_3, \\ f_1^2 - 2f_2 w + (1 - w^2)(\mu \mu^* - 1) &= s_2, \\ f_2^2 - (1 - w^2) \mu \mu^* &= s_4, \end{aligned} \quad (25)$$

where we have used the above defined notation $w \equiv -M_z$ and have also taken into account the normalization

$$M_+ M_- + M_z^2 = 1. \quad (26)$$

Substitution of (24) into (20) and (21) gives, after equating the coefficients of powers of λ , a number of differential

equations; we shall write down here the ones which are the most important for our purpose. For instance the equation (20a) gives

$$w_x = -\frac{i}{2}(1 - w^2)(\mu - \mu^*), \quad f_{1,x} = 0, \quad f_{2,x} = w_x. \quad (27)$$

After factoring out the term $\sqrt{1 - \lambda^2}$, the equality of the coefficients of the terms of order λ in both sides of equation (20b) yields

$$(M_-)_x / M_- = i(f_1 + w\mu). \quad (28)$$

This equation, with account of $\phi_x = v$, $M_- = -\sqrt{1 - w^2} \exp(-i\phi)$ and of the first of Eqs. (27), leads to the following expression for the relative velocity:

$$v = -f_1 - \frac{1}{2}(\mu + \mu^*)w. \quad (29)$$

The variable μ satisfies the equation

$$\mu_x = i\sqrt{P(\mu)} \quad (30)$$

which can be easily obtained by putting the free parameter λ equal to μ in equation (20b). Substitution of (28) and (27) into (21b) where the parameter λ is taken equal to μ gives, owing to the first of identities (25), the equation $\mu_t = -(i/2)s_1 \sqrt{P(\mu)} = -(1/2)s_1 \mu_x$. This indicates that μ depends on the variable $\xi = x - (s_1/2)t$ only, that is

$$\mu_\xi = i\sqrt{P(\mu)}, \quad \xi = x - Vt, \quad V = \frac{1}{2}s_1. \quad (31)$$

Formally, equation (31) can be solved in terms of elliptic functions and it is then parameterized by the zeroes of the polynomial $P(\lambda)$. However, even for given values of these zeroes, the trajectory of μ in the complex μ -plane is not known and therefore it is impossible to prescribe the initial value of μ without some additional study. This difficulty can be overcome by the method suggested in Ref. [48], according to which the parameters f_1, f_2, μ, μ^* are to be represented as functions of w . This yields the solution in a so-called ‘‘effective’’ form, not subject to any additional constraint.

After simple manipulations on the system (25), we find, for a given set of λ_i ($i = 1, 2, 3, 4$), four possible forms of f_1 :

$$f_1 = \pm \sqrt{(1 + s_2 + s_4 + s'_4)/2}, \quad (32a)$$

and

$$f_1 = \pm \text{sgn}(s_1 + s_3) \sqrt{(1 + s_2 + s_4 - s'_4)/2}, \quad (32b)$$

where we have defined

$$\lambda'_i = \sqrt{1 - \lambda_i^2}, \quad s'_4 = \lambda'_1 \lambda'_2 \lambda'_3 \lambda'_4, \quad (33)$$

and made use of the identity $(1 + s_2 + s_4)^2 - (s_1 + s_3)^2 = (s_4')^2$. The factor $\text{sgn}(s_1 + s_3)$ is introduced for making f_1 (and its derivatives with respect to λ_i) continuous functions of λ_i . For f_2 we obtain in all cases

$$f_2 = (s_1 + s_3)/2f_1 + w, \quad (34)$$

and the variables μ, μ^* are given by the expressions

$$\mu, \mu^* = \frac{s_1 + 2f_1 w \pm 2i\sqrt{-\mathcal{R}(w)}}{2(1 - w^2)}, \quad (35)$$

where

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(w) = & w^4 + \frac{s_1 + s_3}{f_1} w^3 + s_2 w^2 + \left(f_1 s_1 - \frac{s_1 + s_3}{f_1} \right) w \\ & + \frac{1}{4} (s_1^2 - 4 - 4s_2 + 4f_1^2). \end{aligned} \quad (36)$$

Since μ depends on ξ only, the same holds for w , which, as follows from Eqs. (27) and (35), satisfies the equation

$$w_\xi = \sqrt{-\mathcal{R}(w)} \quad (37)$$

This equation admits a real solution when w oscillates between two of the zeroes of $\mathcal{R}(w)$ (provided they both are located in the interval $[-1, 1]$), in a domain where $\mathcal{R}(w) \leq 0$, and in this case, one sees from (35) that μ and μ^* are complex conjugated variables, as was anticipated earlier.

Actually, Eq. (37) coincides with Eq. (30) of Ref. [13] (with $Q(w)$ replaced by $\mathcal{R}(w)$) and we shall reproduce here briefly its solutions for convenience and future references. We denote the zeroes of \mathcal{R} as $w_1 \leq w_2 \leq w_3 \leq w_4$.

(A) We first consider the periodic solution corresponding to oscillations of w in the interval

$$w_1 \leq w \leq w_2. \quad (38)$$

In this case the solution of Eq. (37) can be written as

$$w = w_2 - \frac{(w_2 - w_1)\text{cn}^2(W, m)}{1 + \frac{w_2 - w_1}{w_4 - w_2}\text{sn}^2(W, m)}, \quad (39)$$

where it is assumed that $w(0) = w_1$,

$$W = \sqrt{(w_3 - w_1)(w_4 - w_2)} \xi / 2, \quad (40)$$

and

$$m = \frac{(w_4 - w_3)(w_2 - w_1)}{(w_4 - w_2)(w_3 - w_1)}, \quad (41)$$

cn and sn being Jacobi elliptic functions [49]. The wavelength of the oscillating function (39) is

$$L = \frac{4K(m)}{\sqrt{(w_3 - w_1)(w_4 - w_2)}}, \quad (42)$$

where $K(m)$ is the complete elliptic integral of the first kind [49]. In the limit $w_3 \rightarrow w_2$ ($m \rightarrow 1$) the wavelength tends to infinity and the solution (39) transforms to a soliton

$$w = w_2 - \frac{w_2 - w_1}{\cosh^2 W + \frac{w_2 - w_1}{w_4 - w_2} \sinh^2 W}. \quad (43)$$

This is a ‘‘dark soliton’’ for the variable w .

The limit $m \rightarrow 0$ can be reached in two ways.

(i) If $w_2 \rightarrow w_1$, then we get

$$\begin{aligned} w &\cong w_2 - \frac{1}{2}(w_2 - w_1) \cos[k(x - Vt)], \\ k &= \sqrt{(w_3 - w_1)(w_4 - w_1)}. \end{aligned} \quad (44)$$

This is a small-amplitude limit describing propagation of a harmonic wave.

(ii) If $w_4 = w_3$ but $w_1 \neq w_2$, then we get a nonlinear wave represented in terms of trigonometric functions:

$$w = w_2 - \frac{(w_2 - w_1) \cos^2 W}{1 + \frac{w_2 - w_1}{w_3 - w_2} \sin^2 W}, \quad (45)$$

$$W = \sqrt{(w_3 - w_1)(w_3 - w_2)} \xi / 2.$$

If we take the limit $w_2 - w_1 \ll w_3 - w_1$ in this solution, then we return to the small-amplitude limit (44) with $w_4 = w_3$. On the other hand, if we take here the limit $w_2 \rightarrow w_3 = w_4$, then the argument of the trigonometric functions becomes small and we can approximate them by the first terms of their series expansions. This corresponds to an algebraic soliton of the form

$$w = w_2 - \frac{w_2 - w_1}{1 + (w_2 - w_1)^2(x - Vt)^2/4}. \quad (46)$$

(B) In the second case, the variable w oscillates in the interval

$$w_3 \leq w \leq w_4. \quad (47)$$

Here again, a standard calculation yields

$$w = w_3 + \frac{(w_4 - w_3)\text{cn}^2(W, m)}{1 + \frac{w_4 - w_3}{w_3 - w_1}\text{sn}^2(W, m)}. \quad (48)$$

with the same definitions (40), (41), and (42) for W, m , and L , respectively, and $w(0) = w_4$. In the soliton limit $w_3 \rightarrow w_2$ ($m \rightarrow 1$) we get

$$w = w_2 + \frac{w_4 - w_2}{\cosh^2 W + \frac{w_4 - w_2}{w_2 - w_1} \sinh^2 W}. \quad (49)$$

This is a ‘‘bright soliton’’ for the variable w .

Again, the limit $m \rightarrow 0$ can be reached in two ways.

(i) If $w_4 \rightarrow w_3$, then we obtain a small-amplitude harmonic wave

$$\begin{aligned} w &\cong w_3 + \frac{1}{2}(w_4 - w_3) \cos[k(x - Vt)], \\ k &= \sqrt{(w_3 - w_1)(w_3 - w_1)}. \end{aligned} \quad (50)$$

This is a small-amplitude limit describing a harmonic wave.

(ii) If $w_2 = w_1$, then we obtain another nonlinear trigonometric solution,

$$w = w_3 + \frac{(w_4 - w_3) \cos^2 W}{1 + \frac{w_4 - w_3}{w_3 - w_1} \sin^2 W}, \quad (51)$$

$$W = \sqrt{(w_3 - w_1)(w_4 - w_1)} \xi / 2.$$

If we assume that $w_4 - w_3 \ll w_4 - w_1$, then this reproduces the small-amplitude limit (50) with $w_2 = w_1$. On the other hand, in the limit $w_3 \rightarrow w_2 = w_1$ we obtain the algebraic soliton solution:

$$w = w_1 + \frac{w_4 - w_1}{1 + (w_4 - w_1)^2 (x - Vt)^2 / 4}. \quad (52)$$

The solutions presented above are parameterized by the zeroes w_i ($i = 1, 2, 3, 4$) of the polynomial (36) whose coefficients are expressed in terms of the zeroes λ_i of the polynomial $P(\lambda)$ which plays a key role in the finite-gap integration method. As we shall see, the parameters λ_i represent the Riemann invariants in the Whitham modulation theory. We want to express the solutions of (37) in terms of these Riemann invariants: we therefore need to express the w_i 's in terms of the λ_i 's explicitly, without having to solve the algebraic equation $\mathcal{R}(w) = 0$. This has been already achieved in Ref. [44], but we shall derive here expressions under a form which is more convenient for subsequent applications. To this end, we rewrite the identity (22) using explicit formulas for the functions f , g and h :

$$P(\lambda) = \left(-w\lambda^2 - f_1\lambda + \frac{s_1 + s_3}{2f_1} + w \right)^2$$

$$- (1 - w^2)(1 - \lambda^2) \times \left[\lambda - \frac{s_1 + 2f_1w + 2\sqrt{\mathcal{R}(w)}}{2(1 - w^2)} \right]$$

$$\times \left[\lambda - \frac{s_1 + 2f_1w - 2\sqrt{\mathcal{R}(w)}}{2(1 - w^2)} \right].$$

Let $\lambda = \lambda_i$ be a zero of the polynomial $P(\lambda)$ and w be also one of the zeros of $\mathcal{R}(w)$. Then, for a given w , the above identity yields two equations

$$-w\lambda_i^2 - f_1\lambda_i + \frac{s_1 + s_3}{2f_1} + w =$$

$$\pm \sqrt{1 - w^2} \lambda_i' \left[\lambda_i - \frac{s_1 + 2f_1w}{2(1 - w^2)} \right]$$

for the four roots λ_i . We assume that λ_1 and λ_2 correspond to the upper sign and that λ_3 and λ_4 correspond to the lower sign. We temporarily introduce the notation

$$N_i = 2f_1w\lambda_i' + (s_1 + s_3 - 2f_1^2\lambda_i)/\lambda_i' = 2f_1\lambda_i'w + \tilde{s}_i, \quad (53)$$

where \tilde{s}_i is a notation for $(s_1 + s_3 - 2f_1^2\lambda_i)/\lambda_i'$. The use of formulas (32) for f_1 yields

$$\tilde{s}_i = (s_1 - \lambda_i)\lambda_i' + s_4 \frac{\lambda_i'}{\lambda_i} \mp s_4' \frac{\lambda_i}{\lambda_i'}, \quad (54)$$

where the upper sign corresponds to Eq. (32a), and the lower one to Eq. (32b). It is then possible to rewrite Eq. (53) under the form

$$N_i = \pm \frac{f_1}{\sqrt{1 - w^2}} [2\lambda_i(1 - w^2) - s_1 - 2f_1w]. \quad (55)$$

Dividing expressions (55) for the N_i 's one by the other for various pairs of i and j ($i \neq j$), we get

$$\frac{N_i}{N_j} = \pm \frac{2\lambda_i(1 - w^2) - s_1 - 2f_1w}{2\lambda_j(1 - w^2) - s_1 - 2f_1w},$$

where the plus signs applies for N_1/N_2 and N_3/N_4 and the minus one for the other choices of these pairs. Consequently we have

$$1 - w^2 = \frac{s_1 + 2f_1w}{2} \cdot \frac{N_i \pm N_j}{\lambda_j N_i \pm \lambda_i N_j} \quad (56)$$

with the same sign convention. Equating these expressions for $1 - w^2$ to each other, we obtain a number of equations — linear and quadratic in the N_i 's. For example, from the equality

$$\frac{N_1 + N_2}{\lambda_2 N_1 + \lambda_1 N_2} = \frac{N_2 - N_3}{\lambda_3 N_2 - \lambda_2 N_3} \quad (57)$$

we get the first relationship of the system

$$\begin{aligned} (\lambda_3 - \lambda_2)N_1 + (\lambda_3 - \lambda_1)N_2 - (\lambda_2 - \lambda_1)N_3 &= 0, \\ (\lambda_3 - \lambda_2)N_1 + (\lambda_3 - \lambda_1)N_2 + (\lambda_2 - \lambda_1)N_3 &= 0, \\ (\lambda_3 - \lambda_2)N_1 - (\lambda_3 - \lambda_1)N_2 + (\lambda_2 - \lambda_1)N_3 &= 0, \\ (\lambda_3 - \lambda_2)N_1 - (\lambda_3 - \lambda_1)N_2 - (\lambda_2 - \lambda_1)N_3 &= 0, \end{aligned} \quad (58)$$

and the three others can be obtained by considering equalities of the type (57) for other choices of pairs of indices. Although these equations are not linearly independent (one can check that one of them is a linear combination of the three others), we prefer to deal with all of them to get symmetrical expressions for all four roots of the resolvent. Indeed, using the expression (53) for N_i , each of the relationships (58) becomes a linear equation for w and yields one of the zeroes of the polynomial $\mathcal{R}(w)$. As a result we obtain the formulae

$$\begin{aligned} w_1 &= -\frac{1}{2f_1} \cdot \frac{(\lambda_3 - \lambda_2)\tilde{s}_1 + (\lambda_3 - \lambda_1)\tilde{s}_2 - (\lambda_2 - \lambda_1)\tilde{s}_3}{(\lambda_3 - \lambda_2)\lambda_1' + (\lambda_3 - \lambda_1)\lambda_2' - (\lambda_2 - \lambda_1)\lambda_3'}, \\ w_2 &= -\frac{1}{2f_1} \cdot \frac{(\lambda_3 - \lambda_2)\tilde{s}_1 + (\lambda_3 - \lambda_1)\tilde{s}_2 + (\lambda_2 - \lambda_1)\tilde{s}_3}{(\lambda_3 - \lambda_2)\lambda_1' + (\lambda_3 - \lambda_1)\lambda_2' + (\lambda_2 - \lambda_1)\lambda_3'}, \\ w_3 &= -\frac{1}{2f_1} \cdot \frac{(\lambda_3 - \lambda_2)\tilde{s}_1 - (\lambda_3 - \lambda_1)\tilde{s}_2 - (\lambda_2 - \lambda_1)\tilde{s}_3}{(\lambda_3 - \lambda_2)\lambda_1' - (\lambda_3 - \lambda_1)\lambda_2' - (\lambda_2 - \lambda_1)\lambda_3'}, \\ w_4 &= -\frac{1}{2f_1} \cdot \frac{(\lambda_3 - \lambda_2)\tilde{s}_1 - (\lambda_3 - \lambda_1)\tilde{s}_2 + (\lambda_2 - \lambda_1)\tilde{s}_3}{(\lambda_3 - \lambda_2)\lambda_1' - (\lambda_3 - \lambda_1)\lambda_2' + (\lambda_2 - \lambda_1)\lambda_3'}, \end{aligned} \quad (59)$$

where the w_i 's are ordered according to $w_1 \leq w_2 \leq w_3 \leq w_4$ under the suppositions that $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \lambda_4$ and

$f_1 > 0$. A change of sign of f_1 leads to a simple reordering of the expressions for the w_i 's. We see that the zeroes λ_i of the polynomial $P(\lambda)$ and the zeroes w_i of the polynomial $\mathcal{R}(w)$ are related by the symmetrical formulae (59), therefore we shall call $\mathcal{R}(w)$ the resolvent of the polynomial $P(\lambda)$ (for example, in the case of NLS equation an analogous method yields the well-known Ferrari cubic resolvent used for solving in radicals fourth degree algebraic equations). Formulae (59) are equivalent to those obtained in Ref. [44], however they are more convenient for the study of degenerate cases presented below. It is important to note that we have four values of f_1 for each set of the λ_i 's (and corresponding values (54) for \tilde{s}_i), which are thus mapped by the formulae (59) to four sets of w_i 's. This multiplicity of mappings will prove of tremendous importance when applying the Whitham theory of modulations to the representations (39) and (48) of the periodic solutions. Before addressing this crucial question we first need to demonstrate that the parameters λ_i ($i = 1, 2, 3, 4$) are the Riemann invariants of the Whitham system for the averaged conservation laws. This is achieved in the next section.

B. Whitham equations

In modulated waves the λ_i 's become slowly varying functions of the space and time variables and their evolution is governed by the Whitham modulation equations. Whitham showed in Refs. [19, 20] that these equations can be obtained by averaging the conservation laws of the full nonlinear system over fast oscillations (whose wavelength L changes slowly along the total wave pattern). Generally speaking, in cases where the periodic solution is characterized by four parameters, this averaging procedure leads to a system of four equations of the type $w_{i,t} + \sum_j v_{ij}(w_1, w_2, w_3, w_4)w_{j,x} = 0$ with 16 entries of the "velocity matrix" v_{ij} . However, the Landau-Lifshitz equation being completely integrable, this system of four equations reduces to a diagonal "Riemann form" for the λ_i 's, similarly to what occurs for the usual Riemann invariants of non-dispersive waves (see, e.g., Ref. [17]). As a result, the λ_i 's are called the Riemann invariants of the dispersive nonlinear wave. We shall study their properties by using the method devised in Refs. [50, 51].

First of all, we notice that Eq. (35) implies that, during the oscillations of w , the variable μ describes a cycle in the complex plane which encloses either points λ_1 and λ_2 or points λ_3 and λ_4 (according to Eq. (30) the variable μ runs along one of the two loops of an hyperelliptic curve while the w -variable oscillates within the corresponding interval). Hence, from Eq. (31) one can derive the following expression for the wavelength

$$L = \oint \frac{d\mu}{\sqrt{-P(\mu)}} = \frac{4K(m)}{\sqrt{(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_4 - \lambda_2)}}, \quad (60)$$

Comparison of this expression with Eq. (42) leads to the

identities

$$m = \frac{(w_4 - w_3)(w_2 - w_1)}{(w_4 - w_2)(w_3 - w_1)} = \frac{(\lambda_4 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_1)}{(\lambda_4 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_1)}, \quad (61)$$

and

$$(w_4 - w_2)(w_3 - w_1) = (\lambda_4 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_1). \quad (62)$$

From (20b) and (21b) and owing to the normalization condition (26) one gets $Bg_x - Gg_t = 2(BF - AG)g = \frac{1}{2}\sqrt{1 - \lambda^2}[iM_z M_- + \lambda(M_-)_x]g$. Using the equations of motion (7) this last term can be rewritten as $gG_t - gB_x$. Dividing by g^2 , one can cast the resulting identity under the form

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\sqrt{P(\lambda)} \cdot \frac{G(\lambda)}{g(\lambda)} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\sqrt{P(\lambda)} \cdot \frac{B(\lambda)}{g(\lambda)} \right) = 0. \quad (63)$$

We shall use this equation as the generating function of the conservation laws of the Landau-Lifshitz equation: a series expansion in inverse powers of λ gives an infinite number of conservation laws of this completely integrable system. The factor $\sqrt{P(\lambda)}$ has been introduced to transform the identity (22) to the form

$$\left(\frac{f}{\sqrt{P(\lambda)}} \right)^2 - \frac{g}{\sqrt{P(\lambda)}} \cdot \frac{h}{\sqrt{P(\lambda)}} = 1,$$

so that the right-hand side is independent of the variations of λ_i in a modulated wave, hence the densities and fluxes in the conservation laws can change due to modulations only, as it should be, and any changes caused by λ -dependent normalization of the f, g, h -functions are excluded.

Substitution of Eqs. (18) and (24) into (63) and its simple transformation with the use of Eqs. (25) and (28) gives

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\sqrt{P(\lambda)}}{\lambda - \mu} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left[\sqrt{P(\lambda)} \left(1 + \frac{s_1/2}{\lambda - \mu} \right) \right] = 0,$$

Averaging of the density and of the flux in this expression over one wavelength L (60) yields the generating function of the *averaged* conservation laws:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\sqrt{P(\lambda)}}{L} \oint \frac{d\mu}{(\lambda - \mu)\sqrt{-P(\mu)}} \right] \\ & + \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\sqrt{P(\lambda)}}{L} \oint \left(1 + \frac{s_1/2}{\lambda - \mu} \right) \frac{d\mu}{\sqrt{-P(\mu)}} \right] = 0. \end{aligned} \quad (64)$$

The condition that in the limit $\lambda \rightarrow \lambda_i$ the singular terms cancel yields

$$\begin{aligned} & \oint \frac{d\mu}{(\lambda_i - \mu)\sqrt{-P(\mu)}} \cdot \frac{\partial \lambda_i}{\partial t} + \\ & \left(L + \frac{s_1}{2} \oint \frac{d\mu}{(\lambda_i - \mu)\sqrt{-P(\mu)}} \right) \cdot \frac{\partial \lambda_i}{\partial x} = 0. \end{aligned} \quad (65)$$

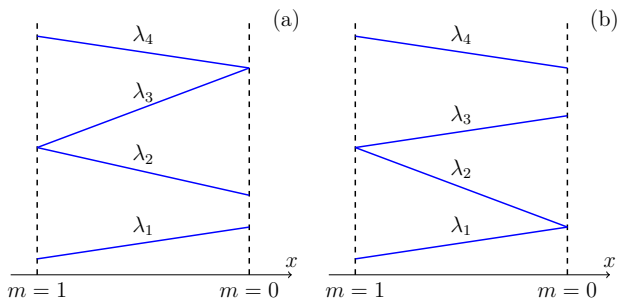


FIG. 1: Sketches of the space dependence of the Riemann invariants along a DSW. In both cases the limit $\lambda_2 = \lambda_3$ corresponds to the soliton edge. The polarity of the solitons depends on the choice of solution of formulae (59) by which the solution of the Whitham equations are mapped onto the parameters w_i . The small amplitude edge corresponds to $\lambda_3 = \lambda_4$ in case (a) and to $\lambda_1 = \lambda_2$ in case (b).

From the definition (60) of L one obtains

$$\oint \frac{d\mu}{(\lambda_i - \mu)\sqrt{-P(\mu)}} = -2 \frac{\partial L}{\partial \lambda_i},$$

which makes it possible to cast Eq. (65) under the form of a Whitham equation for the variables λ_i :

$$\frac{\partial \lambda_i}{\partial t} + v_i \frac{\partial \lambda_i}{\partial x} = 0, \quad (66)$$

where the Whitham velocity v_i is given by

$$v_i = \frac{s_1}{2} - \frac{L}{2\partial L/\partial \lambda_i}, \quad \text{for } i \in \{1, 2, 3, 4\}. \quad (67)$$

By means of Eq. (60) one obtains the following explicit expressions

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 \lambda_i - \frac{(\lambda_4 - \lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_1)K(m)}{(\lambda_4 - \lambda_1)K(m) - (\lambda_4 - \lambda_2)E(m)}, \\ v_2 &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 \lambda_i + \frac{(\lambda_3 - \lambda_2)(\lambda_2 - \lambda_1)K(m)}{(\lambda_3 - \lambda_2)K(m) - (\lambda_3 - \lambda_1)E(m)}, \\ v_3 &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 \lambda_i - \frac{(\lambda_4 - \lambda_3)(\lambda_3 - \lambda_2)K(m)}{(\lambda_3 - \lambda_2)K(m) - (\lambda_4 - \lambda_2)E(m)}, \\ v_4 &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 \lambda_i + \frac{(\lambda_4 - \lambda_2)(\lambda_4 - \lambda_1)K(m)}{(\lambda_4 - \lambda_1)K(m) - (\lambda_3 - \lambda_1)E(m)}, \end{aligned} \quad (68)$$

where $K(m)$ and $E(m)$ are complete elliptic integrals of the first and second kind, respectively.

In a modulated wave representing a DSW, the Riemann invariants change with x and t . The DSW occupies a region in space at the edges of which two Riemann invariants coincide. There are two possible situations represented schematically in Fig. 1. In both cases the soliton

edge corresponds to $\lambda_3 = \lambda_2$ ($m = 1$) and at this edge the Whitham velocities are given by

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{1}{2}(3\lambda_1 + \lambda_4), & v_2 = v_3 &= \frac{1}{2}(\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_4), \\ v_4 &= \frac{1}{2}(\lambda_1 + 3\lambda_4), & \text{for } \lambda_3 &= \lambda_2. \end{aligned} \quad (69)$$

The small amplitude limit $m = 0$ can be obtained in two ways. If $\lambda_3 = \lambda_4$ (Fig. 1(a)), then we get

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{1}{2}(3\lambda_1 + \lambda_2), & v_2 &= \frac{1}{2}(\lambda_1 + 3\lambda_2), \\ v_3 = v_4 &= 2\lambda_4 + \frac{(\lambda_2 - \lambda_1)^2}{2(\lambda_1 + \lambda_2 - 2\lambda_4)}, \end{aligned} \quad (70)$$

and if $\lambda_2 = \lambda_1$ (Fig. 1(b)), then

$$\begin{aligned} v_1 = v_2 &= 2\lambda_1 + \frac{(\lambda_4 - \lambda_3)^2}{2(\lambda_3 + \lambda_4 - 2\lambda_1)}, \\ v_3 &= \frac{1}{2}(3\lambda_3 + \lambda_4), & v_4 &= \frac{1}{2}(\lambda_3 + 3\lambda_4). \end{aligned} \quad (71)$$

As one can see from Eqs. (59), for $\lambda_2 = \lambda_1$ we have $w_2 = w_1$ and for $\lambda_3 = \lambda_4$ we have $w_3 = w_4$. Consequently, Eqs. (70) and (71) represent also the Whitham velocities for evolution of shocks approximated by the trigonometric solutions (51) and (45), respectively. We shall call them “trigonometric shocks”. As we shall see, they play an important role in the classification of the possible wave structures evolving from initial discontinuities.

We can now proceed to the description of key elements (“building blocks”) from which the wave patterns are constructed.

IV. KEY ELEMENTS

The Riemann problem we consider in the present work consists in the study of the time evolution of an initial step-like structure of the form

$$\begin{aligned} w(x, t = 0) &= \begin{cases} w_L & \text{if } x < 0, \\ w_R & \text{if } x > 0, \end{cases} \\ v(x, t = 0) &= \begin{cases} v_L & \text{if } x < 0, \\ v_R & \text{if } x > 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (72)$$

We consider the hyperbolic case where the four boundary values w_L , w_R , v_L and v_R are contained in the interval $[-1, 1]$. The initial distribution involves no characteristic constants having the dimension of a length or a time, however the system (8) has soliton solutions and the width of these solitons can be considered as a characteristic length, of order unity (in dimensioned units, it is of order of the polarization healing length ξ_p). Nevertheless, if we consider nonlinear structures at a much larger scale, as this is the case for modulated waves whose envelopes

change little over a wavelength, then we can neglect such a ‘microscopic’ length scale and look for smooth solutions of the Whitham equations. In short: at the ‘macroscopic’ scale there is no characteristic length in the initial conditions (72) and the solutions of the Whitham equations can be sought as functions of the self-similar variable $z = x/t$ only.

There exist also smooth solutions of the original system (8) in which not the envelopes, but the functions $w(x, t)$ and $v(x, t)$ themselves depend slowly on the space coordinate. This corresponds to a hydrodynamic regime where one can neglect the higher derivatives in the second equation of the system (8). Again, such hydrodynamic approximate solutions can only depend on the self-similar variable $z = x/t$. These smooth non-dispersive waves can contribute – as DSWs do – to the whole wave structures arising from the space-time evolution of the initial profiles (72).

It is convenient, in a first stage, to select particular initial conditions for which the time evolved wave structure reduces to a single type of wave (hydrodynamic, modulated cnoidal, modulated trigonometric, etc). In a second step (Sec. V) we will proceed to the full classification of the structures evolving from arbitrary initial conditions, but in the present section we shall first identify what we denote as “key elements”, solutions of the Riemann problem for specific values of the boundary value constants. These are the building blocks of which are composed the general self-similar solution of the Riemann problem. We shall start with the hydrodynamic key elements which are solutions for which dispersive effects can be neglected.

A. Plateau and rarefaction waves

As stated above, nonlinear polarization waves with typical length scale much larger than unity can be described in the framework of a dispersionless treatment in which the dispersive term in (8) is omitted:

$$w_t - [(1 - w^2)v]_x = 0, \quad v_t - [(1 - v^2)w]_x = 0. \quad (73)$$

We shall denote these equations as *Bellevaux-Ovsyannikov equations* since they were first obtained independently by these authors in the theory of two-layer shallow water dynamics [33, 34] (see also [35–37]).

First of all, we note that these equations have a simple solution

$$w(x, t) = \bar{w} = \text{const}, \quad v(x, t) = \bar{v} = \text{const}. \quad (74)$$

In spite of its ‘triviality’, such a solution can play an important role as an element of a self-similar structure, provided that its edge points x_{\pm} move with constant velocities $s_{\pm} = x_{\pm}/t$. We shall call such an expanding region of constant flow a “plateau region”.

Now, since both variables w and v depend on the single variable z , they can be considered as functions of

each other and, hence, such self-similar solutions are denoted as “simple wave” solutions of the hydrodynamic equations (73), see, e.g., Ref. [52]. For their study it is convenient to transform the Bellevaux-Ovsyannikov system to a diagonal Riemann form by defining the Riemann invariants [35]

$$r_{\pm} = vw \pm \sqrt{(1 - v^2)(1 - w^2)}. \quad (75)$$

As a result we obtain the system

$$\partial_t r_{\pm} + v_{\pm}(r_{-}, r_{+}) \partial_x r_{\pm} = 0, \quad (76)$$

where v_{\pm} are the “Riemann velocities”

$$\begin{aligned} v_{-} &= \frac{3}{2}r_{-} + \frac{1}{2}r_{+} = 2vw - \sqrt{(1 - v^2)(1 - w^2)}, \\ v_{+} &= \frac{1}{2}r_{-} + \frac{3}{2}r_{+} = 2vw + \sqrt{(1 - v^2)(1 - w^2)}. \end{aligned} \quad (77)$$

Eqs. (76) are reminiscent of the equations of compressible gas dynamics, see, e.g., Refs. [17, 51]. We note here that, although the relative density $w(x, t) = \cos \theta(x, t)$ is constrained to vary between -1 and 1 , the relative velocity $v(x, t)$ can assume, generally speaking, any values (as will be exemplified in sections V A and V B). However, in the regime we consider here, because of the assumption of slow variation of the field $v(x, t)$, a value larger than 1 (or lower than -1) suffers from a dynamical instability because it induces perturbations which grow exponentially (as in the uniform case discussed in Sec. II), resulting in oscillations which cannot be treated within the dispersionless approximation. The Riemann variables (75) are thus always properly defined only in the “hyperbolicity region”

$$-1 \leq v, w \leq 1, \quad (78)$$

where the velocities (77) are real.

One can also remark that the Riemann velocities (77) expressed in terms of v and w correspond to the sound velocity (10) for a uniform background characterized by w and v , in agreement with the long wavelength approximation which is at the heart of the dispersionless approximation.

For a simple wave solution, one of the Riemann invariants is constant, and this condition (namely: either $r_{-}(v, w) = \text{const}$ or $r_{+}(v, w) = \text{const}$) gives, when applied to Eq. (75), the above mentioned relationship between the variables v and w . Consequently, on the (v, w) -plane these simple wave solutions are depicted as arcs of the ellipse $(r_{\pm} - vw)^2 = (1 - v^2)(1 - w^2)$ or

$$\frac{(v + w)^2}{2(1 + r)} + \frac{(v - w)^2}{2(1 - r)} = 1, \quad (79)$$

where r denotes the constant value of r_{+} or r_{-} . This ellipse is inscribed into a square $-1 \leq w, v \leq 1$ (domain of hyperbolicity: cf. (78)) and touches its sides at 4 points with coordinates

$$(1, r), (-1, -r), (-r, -1) \text{ and } (r, 1). \quad (80)$$

If $r_- + r_+ \geq 0$ (i.e. when w and v have the same sign), the physical variables are expressed in terms of the Riemann invariants by the formulas

$$\begin{aligned} w &= \pm \sqrt{\frac{1}{2} \left[1 + r_- r_+ \pm \sqrt{(1 - r_-^2)(1 - r_+^2)} \right]}, \\ v &= \pm \sqrt{\frac{1}{2} \left[1 + r_- r_+ \mp \sqrt{(1 - r_-^2)(1 - r_+^2)} \right]}. \end{aligned} \quad (81)$$

Otherwise, for $r_- + r_+ \leq 0$ (i.e. when w and v have opposite signs)

$$\begin{aligned} w &= \pm \sqrt{\frac{1}{2} \left[1 + r_- r_+ \pm \sqrt{(1 - r_-^2)(1 - r_+^2)} \right]}, \\ v &= \mp \sqrt{\frac{1}{2} \left[1 + r_- r_+ \mp \sqrt{(1 - r_-^2)(1 - r_+^2)} \right]}. \end{aligned} \quad (82)$$

It is clear that in the expressions (81) and (82) one should have $|r_{\pm}| \leq 1$.

On the ellipses (79) we can express w as a function of v in an explicit form. To do so, it is convenient to distinguish four arcs and to write

$$w(v) = \begin{cases} r_+ v + \sqrt{(1 - r_+^2)(1 - v^2)}, & -1 \leq v \leq r_+ = C^{\text{st}}, \\ r_+ v - \sqrt{(1 - r_+^2)(1 - v^2)}, & -r_+ = C^{\text{st}} \leq v \leq 1, \\ r_- v - \sqrt{(1 - r_-^2)(1 - v^2)}, & -1 \leq v \leq -r_- = C^{\text{st}}, \\ r_- v + \sqrt{(1 - r_-^2)(1 - v^2)}, & r_- = C^{\text{st}} \leq v \leq 1. \end{cases} \quad (83)$$

In Fig. 2 the arcs for constant r_- are shown in blue and those for constant r_+ in red. The value of the constant is denoted as r . On these arcs, the Riemann invariant which varies reaches its maximal value (equal to 1) on the diagonal $w = v$ (for r_+) or on the anti-diagonal $w = -v$ (for r_-); at the end points — whose coordinates are listed in (80) — is it equal to r .

The dependence of w and v on the self-similar variable $z = x/t$ is found at once by noticing that in this case the system (76) reduces to

$$(v_- - z) \cdot \frac{dr_-}{dz} = 0, \quad (v_+ - z) \cdot \frac{dr_+}{dz} = 0. \quad (84)$$

Hence, if one of Riemann invariants is constant, the Riemann velocity of the other must be equal to z . Thus we arrive at two possible solutions $r_- = \text{const}$, $v_+ = x/t \equiv z$ and $r_+ = \text{const}$, $v_- = x/t \equiv z$. Let us consider the first one in some detail. It is characterized by the relations

$$v_+ = \frac{1}{2}r_- + \frac{3}{2}r_+ = z = \frac{x}{t}, \quad r_- = \text{const}. \quad (85)$$

More explicitly, we have two equations

$$\begin{aligned} v_+ &= 2vw + \sqrt{(1 - v^2)(1 - w^2)} = z, \\ r_- &= vw - \sqrt{(1 - v^2)(1 - w^2)} = \text{const}, \end{aligned}$$

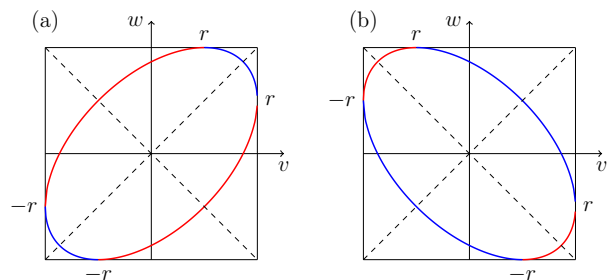


FIG. 2: Simple-wave solutions in the (v, w) -plane. Along these branches of ellipse only one Riemann invariant varies, the value of the constant other one is denoted by r . In (a) we have $r > 0$ and in (b) $r < 0$. Red arcs correspond to $r_+ = \text{const}$ and blue ones to $r_- = \text{const}$.

which yield

$$\begin{aligned} w(z) &= \pm \left\{ \frac{1}{6} \left[3 + 2r_- z - r_-^2 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \pm 2\sqrt{(1 - r_-^2)(z - \frac{1}{2}r_- + \frac{3}{2})(\frac{1}{2}r_- + \frac{3}{2} - z)} \right] \right\}^{1/2}, \end{aligned} \quad (86)$$

and

$$v(z) = \frac{r_- + z}{3w(z)}. \quad (87)$$

The solution has thus four branches — corresponding to four possible choices of signs in (86) — that are located within the interval

$$\frac{1}{2}r_- - \frac{3}{2} \leq z \leq \frac{1}{2}r_- + \frac{3}{2}. \quad (88)$$

Comparing (88) and (85) one sees that at the end points we have $r_+ = \pm 1$. The four branches of the solutions are represented in Fig. 3. It is important to stress that the solution expressed in terms of the Riemann invariants by Eq. (85) is mapped into four arcs in the (v, w) -plane and four functions $w = w(z)$ given by Eq. (86).

Similar formulas and plots can be obtained for the solution $r_+ = \text{const}$, $v(r_-, r_+) = x/t \equiv z$.

The simplest concrete situation of physical interest is represented in Fig. 4(a). It consists in the path in the (v, w) plane formed by a single arc AB which corresponds to a rarefaction wave shown in Fig. 4(b). This arc is described by the last of formulae (83). Here the initial jump (72) in the relative density evolves into a smooth rarefaction wave, similarly to what occurs in the ‘dam break problem’ in compressible fluid dynamics when a gas expands into vacuum flowing along a tube after removal of a wall. At the initial state both components are at rest, $v_L = v_R = 0$, the total density is fixed, i.e. $\rho_{\uparrow} + \rho_{\downarrow} = 1$ everywhere and does not change with time, and initially we have $\rho = \rho_{\uparrow}^L = 1$ for $x < 0$, $\rho = \rho_{\uparrow}^R < 1$ for $x > 0$.

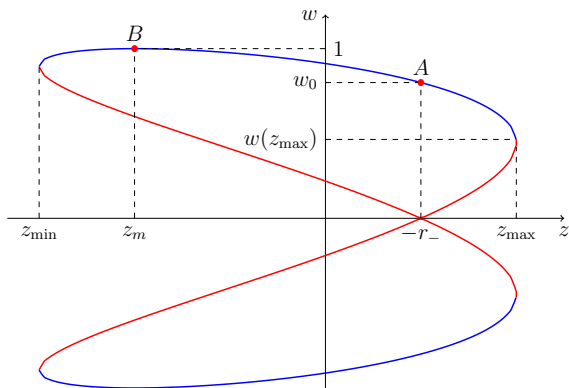


FIG. 3: Dispersionless simple-wave solutions $w(z)$ plotted as functions of $z = x/t$. The figure is drawn for $r_- = \text{const}$. This constant value is expressed by means of (75) in terms of two constants, $w_0 > 0$ and $v_0 = 0$, i.e., $r_- = -\sqrt{1-w_0^2} < 0$ and $w_0 = \sqrt{1-r_-^2}$. Here $z_{\text{max}} = \frac{1}{2}r_- + \frac{3}{2}$, $w(z_{\text{max}}) = \sqrt{(1+r_-)/2}$, $z_{\text{min}} = \frac{1}{2}r_- - \frac{3}{2}$ and $w(z_{\text{min}}) = \sqrt{(1-r_-)/2}$. The value $w = 1$ is reached for $z = z_m = 2r_- = -2\sqrt{1-w_0^2}$. The arc between points A and B is used below for constructing an “expansion into vacuum” solution, see Fig. 4.

This means that we have a ‘vacuum’ of the component ρ_\downarrow for $x < 0$ at the initial time. The value of the constant Riemann invariant is fixed by the parameters of the flow at point A : $r_- = -\sqrt{1-w_R^2} = -2\sqrt{\rho_\uparrow^R(1-\rho_\uparrow^R)}$. The parameters of the flow at the matching point A preserve their values during the time evolution and therefore $r_+(A) = \sqrt{1-w_R^2} = -r_-$. Consequently, this edge of the rarefaction wave propagates to the right at a velocity $s_+ = (r_- + 3r_+(A))/2 = -r_- = \sqrt{1-w_R^2} = 2\sqrt{\rho_\uparrow^R(1-\rho_\uparrow^R)}$, which coincides with the polarization sound velocity (10) in this case. At point B we have $w(B) = 1$, hence $r_+(B) = v(B) = r_- = -\sqrt{1-w_R^2}$, and this edge propagates to the left with velocity $s_- = (r_- + 3r_+(B))/2 = 2r_- = \sqrt{1-w_R^2} = -4\sqrt{\rho_\uparrow^R(1-\rho_\uparrow^R)}$. As we see, this is not the sound velocity of waves in the component ρ_\uparrow , but rather the maximal velocity of expansion of the component ρ_\downarrow into its vacuum. This quasi-one-dimensional flow of two-component BEC was studied numerically in Ref. [15] and analytically in Ref. [13].

In the above solution, the rarefaction wave connects two plateaus with parameters $v_L = r_-$, $w_L = 1$ and $v_R = 0$, $w_R = \sqrt{1-r_-^2}$, in such a way that the Riemann invariant r_- is constant along the wave and the plateaus. It is clear that this solution can be generalized to any rarefaction waves connecting two plateaus provided the following two conditions are fulfilled. First, one of the Riemann invariants must have the same value on both plateaus,

$$(a) \quad r_-^L = r_-^R \quad \text{or} \quad (b) \quad r_+^L = r_+^R. \quad (89)$$

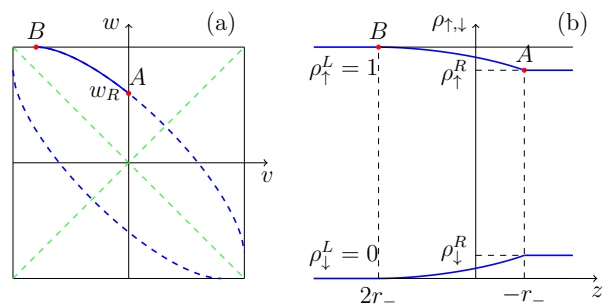


FIG. 4: (a) The solid blue arc represents a simple-wave solution with $w_L = 1$, $w_R > 0$ and $v_R = v_L = 0$ in the (v, w) -plane. (b) Corresponding density profiles $\rho_{\uparrow, \downarrow}$ plotted as functions of $z = x/t$.

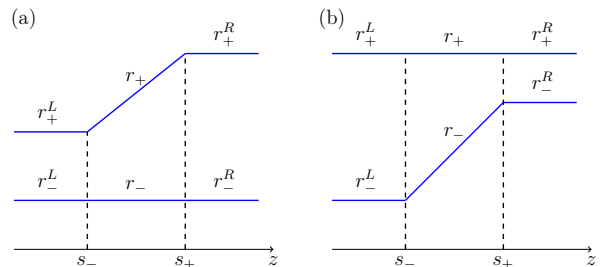


FIG. 5: Sketches of the behavior of the Riemann invariants in rarefaction wave solutions of the hydrodynamic equations with boundary conditions (89): (a) $r_- = \text{const}$, $r_+^L < r_+^R$; (b) $r_+ = \text{const}$, $r_-^L < r_-^R$.

Second, since the one of the Riemann invariants which varies is a solution of type (85) which depends monotonously on z , the dependence of the Riemann invariants in terms on the physical parameters must also be monotonous in order to keep the solution single-valued. This means that the two edge points of the rarefaction wave must lie within one of the four triangles which are obtained by cutting the hyperbolicity square by its diagonals along which the Riemann invariants reach their extremal values. We shall denote these triangles as *monotonicity triangles*. They play an important role in the classification of the wave patterns because they define the domains where the characteristic velocities (77) satisfy the conditions of genuine nonlinearity (see, e.g., Ref. [30]). Besides that, both edge points must lie on the same branch of the ellipse and should not be separated by a point where the ellipse touches a side of the hyperbolicity square (the four sides of this square correspond to $v = \pm 1$ and $w \in [-1, 1]$ or $w = \pm 1$ and $v \in [-1, 1]$). For these rarefaction wave solutions, the behavior of the Riemann invariants considered as functions of z is displayed in Fig. 5. The edge velocities of the rarefaction waves are

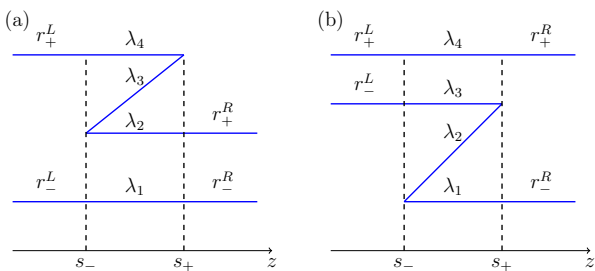


FIG. 6: Sketches of the behavior of the Riemann invariants in DSW solutions of the Whitham equations with the boundary conditions (a) $r_-^L = r_-^R$, $r_+^L > r_+^R$ or (b) $r_+^L = r_+^R$, $r_-^L > r_-^R$.

equal to

$$\begin{aligned} (a) \quad s_- &= \frac{1}{2}r_-^L + \frac{3}{2}r_+^L, & s_+ &= \frac{1}{2}r_-^R + \frac{3}{2}r_+^R, \\ (b) \quad s_- &= \frac{3}{2}r_-^L + \frac{1}{2}r_+^L, & s_+ &= \frac{3}{2}r_-^R + \frac{1}{2}r_+^R. \end{aligned} \quad (90)$$

As we shall see in the next sections, such rarefaction waves are among the key elements from which a generic wave pattern may be composed. Obviously, their observation implies that $r_+^L < r_+^R$ in case (a) or $r_-^L < r_-^R$ in case (b), which imposes conditions on the parameters of the initial discontinuity. It is natural to ask what happens if the boundary conditions correspond to opposite inequalities (namely $r_+^L > r_+^R$ or $r_-^L > r_-^R$); this question leads us to the study of another type of key elements — dispersive shock waves.

B. Cnoidal dispersive shock waves

If we try naively to use a formal self-similar solution of the type (85) for describing a wave satisfying boundary conditions such that $r_+^L > r_+^R$ or $r_-^L > r_-^R$, then we arrive at once to physically meaningless multi-valued solutions (see, e.g., [51]) which represent the simplest wave breaking situation. In this case, the major insight of Gurevich and Pitaevskii [18] has been to take into account the dispersive effects which lead to the generation of oscillations in regions where the physical variable have large spatial derivatives: the multi-valued solution must be replaced by a modulated nonlinear periodic solution whose parameters satisfy the Whitham equations (at least for large enough evolution time). As a matter of fact, this oscillating wave structure replaces the well-known shock waves occurring in viscous compressible fluid dynamics and hence it is called a *dispersive shock wave* (DSW).

From a formal point of view, we look again for self-similar solutions, here not for the equations (76), but instead for the Whitham equations (66). Assuming in these equations that the λ 's depend only on the variable

$z = x/t$ we obtain at once

$$\{v_i(\lambda) - z\} \cdot \frac{d\lambda_i}{dz} = 0, \quad i = 1, 2, 3, 4. \quad (91)$$

In the case where the Whitham velocities are given by Eq. (68), one can satisfy this system if three Riemann invariants remain constant while the fourth one varies in such a way that the expression in the curly bracket vanishes. We assume that at its both edges the DSW matches with a smooth solution of the hydrodynamic equations and therefore at these edges the averaged equations should reproduce the same dynamics as the dispersionless hydrodynamic equations do. The comparison of the limiting expressions (69)–(71) with the diagonal form of the hydrodynamic equations (76), (77) shows that the matching conditions can be satisfied if the Riemann invariants behave as represented in Fig. 6. It is clear that wave structures of this type appear only if the flows at the edges of the DSW satisfy either the condition (a) $r_-^L = r_-^R$ or (b) $r_+^L = r_+^R$ which coincide with (89). According to Fig. 6, the three constant Riemann invariants in the solutions of the Whitham equations are determined by the boundary conditions and the z -dependence of the remaining one is determined by the vanishing of the expression in curly brackets in Eqs. (91):

$$\begin{aligned} (a) \quad \lambda_1 &= r_-^L, \quad \lambda_2 = r_+^R, \quad \lambda_4 = r_+^L, \\ &v_3(r_-^L, r_+^R, \lambda_3(z), r_+^L) = z; \\ (b) \quad \lambda_1 &= r_-^R, \quad \lambda_3 = r_-^L, \quad \lambda_4 = r_+^L, \\ &v_2(r_-^R, \lambda_2(z), r_-^L, r_+^L) = z. \end{aligned} \quad (92)$$

These formulas show that the edge velocities of the DSW are unambiguously determined by the values of the Riemann invariants at its boundaries. They are equal to

$$\begin{aligned} (a) \quad s_- &= \frac{1}{2}(r_-^L + 2r_+^R + r_+^L), \\ &s_+ = 2r_+^L + \frac{(r_+^R - r_-^R)^2}{2(r_+^R + r_-^R - 2r_+^L)}; \\ (b) \quad s_- &= 2r_+^R + \frac{(r_+^L - r_-^L)^2}{2(r_+^L + r_-^L - 2r_+^R)}, \\ &s_+ = \frac{1}{2}(r_-^R + 2r_+^L + r_+^R). \end{aligned} \quad (93)$$

However, the situation changes in what concerns the envelopes of the DSWs, because the mapping (59) of the λ 's to the physical parameters (v, w) is multi-valued. As a result, each of the λ -diagrams in Fig. 6 (a) or (b) corresponds to four different DSWs. To clearly see this, let us consider the limiting expressions of Eqs. (59) at the edges of the DSW.

We first assume that $f_1 > 0$ is given by Eq. (32a). Then, after some calculations, we obtain for the case of Fig. 6(a), at the soliton edge with $\lambda_3 = \lambda_2$, the expressions

$$w_1 = -\sqrt{\frac{1}{2} \left[1 + (2\lambda_2^2 - 1)S_{1,4}^{(+)} - 2\lambda_2\lambda_2' E_{1,4}^{(-)} \right]}, \quad (94a)$$

$$w_2 = w_3 = -\sqrt{\frac{1}{2}(1 + \lambda_1\lambda_4 - \lambda_1\lambda'_4)}, \quad (94b)$$

$$w_4 = \sqrt{\frac{1}{2} \left[1 + (2\lambda_2^2 - 1)S_{1,4}^{(+)} + 2\lambda_2\lambda'_2 E_{1,4}^{(-)} \right]}, \quad (94c)$$

where, for shortening the formulas, we have introduced the notations

$$S_{i,j}^{(\pm)} = \lambda_i\lambda_j \pm \lambda'_i\lambda'_j, \quad \text{and} \quad E_{i,j}^{(\pm)} = \lambda_i\lambda'_j \pm \lambda'_i\lambda_j. \quad (95)$$

At the small amplitude edge with $\lambda_3 = \lambda_4$ one obtains

$$w_1 = -\sqrt{\frac{1}{2} \left[1 + (2\lambda_4^2 - 1)S_{1,2}^{(+)} - 2\lambda_4\lambda'_4 E_{1,2}^{(-)} \right]}, \quad (96a)$$

$$w_2 = -\sqrt{\frac{1}{2} \left[1 + (2\lambda_4^2 - 1)S_{1,2}^{(+)} + 2\lambda_4\lambda'_4 E_{1,2}^{(-)} \right]}, \quad (96b)$$

$$w_3 = w_4 = \sqrt{\frac{1}{2}(1 + \lambda_1\lambda_2 - \lambda_1\lambda'_2)}. \quad (96c)$$

If we change the sign of f_1 , then, for $f_1 < 0$, these expressions will also change sign with appropriate reordering.

In a similar way, for the case of Fig. 6(a) and when $f_1 > 0$ is given by Eq. (32b), we obtain at the soliton edge with $\lambda_3 = \lambda_2$ the expressions

$$w_1 = -\sqrt{\frac{1}{2} \left[1 + (2\lambda_2^2 - 1)S_{1,4}^{(-)} + 2\lambda_2\lambda'_2 E_{1,4}^{(+)} \right]}, \quad (97a)$$

$$w_2 = w_3 = -\sqrt{\frac{1}{2}(1 + \lambda_1\lambda_4 + \lambda_1\lambda'_4)}, \quad (97b)$$

$$w_4 = \sqrt{\frac{1}{2} \left[1 + (2\lambda_2^2 - 1)S_{1,4}^{(-)} - 2\lambda_2\lambda'_2 E_{1,4}^{(+)} \right]}, \quad (97c)$$

and at the small amplitude edge with $\lambda_3 = \lambda_4$ the expressions

$$w_1 = w_2 = -\sqrt{\frac{1}{2}(1 + \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda'_2)}. \quad (98a)$$

$$w_3 = -\sqrt{\frac{1}{2} \left[1 + (2\lambda_4^2 - 1)S_{1,2}^{(-)} + 2\lambda_4\lambda'_4 E_{1,2}^{(+)} \right]}, \quad (98b)$$

$$w_4 = \sqrt{\frac{1}{2} \left[1 + (2\lambda_4^2 - 1)S_{1,2}^{(-)} - 2\lambda_4\lambda'_4 E_{1,2}^{(+)} \right]}. \quad (98c)$$

Again, if we change the sign of f_1 then, for $f_1 < 0$, these expressions also change signs with appropriate reordering.

We now consider the diagram of Fig. 6(b) and assume that $f_1 > 0$ is given by Eq. (32a). Then we obtain at the soliton edge with $\lambda_3 = \lambda_2$ the expressions

$$w_1 = \sqrt{\frac{1}{2} \left[1 + (2\lambda_3^2 - 1)S_{1,4}^{(+)} - 2\lambda_3\lambda'_3 E_{1,4}^{(-)} \right]}, \quad (99a)$$

$$w_2 = w_3 = \sqrt{\frac{1}{2}(1 + \lambda_1\lambda_4 - \lambda_1\lambda'_4)}, \quad (99b)$$

$$w_4 = \sqrt{\frac{1}{2} \left[1 + (2\lambda_3^2 - 1)S_{1,4}^{(+)} + 2\lambda_3\lambda'_3 E_{1,4}^{(-)} \right]}, \quad (99c)$$

and at the small amplitude edge with $\lambda_2 = \lambda_1$ the expressions

$$w_1 = w_2 = -\sqrt{\frac{1}{2}(1 + \lambda_3\lambda_4 - \lambda_3\lambda'_4)}, \quad (100a)$$

$$w_3 = \sqrt{\frac{1}{2} \left[1 + (2\lambda_1^2 - 1)S_{3,4}^{(+)} - 2\lambda_1\lambda'_1 E_{3,4}^{(-)} \right]}, \quad (100b)$$

$$w_4 = \sqrt{\frac{1}{2} \left[1 + (2\lambda_1^2 - 1)S_{3,4}^{(+)} + 2\lambda_1\lambda'_1 E_{3,4}^{(-)} \right]}. \quad (100c)$$

If we take $f_1 < 0$ then these expressions will also change their signs with appropriate reordering.

At last, for the case of Fig. 6(b), when $f_1 > 0$ is given by Eq. (32b), we obtain at the soliton edge with $\lambda_3 = \lambda_2$ the expressions

$$w_1 = -\sqrt{\frac{1}{2} \left[1 + (2\lambda_3^2 - 1)S_{1,4}^{(-)} + 2\lambda_3\lambda'_3 E_{1,4}^{(+)} \right]}, \quad (101a)$$

$$w_2 = w_3 = -\sqrt{\frac{1}{2}(1 + \lambda_1\lambda_4 + \lambda_1\lambda'_4)}, \quad (101b)$$

$$w_4 = \sqrt{\frac{1}{2} \left[1 + (2\lambda_3^2 - 1)S_{1,4}^{(-)} - 2\lambda_3\lambda'_3 E_{1,4}^{(+)} \right]}, \quad (101c)$$

and at the small amplitude edge with $\lambda_2 = \lambda_1$ the expressions

$$w_1 = w_2 = -\sqrt{\frac{1}{2}(1 + \lambda_3\lambda_4 + \lambda_3\lambda'_4)}. \quad (102a)$$

$$w_3 = -\sqrt{\frac{1}{2} \left[1 + (2\lambda_1^2 - 1)S_{3,4}^{(-)} + 2\lambda_1\lambda'_1 E_{3,4}^{(+)} \right]}, \quad (102b)$$

$$w_4 = \sqrt{\frac{1}{2} \left[1 + (2\lambda_1^2 - 1)S_{3,4}^{(-)} - 2\lambda_1\lambda'_1 E_{3,4}^{(+)} \right]}. \quad (102c)$$

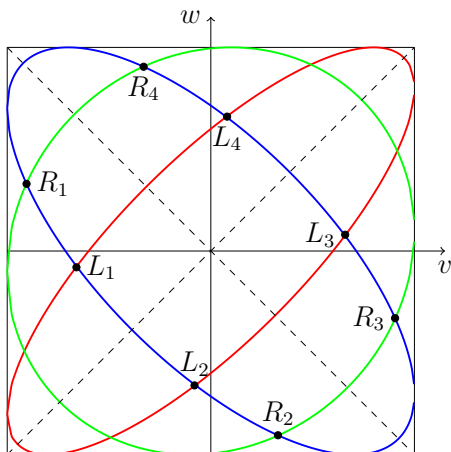


FIG. 7: Plots of the ellipses of the (v, w) -plane along which the Riemann invariants $r_-^L = r_-^R = -0.7$ (blue), $r_+^L = 0.8$ (red) and $r_+^R = 0.1$ (green) are constant. Their crossing points define possible values of (v, w) at the edges of the DSWs.

If $f_1 < 0$ then these expressions will also change their signs with appropriate reordering.

Thus we see indeed that each diagram in Fig. 6 corresponds to four different sets of values for the w_i 's. It is important to notice that for each set, the edges of these DSWs match with plateaus and assume limiting values coinciding with the dispersionless expressions (81) or (82). To avoid possible confusion, it is worth noticing that the above limiting expressions are correct not only for the self-similar situation but also for the general case schematically represented in Fig. 1.

It is convenient to symbolize the occurrence of a DSW by a diagram in the (v, w) -plane. Let us consider for instance a possible DSW corresponding to Fig.6(a). The equal Riemann invariants $r_-^L = r_-^R$ both correspond to the ellipse (79) represented in Fig. 7 by a blue line. Its intercepts with the ellipse corresponding to the constant r_+^L — shown in red — represent possible values of v_L and w_L at the left (soliton) edge; its intercepts with the ellipse corresponding to the constant r_+^R — shown in green — represent possible values of v_R and w_R at the right (small amplitude) edge. As we see in the figure, we get four possible pairs of boundary conditions leading to cnoidal dispersive shocks having all the same edge velocities but describing different physical situations. In particular, w_L in L_1 is given by Eq. (94b) with $\lambda_1 = r_-^L = r_-^R$, $\lambda_4 = r_+^L$, and w_R in R_1 by Eq. (96c) with $\lambda_1 = r_-^L = r_-^R$, $\lambda_2 = r_+^L$. It is important to notice that each pair of boundary points (L_3 and R_3 , say) is located within a triangle obtained by cutting the hyperbolicity square by its diagonals. It means that a cnoidal DSW is possible only if both its edge points belong to the same monotonicity triangle (region of genuine nonlinearity, earlier defined in Sec. IV A). Since the edge points of the DSW

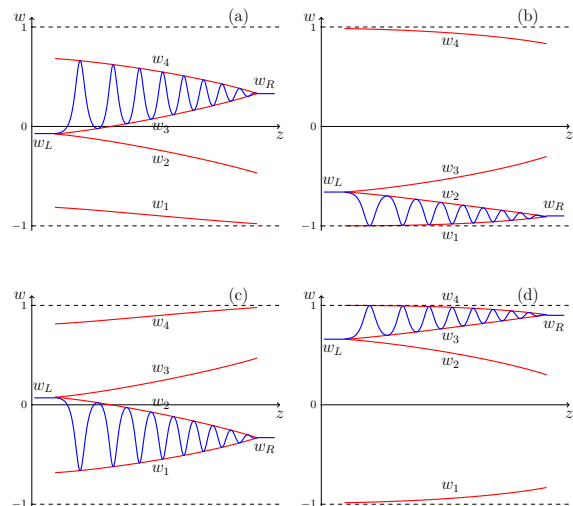


FIG. 8: Plots of the functions $w_i(z)$ (red) and of the associated dispersive shock waves (blue) corresponding to the diagram Fig. 6(a) and to the four possible choices of f_1 in Eqs. (32). In each case, two of the $w_i(z)$'s are the envelopes of the oscillatory structure, either w_1 and w_2 or w_3 and w_4 , as clear from Eqs. (39) and (48).

belong to an ellipse of constant Riemann invariant, we can *schematically* represent each DSW by an arc of this ellipse in the (v, w) plane. But we should keep in mind that — at variance with the dispersionless situation — the actual plot representing how v and w evolve within a DSW displays large oscillations and noticeably departs from this ellipse, with which it has only the edge points in common.

The substitution of the solutions (92) into (59) gives the dependence of the w_i 's in term of z . Since we have four sets of formulas corresponding to the four different choices of f_1 [Eqs. (32a) and (32b)], each of the two solutions (a) and (b) in (92) corresponds to four possible oscillatory behaviors for the DSW. The plots of the functions $w_i(z)$ produced by the diagram Fig. 6(a), are shown in Fig. 8: cases (a) and (b) correspond to the positive signs in Eqs. (32) and to arcs L_1R_1 and L_2R_2 in Fig. 7; cases (c) and (d) correspond to the negative signs in Eqs. (32) and to arcs L_3R_3 and L_4R_4 in Fig. 7. Obviously, the plots 8(c) and 8(d) can be obtained from the plots 8(a) and 8(b) by the transformation $w \rightarrow -w$. It is worth noticing that if we exchange the left and right boundary conditions, then the time evolution of the initial flow yields to the formation, not of a DSW, but of a rarefaction wave, such as considered in the previous subsection. In Fig. 9 we compare the analytic solution in the Whitham approximation with the exact numerical solution of the Landau-Lifshitz system for the case shown in Fig. 8(a), with $v_L = -0.659$, $w_L = -0.076$, $v_R = -0.906$ and $w_R = 0.331$, which corresponds to $r_-^L = r_-^R = -0.7$, $r_+^L = 0.8$ and $r_+^R = 0.1$. One can see that the envelope

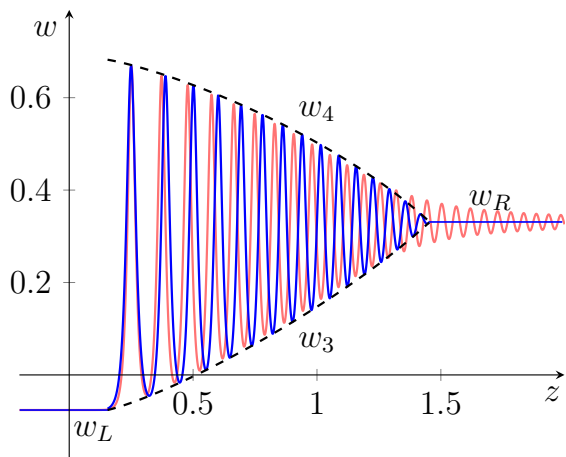


FIG. 9: Dispersive shock wave evolving from an initial discontinuity with parameters corresponding to the points L_1, R_1 in Fig. 7, with $r_-^L = r_-^R = -0.7$, $r_+^L = 0.8$, $r_+^R = 0.1$, which corresponds to $v_L = -0.659$, $w_L = -0.076$, $v_R = -0.906$ and $w_R = 0.331$. The edge velocities are equal to $s_- = 0.15$ and $s_+ = 1.45$. The analytic solution determined within the Whitham approximation scheme is shown by a blue line and the corresponding envelope functions by dashed black lines. The numerical solution computed for an evolution time $t = 100$ is shown by a red line. According to our definition $v = (v_- - v_+)/2c_p$, and the wave structure with these parameters propagates to the right.

functions resulting from the Whitham approach (dashed lines) agree very well with the exact numerical solution.

In a similar way, the diagram Fig. 6(b) with $r_+^L = r_+^R$ produces four other wave structures which correspond to four arcs connecting the crossing points of the red and green ellipses in Fig. 7. Since this case does not differ essentially from the above presented one, we shall not discuss it further.

The DSWs studied in the present subsection, as the rarefaction waves presented in Sec. IV A, can serve as key elements involved in the description of a general wave structure evolving from the initial conditions (72). They can be observed alone, in their genuine form, only if the points corresponding to the left and right boundaries belong to the same triangle of monotonicity. The transitions between two triangles imply one more element, *contact dispersive shocks*, and related structures which we consider in the next section.

C. Contact dispersive shock waves

We now turn to the study of the situation where the left and right boundaries points belong to different monotonicity triangles. In this case the problem is no longer genuinely nonlinear. We shall start by studying the simplest possible configuration in which the Riemann invari-

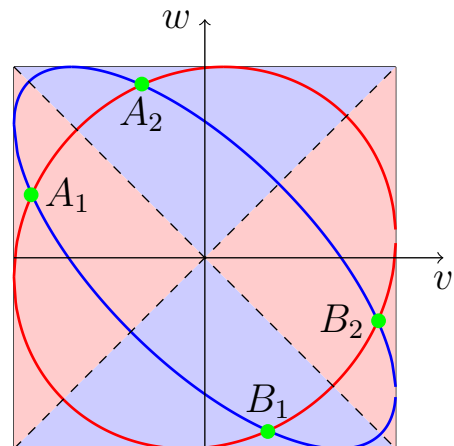


FIG. 10: Plots of the ellipses of the (v, w) -plane along which the Riemann invariants $r_-^L = r_-^R = -0.7$ (red) and $r_+^L = r_+^R = 0.1$ (blue) are constant. Their crossing points define possible values of (v, w) at the edges of the contact dispersive shock.

ants have equal values at both edges of the shock, i.e., when $r_-^L = r_-^R$, and $r_+^L = r_+^R$. This situation resembles the one of the so called ‘contact discontinuities’ which play an important role in the theory of viscous shocks (see, e.g., Ref. [17]); therefore we shall denote the wave structures arising in this case as *contact dispersive shock waves* (CDSW). (To avoid any confusion, we should mention that in the dynamics of immiscible condensates, interfaces between two components may appear which play the same role as the one played by contact discontinuities in the theory of viscous shocks; see, e.g., Ref. [53].) In the case of a CDSW the ‘left’ and ‘right’ ellipses of constant Riemann invariants in the (v, w) -plane coincide with each other, cf. Fig. 10. The intersections of the ellipses $r_-^{(L,R)} = \text{const}$ and $r_+^{(L,R)} = \text{const}$ define four points denoted as A_1, A_2, B_1 and B_2 in Fig. 10. These points can refer to either the left or the right edge depending on the choice of f_1 .

First of all, we should determine the generic behavior of the Riemann invariants in the case of interest here, and draw diagrams representing the solutions of the Whitham equations equivalent to the ones displayed in Figs. 5 and 6. To be definite, let us consider the example represented in Fig. 10, with a left edge corresponding to point A_1 , and a right one to B_1 . In this case, the arc of ellipse connecting the end points crosses the main diagonal $w = v$ of the hyperbolicity square along which one of the dispersionless Riemann invariants takes its maximal value, equal to unity: $r_+ = 1$. This means that in the formal dispersionless solution, the invariant r_+ would first increase and reach its maximal value $r_+ = 1$, then decrease down to the initial value $r_+^R = r_+^L$ along the same ‘path’ $r_+ = \frac{2}{3}(z - 2r_-^L)$ [cf. Eq. (85)]. By analogy with the case of a regular cnoidal shock considered in the preceding subsection, it is natural to assume that the actual

behavior of the Riemann invariants λ_i corresponding to the Whitham equations reproduces here also the same qualitative structure as the one expected on the basis of the dispersionless analysis. This leads in the present case to the situation depicted in Fig. 11(a), where the invariants λ_1 and λ_2 remain constant within the shock region (and match the boundary conditions: $\lambda_1 = r_-^L = r_-^R$, $\lambda_2 = r_+^L = r_+^R$), whereas the two other Riemann invariants are equal ($\lambda_3 = \lambda_4$) and satisfy the same Whitham equation $v_3(r_-^L, r_+^L, \lambda_4, \lambda_4) = v_4(r_-^L, r_+^L, \lambda_4, \lambda_4) = z$ [with v_3 and v_4 given by the appropriate version of Eq. (70)]. We thus get

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= r_-^L = r_-^R, & \lambda_2 &= r_+^L = r_+^R, \\ v_3 &= v_4 = 2\lambda_4 + \frac{(r_+^L - r_-^L)^2}{2(r_+^L + r_-^L - 2\lambda_4)} = z, \end{aligned} \quad (103)$$

where the last formula determines the dependence of λ_4 on z , which can be presented in an explicit form

$$\lambda_4(z) = \frac{1}{4} \left[z + r_+^L + r_-^L + \sqrt{(z - r_+^L - r_-^L)^2 + 2(r_+^L - r_-^L)^2} \right]. \quad (104)$$

Here z varies within the interval $s_- \leq z \leq s_+$ with

$$s_- = \frac{3r_+^L + r_-^L}{2}, \quad s_+ = 2 + \frac{(r_+^L - r_-^L)^2}{2(r_+^L + r_-^L - 2)}. \quad (105)$$

The wavelength in this case is given by the formula

$$L = \frac{2\pi}{\sqrt{(\lambda_4(z) - r_-^L)(\lambda_4(z) - r_+^L)}}. \quad (106)$$

Substitution of this solution into Eqs. (96) yields the dependence of the parameters w_i on z which, in turn, determines – according to Eq. (51) – the oscillatory structure of $w(x, t)$ in a new type of shock which we shall call, as mentioned above, a *contact dispersive shock wave*.

In a similar way, we may consider the diagram represented in Fig. 11(b) which corresponds in the (v, w) -plane to paths crossing the anti-diagonal $w = -v$. The solution of the Whitham equations takes the form [see Eq. (71)]

$$\begin{aligned} v_1 &= v_2 = 2\lambda_1 + \frac{(r_+^L - r_-^L)^2}{2(r_+^L + r_-^L - 2\lambda_1)} = z, \\ \lambda_3 &= r_-^L = r_-^R, & \lambda_4 &= r_+^L = r_+^R, \end{aligned} \quad (107)$$

or

$$\lambda_1(z) = \frac{1}{4} \left[z + r_+^L + r_-^L - \sqrt{(z - r_+^L - r_-^L)^2 + 2(r_+^L - r_-^L)^2} \right] \quad (108)$$

where z belongs to the interval $s_- \leq z \leq s_+$ with

$$s_- = -2 + \frac{(r_+^L - r_-^L)^2}{2(r_+^L + r_-^L + 2)}, \quad s_+ = \frac{r_+^L + 3r_-^L}{2}. \quad (109)$$

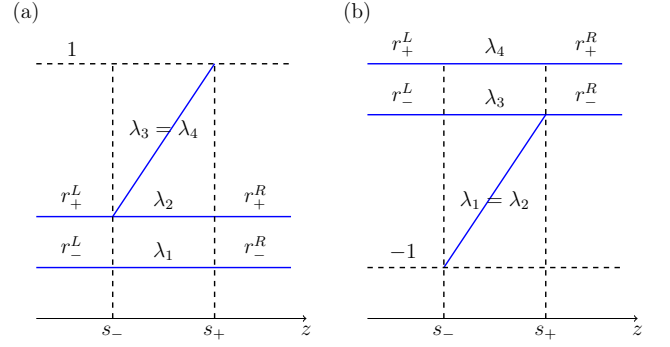


FIG. 11: Sketches of the behavior of the Riemann invariants in contact dispersive shock wave solutions of the Whitham equations with the boundary conditions (a) $r_-^L = r_-^R$ or (b) $r_+^L = r_+^R$.

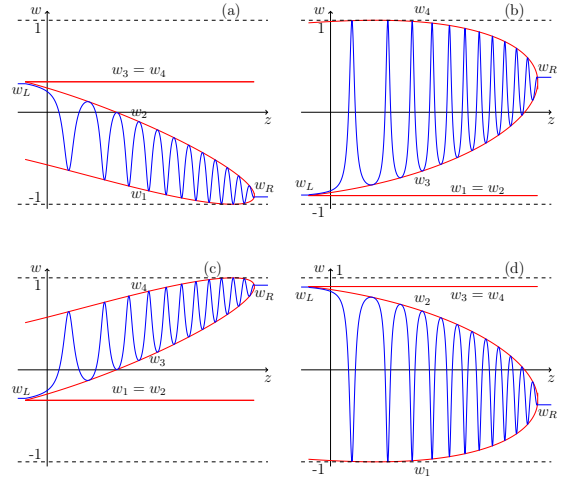


FIG. 12: Contact dispersive shock waves (blue) and associated envelope functions w_i (red) describing the solution of the Whitham equations which is represented by the diagram shown in Fig. 11(a) with $r_-^L = r_-^R = -0.7$, $r_+^L = r_+^R = 0.1$. The four shocks correspond to the four possible choices for the parameter f_1 in Eqs. (32).

The wavelength is here given by the formula

$$L = \frac{2\pi}{\sqrt{(\lambda_1(z) - r_-^L)(\lambda_1(z) - r_+^L)}}. \quad (110)$$

Now, as in the case of cnoidal DSWs, we have to determine how these solutions of the Whitham equations are mapped onto the envelop parameters w_i . For example, if we take $f_1 > 0$ given by Eq. (32a), then in the limit $m \rightarrow 0$ these parameters are presented by the formulas (96) and w oscillates in the interval $w_1 \leq w \leq w_2$ leading to the trigonometric modulated wave (45). This situation is depicted in Fig. 12(a). Obviously, it corresponds to the transition $A_1 \rightarrow B_1$ in the (v, w) -plane. At the soliton

edge with $\lambda_4 = \lambda_2$ we obtain for the parameters w_i the following expressions:

$$w_1 = -\sqrt{\frac{1}{2} \left[1 + (2\lambda_2^2 - 1)S_{1,2}^{(+)} - 2\lambda_2\lambda_2' E_{1,2}^{(-)} \right]}, \quad (111a)$$

$$w_2 = -\sqrt{\frac{1}{2} \left[1 + (2\lambda_2^2 - 1)S_{1,2}^{(+)} + 2\lambda_2\lambda_2' E_{1,2}^{(-)} \right]}, \quad (111b)$$

and at the small amplitude edge (where $\lambda_4 = 1$) the expression

$$w_1 = w_2 = -\sqrt{\frac{1}{2}(1 + \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1'\lambda_2')}, \quad (112)$$

with the same formula (96c) for w_3 and w_4 at both edges.

If instead we consider the case where $f_1 > 0$ is given Eq. (32b), we obtain the CDSW shown in Fig. 12(b) which corresponds to the opposite transition $B_1 \rightarrow A_1$. At the soliton edge (where $\lambda_4 = \lambda_2$) we obtain the expressions

$$w_3 = -\sqrt{\frac{1}{2} \left[1 + (2\lambda_2^2 - 1)S_{1,2}^{(-)} + 2\lambda_2\lambda_2' E_{1,2}^{(+)} \right]}, \quad (113a)$$

$$w_4 = \sqrt{\frac{1}{2} \left[1 + (2\lambda_2^2 - 1)S_{1,2}^{(-)} - 2\lambda_2\lambda_2' E_{1,2}^{(+)} \right]}, \quad (113b)$$

and at the small amplitude edge (where $\lambda_4 = 1$)

$$w_3 = -w_4 = -\sqrt{\frac{1}{2}(1 + \lambda_1\lambda_2 - \lambda_1'\lambda_2')}, \quad (114)$$

with the same formula (98a) for w_1 and w_2 at both edges. Considering the other cases, with $f_1 < 0$ leads to CDSWs represented in Figs. 12(c,d) and corresponding to the transitions $B_2 \rightarrow A_2$ and $A_2 \rightarrow B_2$ respectively. In Fig. 13 we compare the analytic solution with the exact numerical solution of the Landau-Lifshitz equation for the boundary conditions corresponding to Fig. 12(d). As we see, there is very good agreement of the envelope functions with the numerical results

In a similar way one can consider solutions schematically depicted in Fig. 11(b). They correspond to transitions $A_1 \leftrightarrow A_2$ or $B_1 \leftrightarrow B_2$ which cross the anti-diagonal $w = -v$. If we take $f_1 > 0$ given by Eq. (32a), at the soliton edge ($\lambda_2 = \lambda_3$) we obtain the expressions

$$w_3 = \sqrt{\frac{1}{2} \left[1 + (2\lambda_3^2 - 1)S_{3,4}^{(+)} - 2\lambda_3\lambda_3' E_{3,4}^{(-)} \right]}, \quad (115a)$$

$$w_4 = \sqrt{\frac{1}{2} \left[1 + (2\lambda_3^2 - 1)S_{3,4}^{(+)} - 2\lambda_3\lambda_3' E_{3,4}^{(-)} \right]}, \quad (115b)$$

and at the small amplitude edge ($\lambda_2 = -1$)

$$w_3 = w_4 = \sqrt{\frac{1}{2}(1 + \lambda_3\lambda_4 + \lambda_3'\lambda_4')}, \quad (116)$$

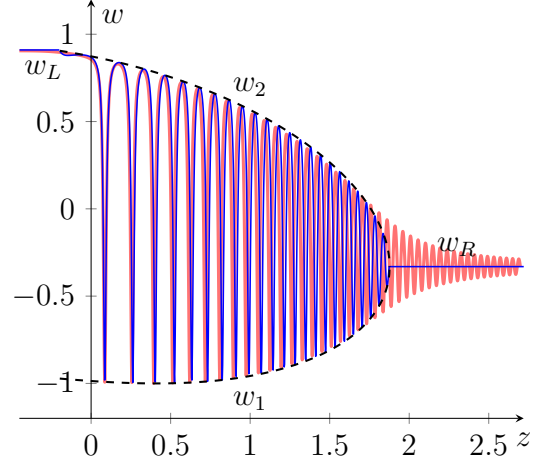


FIG. 13: Comparison of the Whitham analytic solution shown in Fig. 12(d) with the exact numerical solution (red line) of the Landau-Lifshitz equations after an evolution time $t = 100$ with the same boundary conditions as in Fig. 12(d): $(v_L, w_L) = (-0.33, 0.91)$, $(v_R, w_R) = (0.91, -0.33)$ which corresponds to $r_-^L = r_-^R = -0.7$, $r_+^L = r_+^R = 0.1$.

with the same formula (100a) for w_1 and w_2 at both edges. If we take $f_1 < 0$, then these expressions merely change sign upon appropriate reordering. At last, for the case $f_1 > 0$ given by Eq. (32b) we obtain at the soliton edge ($\lambda_2 = \lambda_3$) the expressions

$$w_3 = -\sqrt{\frac{1}{2} \left[1 + (2\lambda_3^2 - 1)S_{3,4}^{(-)} - 2\lambda_3\lambda_3' E_{3,4}^{(+)} \right]}, \quad (117a)$$

$$w_4 = \sqrt{\frac{1}{2} \left[1 + (2\lambda_3^2 - 1)S_{3,4}^{(-)} - 2\lambda_3\lambda_3' E_{3,4}^{(+)} \right]}, \quad (117b)$$

and at the small amplitude edge ($\lambda_2 = -1$)

$$w_3 = -w_4 = -\sqrt{\frac{1}{2}(1 + \lambda_3\lambda_4 - \lambda_3'\lambda_4')}, \quad (118)$$

with the same formula (102a) for w_1 and w_2 at both edges. Again, if we take $f_1 < 0$, then these expressions will also change signs upon appropriate reordering.

We now turn to the study of the generalizations of CDSWs by considering the transitions depicted in Fig. 14: in these cases the boundary points are also not in the same monotonicity triangle of the (v, w) plane, still on the same ellipse because the left and right boundary conditions have a common value for one of the Riemann invariants (say, $r_-^L = r_-^R$), however the boundary values of the other Riemann invariants are different ($r_+^L \neq r_+^R$). To be definite, we shall consider two generalizations of the situation leading to the CDSW represented in Figs. 12(d) and 13. The transition of the type $A_2 \rightarrow B_2$ of Fig. 10 can be generalized in two ways represented in Fig. 14, where the points L and R symbolize

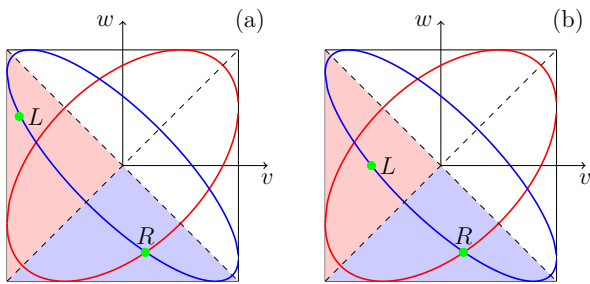


FIG. 14: Paths in the (v, w) -plane associated with two types of combined shocks. The left and right boundary conditions correspond to points L and R respectively; they lie on an ellipse along which the dispersionless Riemann invariant r_- ($= r_-^L = r_-^R$) is constant. One has $r_+^L < r_+^R$ in case (a) and $r_+^L > r_+^R$ in case (b).

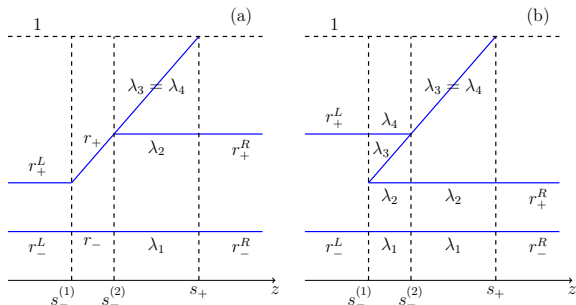


FIG. 15: Sketches of the behavior of the Riemann invariants corresponding to the transitions in the (v, w) -plane shown in Fig. 14.

plateaus at the left and right boundaries, respectively. In this case $r_-^L = r_-^R$ because the transition occurs along the ellipse where this Riemann invariant is constant. As we know, the dispersionless invariant r_+ decreases along such a curve when going away from the diagonal $w = v$, hence we have $r_+^L < r_+^R$ and $r_+^L > r_+^R$ in case (a) and (b), respectively. This suggests the generalizations of the diagram Fig. 11(a) depicted in Fig. 15.

In the case corresponding to Fig. 15(a), the CDSW is attached at its soliton edge to a rarefaction wave which matches at its left edge with the left boundary plateau. The velocities of the characteristic points identified in Fig. 15(a) are expressed in terms of the boundary Riemann invariants by the formulas

$$\begin{aligned} s_-^{(1)} &= \frac{1}{2}(r_-^L + 3r_+^L), & s_-^{(2)} &= \frac{1}{2}(3r_+^R + r_-^R), \\ s_+ &= 2 + \frac{(r_+^R - r_-^R)^2}{2(r_+^R + r_-^R - 2)}. \end{aligned} \quad (119)$$

The resulting composite wave structure is shown in Fig. 16 (blue line) where it is compared with the numerical solution of the Landau-Lifshitz equation (red line).

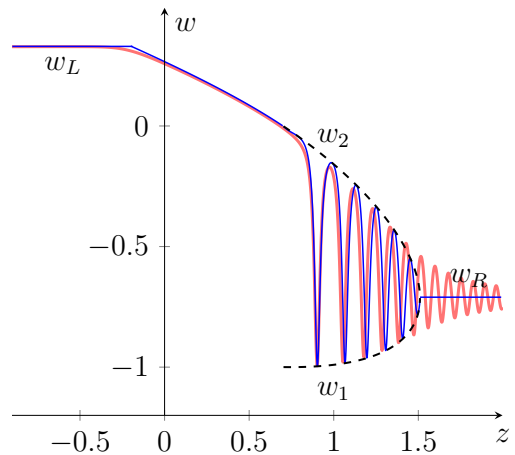


FIG. 16: Comparison of the analytic solution corresponding to the left and right boundary conditions depicted in Fig. 15(a) with the exact numerical solution of the Landau-Lifshitz equations.

In the case corresponding to Fig. 15(b) the trigonometric CDSW is attached to a cnoidal DSW of the type Fig. 8(a) which degenerates at its right edge (at which $w_2 = w_1$) into a trigonometric wave. At the left soliton edge the cnoidal wave matches with the left boundary plateau. The velocities of the characteristic points identified in Fig. 15(b) are given by

$$\begin{aligned} s_-^{(1)} &= \frac{1}{2}(r_-^L + 2r_+^R + r_+^L), \\ s_-^{(2)} &= 2r_+^L + \frac{(r_+^R - r_-^R)^2}{2(r_+^R + r_-^R - 2r_+^L)}, \\ s_+ &= 2 + \frac{(r_+^R - r_-^R)^2}{2(r_+^R + r_-^R - 2)}. \end{aligned} \quad (120)$$

The resulting composite wave structure is shown in Fig. 17 (blue line) where it is compared with the numerical solution of the Landau-Lifshitz equation (red line).

It is clear that any transition between points shown in Fig. 10 can be generalized in a similar way leading to composite shock waves consisting of cnoidal, trigonometric and rarefaction waves. We shall not list here all these possible wave structures since the general principles for their construction are simply deduced from the examples just presented.

This ends the characterization of all the key elements which may appear in a complex wave structure evolving from an arbitrary initial discontinuity of type (72). We can now proceed to the classification of all the possible composite structures.

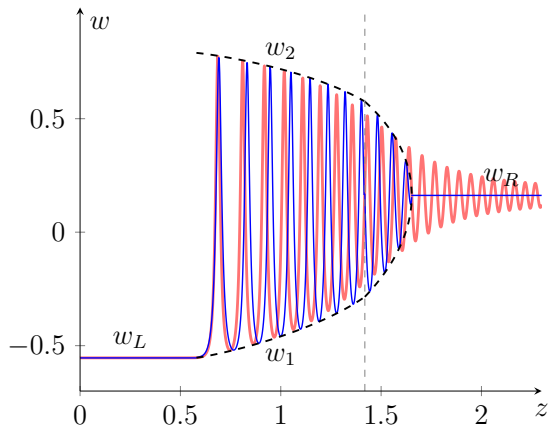


FIG. 17: Comparison of the analytic solution corresponding to the left and right boundary conditions depicted in Fig. 15(b) with the exact numerical solution of the Landau-Lifshitz equations. The (analytically determined) vertical dashed line separates the cnoidal wave (at the left) from the trigonometric wave (at the right).

V. CLASSIFICATION

As clear from the previous section, it is convenient to distinguish the situations where both points representing the left and right boundary conditions belong to the same triangle of monotonicity from those where they belong to different such triangles. It has been noticed in subsection II A 1 that in these triangles, for some limiting values of the variables, the Landau-Lifshitz equation reduces either to the NLS or to KB equation. We shall thus refer to such triangles as being of “NLS type” or of “KB type”, and consider them separately.

A. Nonlinear Schrödinger type sector

Since the theory for the upper and lower NLS type triangles is essentially the same, we shall confine ourselves to the upper triangle which is shown in Fig. 18.

We thus consider the case where both left and right initial conditions correspond to points located inside this triangle of the (v, w) -plane. For definiteness, we denote the point of coordinates (v_L, w_L) referring to the left boundary by L and plot the two ellipses of constant Riemann invariants r_{\pm}^L and r_{\pm}^R . These divide the triangle into six sub-domains. It is easy to see that, when the point R referring to the right boundary is located in one of these domains (labelled by the symbols A, B, ..., F),

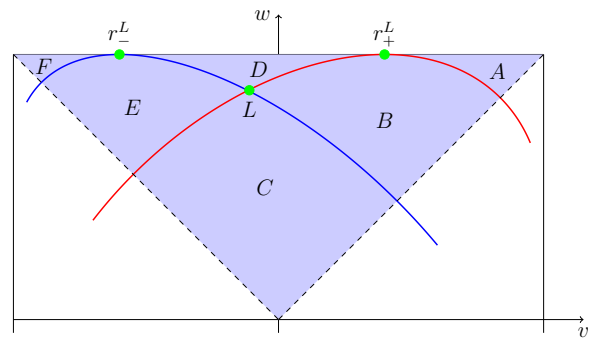


FIG. 18: Plot of the upper monotonicity triangle of NLS type in the (v, w) plane. The (red and blue) curves of constant dispersionless Riemann invariants r_{\pm}^L corresponding to the left boundary point L divide this triangle into six domains denoted as A, B, ..., F. The type of flow depends on the domain in which lies the right boundary point R of coordinates (v_R, w_R) .

one of the following inequalities is fulfilled:

$$\begin{aligned}
 \text{(A)} \quad & r_{-}^L < r_{+}^L < r_{-}^R < r_{+}^R, & \text{(B)} \quad & r_{-}^L < r_{-}^R < r_{+}^L < r_{+}^R, \\
 \text{(C)} \quad & r_{-}^R < r_{-}^L < r_{+}^L < r_{+}^R, & \text{(D)} \quad & r_{-}^L < r_{-}^R < r_{+}^R < r_{+}^L, \\
 \text{(E)} \quad & r_{-}^R < r_{-}^L < r_{+}^R < r_{+}^L, & \text{(F)} \quad & r_{-}^R < r_{+}^R < r_{-}^L < r_{+}^L.
 \end{aligned}
 \tag{121}$$

The corresponding diagrams of the Riemann invariants symbolizing the self-similar solutions of the Whitham equations and sketches of wave structures are shown in Fig. 19. In case (A) the structure consists of two rarefaction waves expanding into ‘vacuum’ and in case (B) these two rarefaction waves are connected by a plateau whose parameters are determined by the dispersionless Riemann invariants r_{\pm}^P equal to $r_{-}^P = r_{-}^R$ and $r_{+}^P = r_{+}^L$. In cases (C) and (D) the structure consists of one DSW and one rarefaction wave connected by a plateau characterized by the same parameters. In case (E) there are two DSWs connected by a plateau and, at last, in case (F) the previous plateau is replaced by a nonlinear wave which — with high enough accuracy — can be presented as a non-modulated cnoidal wave. Not surprisingly, this classification coincides qualitatively with the one obtained in Ref. [23] for the NLS equation. It is clear that it is determined by the geometry of the curves of constant Riemann invariants: the arcs of ellipses shown in Fig. 18 become, in the NLS equation, arcs of parabolas with the same subdivision of the monotonicity region which, in the NLS case, extends to the whole half-plane of all possible values of the physical parameters. In the present Landau-Lifshitz case, a typical example of such a structure has been studied in some details in Ref. [13].

It is important to notice that the domains A and F cannot be reached from point L in Fig. 18 via paths consisting of arcs of constant dispersionless Riemann invariants without by-passing the points labelled as r_{-}^L and r_{+}^L ,

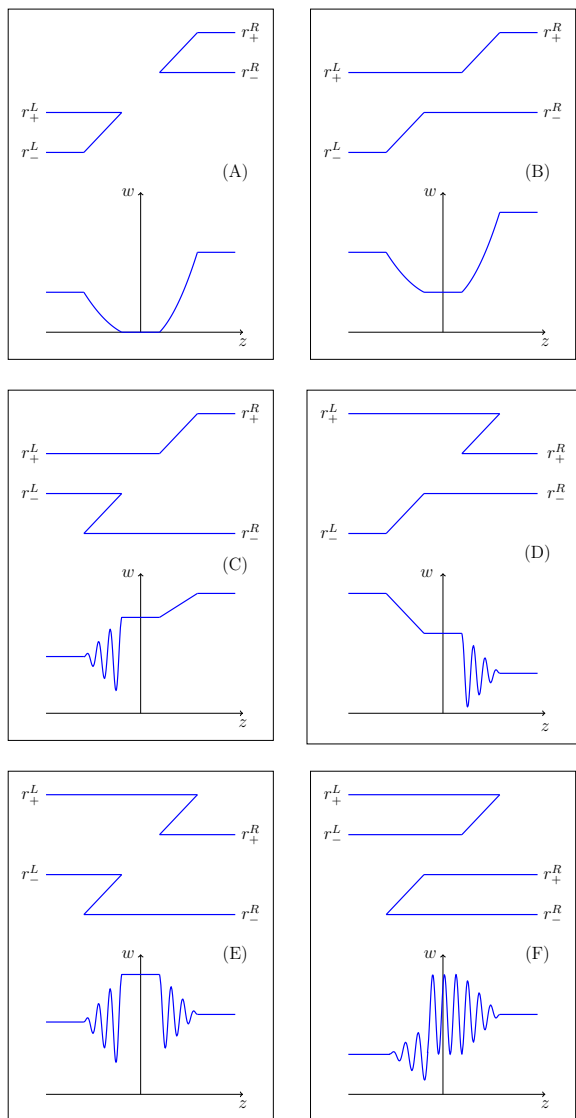


FIG. 19: Sketches of the behavior of the Riemann invariants and of the corresponding wave structures corresponding to the location of the point R referring to the right boundary in one of the six domains shown in Fig. 18.

at which the meaning of the Riemann invariants changes (see Fig. 2 and the related discussion in the text). Therefore, in these two cases, the edge wave structures are separated either by vacuum (i.e. $w = 0$) in case (A), or by a cnoidal wave in case (F). In the other situations (B, C, D, E) we can draw two arcs of constant invariant ellipses whose crossing point defines the plateau connecting the edge wave structures (rarefaction waves or DSWs). It is easy to see that these two arcs can be drawn in two ways and that the physically relevant one is distinguished by the condition that the speeds of the matching points increase from left to right (see a similar argumentation in the theory of standard viscous shock waves in Ref. [17]).

Consequently, the left edge wave always corresponds to a diagram of Riemann invariants with $r_+^L = \text{const}$ continued through the whole left wave, whereas in the right edge wave we have $r_-^R = \text{const}$ also continued through the whole right structure. The diagrams (B) to (E) in Fig. 19 illustrate this simple principle. This remark removes any ambiguity in the determination of the wave structure arising from initial conditions referring to the NLS type sectors.

B. Kaup-Boussinesq type sector

We shall now consider initial conditions for which both left and right boundary points are located in a KB sector of the (v, w) -plane which consists in one of the triangles delimited by the diagonal, the anti-diagonal and the vertical curve $v = \pm 1$. For definiteness we consider the right KB triangle. This situation bears many similarities with the preceding NLS type case. Indeed, from Fig. 20 we see that, again, the monotonicity triangle is divided into six domains corresponding to the inequalities listed in Eq. (121) — these domains are symmetrical with respect to the diagonal $w = v$ to those shown in Fig. 18. It is clear that the diagrams of Riemann invariants and the corresponding wave structures are qualitatively the same as the ones depicted in Fig. 19. A detailed discussion of the Riemann problem for the KB equation (15) has been recently given in Ref. [25] and in the KB sector of Landau-Lifshitz equation theory the resulting wave patterns are qualitatively the same — they consist of DSWs and/or rarefaction waves connected with each others by plateaus.

As in the NLS type sectors, if the point R referring to the right boundary lies in one of the domains B, C, D or E, it can be connected with L by two arcs of constant Riemann invariant ellipses in two possible ways; the physically acceptable one is identified by the condition that the speeds of the matching points increase from left to right. The crossing point of these two arcs defines the parameter of the plateau which connects the two edge wave structures. In cases (A) and (F) the plateau does not exist and is replaced either by a vacuum region or by a non-modulated cnoidal wave. We thus arrive at the same wave structures that the ones illustrated in Fig. 19.

C. Wave structures with transitions between monotonicity sectors

The above formulated principles of construction of diagrams for the Riemann invariants make it possible to predict which wave structure will evolve from a given boundary condition (72), even in cases where the left and right boundary points belong to different triangles of monotonicity. Since the total number of possible wave structures is very large, we shall not list all of them here but rather illustrate the principles of construction by an

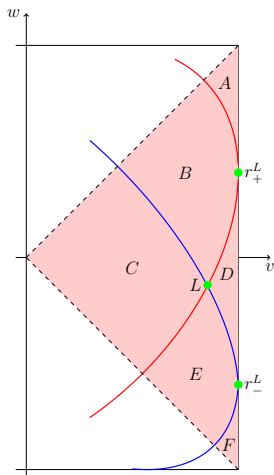


FIG. 20: Plot of the right monotonicity triangle of KB type in the (v, w) plane. The (red and blue) curves of constant dispersionless Riemann invariants r_{\pm}^L corresponding to the left boundary point L divide this triangle into six domains denoted as A, B, \dots , F. The type of flow depends on the domain in which lies the right boundary point R of coordinates (v_R, w_R) .

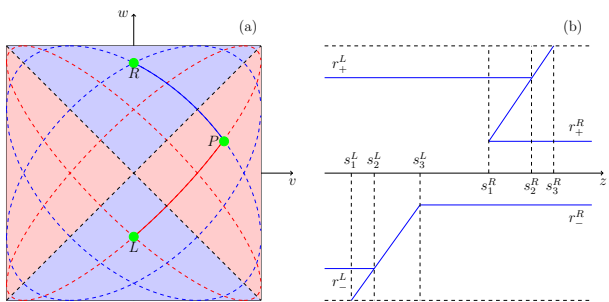


FIG. 21: (a) Plot in the (v, w) plane of ellipses along which the dispersionless Riemann invariants are constant. They are represented by red (blue) dashed lines for the left (right) boundary conditions. The path connecting the left L and the right R points are shown by solid lines. They intersect at point P representing the plateau located between the left and right waves. (b) Sketch of the behavior of the Riemann invariants corresponding to solutions of the Whitham equations for the same boundary conditions. The left wave consists of a trigonometric shock (for $s_1^L < z < s_2^L$) attached to a rarefaction wave (for $s_2^L < z < s_3^L$). The right wave is a combined cnoidal ($s_1^R < z < s_2^R$) and trigonometric ($s_3^R < z < s_3^R$) shock.

application to a typical particular case.

Let us take $v_L = v_R = 0$, $w_L < 0$, $w_R > 0$ and $|w_L| < w_R$. We see at once from Fig. 21(a) that the dispersionless ellipses relating L to R must cross both diagonals of the hyperbolicity square, hence the wave structure must consist of two contact and/or combined waves.

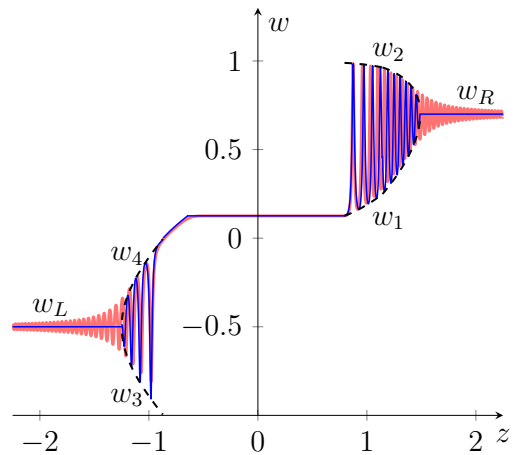


FIG. 22: Comparison of analytic (blue line) and numerical (red line) solutions for the initial profile (72) with $v_L = v_R = 0$, $w_L = -0.5$, $w_R = 0.7$. The left and right boundary points are represented in Fig. 21(a) and the behavior of the Riemann invariants is sketched in Fig. 21(b).

Substitution of the above parameters into Eq. (75) yields the values of the dispersionless Riemann invariants which are ordered according to $r_-^L < r_-^R < r_+^R < r_+^L$. Taking into account that the left wave corresponds to the continuation of $r_+^L = \text{const}$ and the right wave to the continuation of $r_-^R = \text{const}$, we arrive at the diagram shown in Fig. 21(b). At the left edge we have the combination of a trigonometric shock ($s_1^L \leq z \leq s_2^L$) with a rarefaction wave ($s_2^L \leq z \leq s_3^L$) and, at the right edge, one has merged cnoidal ($s_1^R \leq z \leq s_2^R$) and trigonometric ($s_2^R \leq z \leq s_3^R$) shocks. These left and right edge waves are connected one with the other by a plateau characterized by the Riemann invariants $r_-^P = r_-^R$ and $r_+^P = r_+^L$. This plateau is represented by the single point P in Fig. 21(a).

The formulas connecting the zeroes w_i of the resolvent with the Riemann invariants λ_i (obtained as solutions of the Whitham equations) are of the type discussed in Section IV C. They make it possible to explicitly construct the Whitham wave structure (shown in Fig. 22 by a blue line) which compares very well with the numerical solution of the Landau-Lifshitz equation (red line). This example clearly illustrates how the wave structure can be constructed for any choice of parameters of the initial discontinuous profile (72).

VI. DISCUSSION AND CONCLUSION

In this paper we have solved the Riemann problem and characterized the space-time evolution of an initial discontinuity for the Landau-Lifshitz equation. This equation describes magnetization excitations in a dissipa-

tionless easy-plane ferromagnet and, in the appropriate regime, polarization waves in a two-component BEC. It is natural to suppose that the method developed in the present work is general enough and should apply to many other models. We shall thus formulate the most important points of our approach.

(i) The first obvious feature is the statement that the method in its present form applies to modulationally stable situations only, so the region of hyperbolicity of the long wave (dispersionless) approximation should be determined and the boundary conditions at both sides of the discontinuity must lie within this region.

(ii) The hyperbolicity region should be subdivided into domains where the dispersionless approximation is *genuinely nonlinear* (see, e.g., Ref. [30]), i.e., where the characteristic velocities depend on the field variables with non vanishing gradients. In our case — with two field variables with known Riemann invariants — we have denoted such domains as *monotonicity sectors*. For systems described by a single field variable, this condition reduces to imposing a fixed convexity to the dependence of the dispersionless velocity on the amplitude of the wave; an example of such a situation was considered in Ref. [27].

(iii) If both boundary conditions belong to the same monotonicity sector, then the classification of the wave structures follows closely well-known examples such as KdV (one field variable, [18]) or NLS (two field variables [23]) theories. These wave structures consist of rarefaction waves and standard dispersive shock waves of Gurevich-Pitaevskii type connected with each other by a plateau, a “vacuum” or a two-phase (i.e., non-modulated “cnoidal”) wave region.

(iv) If the boundary conditions belong to different monotonicity sectors, then they are connected by profiles consisting of new wave structures — contact (trigonometric) dispersive shocks or kinks. In situations with a single field variables these were identified, respectively, in Refs. [26] and [29]; both structures appeared also in the theory of the Gardner equation [27]. In the case considered here of the Landau-Lifshitz equation we have dealt with contact dispersive shock waves and their combinations with other structures.

(v) When the evolution equations are completely integrable, the Whitham system can be transformed into a diagonal Riemann form and in this case the mapping of the Riemann invariants to the physical parameters is not single-valued. Instead, it is realized by sets of relationships between the zeroes of two polynomials: the polynomial whose roots are the Riemann invariants (noted P in the main text) and its algebraic resolvent (\mathcal{R}). These relationships appear in a natural way in the finite-gap integration method (see, e.g., Ref. [54]) complemented by resolving the problem of “reality conditions” [48] (see also Ref. [51]). For the Landau-Lifshitz equation the corresponding resolvent was found in Ref. [44] in which, however, the consequences of the multiplicity of relationships between the Riemann invariants and the zeroes of the resolvent were not completely elucidated. The theory developed in the present work clarifies this important point.

We thus believe that the solution of the Riemann problem for the case of nonlinear waves whose evolution is governed by the Landau-Lifshitz equations provides a general scheme which applies to other systems which share the similar characteristic property of not being genuinely nonlinear, cf. the case of the modified NLS equation considered in Ref. [55]. Besides, the different situations considered in the present work can find applications for describing nonlinear waves in concrete physical situations such as ferromagnets and two-component Bose-Einstein condensates.

Acknowledgments

We thank M. Hoefer for fruitful exchanges and discussions and E. Iacocca for comments on the manuscript. AMK thanks Laboratoire de Physique Théorique et Modèles Statistiques (Université Paris-Saclay) where this work was started, for kind hospitality. This work was supported by the French ANR under grant ANR-15-CE30-0017 (Haralab project).

-
- [1] M. H. Anderson, J. R. Ensher, M. R. Matthews, C. E. Wieman and E. A. Cornell, *Science* **269**, 198 (1995).
 - [2] K. B. Davis, M.-O. Mewes, M. R. Andrews, N. J. van Druten, D. S. Durfee, D. M. Kurn and W. Ketterle, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 3969 (1995).
 - [3] C. J. Myatt, E. A. Burt, R. W. Ghrist, E. A. Cornell, and C. E. Wieman, *Phys. Rev. Lett.* **78**, 586 (1997).
 - [4] J. Stenger, S. Inouye, D. M. Stamper-Kurn, H.-J. Miesner, A. P. Chikkatur, and W. Ketterle, *Nature (London)* **396**, 345 (1998).
 - [5] D. S. Hall, M. R. Matthews, J. R. Ensher, C. E. Wieman, and E. A. Cornell. *Phys. Rev. Lett.* **81**, 1539 (1998).
 - [6] Y. Kawaguchi, and M. Ueda, *Phys. Rep.* **520**, 253 (2012).
 - [7] D. M. Stamper-Kurn and M. Ueda, *Rev. Mod. Phys.* **85**, 1191 (2013).
 - [8] C. J. Pethick and H. Smith, *Bose-Einstein Condensation in Dilute Gases* (Cambridge University Press, Cambridge, 2002).
 - [9] L. Pitaevskii and S. Stringari, *Bose-Einstein Condensation* (Clarendon Press, Oxford, 2003).
 - [10] P. G. Kevrekidis, D. J. Frantzeskakis, R. Carretero-González eds, *Emergent Nonlinear Phenomena in Bose-Einstein Condensates : Theory and Experiment* (Springer, Berlin, 2007).
 - [11] A. M. Kamchatnov, Y. V. Kartashov, P.-É. Larré, and N. Pavloff, *Phys. Rev. A* **89**, 033618 (2014).
 - [12] C. Qu, L. P. Pitaevskii, and S. Stringari, *Phys. Rev. Lett.*

- 116**, 160402 (2016).
- [13] T. Congy, A. M. Kamchatnov, and N. Pavloff, *SciPost Phys.* **1**, 006 (2016).
- [14] T. Bienaimé, E. Fava, G. Colzi, C. Mordini, S. Serafini, C. Qu, S. Stringari, G. Lamporesi, and G. Ferrari, *Phys. Rev. A* **94**, 063652 (2016).
- [15] C. Hamner, J. J. Chang, P. Engels, and M. A. Hoefer, *Phys. Rev. Lett.* **106**, 065302 (2011).
- [16] I. Danaila, M. A. Khamehchi, V. Gokhroo, P. Engels, and P. G. Kevrekidis, *Phys. Rev. A* **94**, 053617 (2016).
- [17] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Fluid Mechanics*, Pergamon, Oxford, (1959).
- [18] A. V. Gurevich and L. P. Pitaevskii, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **65**, 590 (1973) [*Sov. Phys. JETP* **38**, 291 (1974)].
- [19] G. B. Whitham, *Proc. Roy. Soc. London*, **283**, 238 (1965).
- [20] G. B. Whitham, *Linear and Nonlinear Waves* (Wiley Interscience, New York, 1974).
- [21] G. A. El, M. A. Hoefer, *Physica D* **333**, 11-65 (2016).
- [22] A. V. Gurevich, A. L. Krylov, *Sov. Phys. JETP*, **65**, 944-953 (1987).
- [23] G. A. El, V. V. Geogjaev, A. V. Gurevich, and A. L. Krylov, *Physica D* **87**, 186 (1995).
- [24] G. A. El, R. H. J. Grimshaw, M. V. Pavlov, *Stud. Appl. Math.* **106**, 157-186 (2001).
- [25] T. Congy, S. K. Ivanov, A. M. Kamchatnov, and N. Pavloff, *Chaos* **27**, 083107 (2017).
- [26] T. R. Marchant, *Wave Motion*, **45**, 540555 (2008).
- [27] A. M. Kamchatnov, Y.-H. Kuo, T.-C. Lin, T.-L. Horng, S.-C. Gou, R. Clift, G. A. El, and R. H. J. Grimshaw, *Phys. Rev. E* **86**, 036605 (2012).
- [28] G. A. El, M. A. Hoefer, and M. Shearer, *SIAM Review* **59**, 3 (2017).
- [29] J. G. Esler and J. D. Pearce, *J. Fluid Mech.*, **667**, 555-585 (2011).
- [30] P. D. Lax, *Hyperbolic Partial Differential Equations*, (AMS, 2006).
- [31] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Phys. Zs. Sowjet.* **8**, 153 (1935).
- [32] E. M. Lifshitz and L. P. Pitaevskii, *Statistical Physics, Part II* (Nauka, Moscow, 1978).
- [33] C. Belleaux, in *Lacombe, La Houille Blanche* **1**, 38-44 (1965).
- [34] L. V. Ovsyannikov, *Zh. Prikl. Mekch. Tekhn. Fiz.* **2**, 3 (1979) [*J. Appl. Mech. Techn. Phys.* **30**, 127 (1979)].
- [35] A. G. Cavanié, *Cahiers Océanographiques* **29**, 831-843 (1969).
- [36] H. Sandstrom and C. Quon, *Fluid Dynamics Research* **11**, 119-137 (1993).
- [37] V. Yu. Liapidevskii and V. M. Teshukov, *Mathematical models of long wave propagation in an inhomogeneous fluid* [in Russian], Izd. Sib. Otd. Ross. Akad. Nauk, Novosibirsk (2000).
- [38] A. M. Kosevich, B. A. Ivanov, and A. S. Kovalev, *Phys. Rep.* **194**, 117 (1990).
- [39] E. Iacocca and M. A. Hoefer, *Phys. Rev. B* **95**, 134409 (2017).
- [40] E. Iacocca, T. J. Silva, and M. A. Hoefer, *Phys. Rev. Lett.* **118**, 017203 (2017).
- [41] D. T. Son and M. A. Stephanov, *Phys. Rev. A* **65**, 063621 (2002).
- [42] A. E. Borovik, *Pis'ma Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **28**, 629 (1978) [*JETP Lett.* **28**, 629 (1978)].
- [43] A. E. Borovik, S. Klama, and S. I. Kulinich, *Physica D* **32**, 107 (1988).
- [44] A. M. Kamchatnov, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **102**, 868 (1992) [*JETP* **75**, 1606 (1992)].
- [45] C. K. Law, C. M. Chan, P. T. Leung, and M.-C. Chu, *Phys. Rev. A* **63**, 063612 (2001).
- [46] D. J. Kaup, *Progr. Theor. Phys.* **64**, 396 (1976).
- [47] G. A. El, *Chaos* **15**, 037103 (2005).
- [48] A. M. Kamchatnov, *J. Phys. A: Math. Gen.* **23**, 2945 (1990).
- [49] M. Abramowitz and I. A. Stegun, *Handbook of mathematical functions*, (Dover Publications, New-York, 1972).
- [50] A. M. Kamchatnov, *Phys. Lett. A* **186**, 387-390 (1994).
- [51] A. M. Kamchatnov, *Nonlinear Periodic Waves and Their Modulations — An Introductory Course* (World Scientific, Singapore, 2000).
- [52] R. Courant and K O Friedrichs, *Supersonic flow and shock waves*, (Interscience Publishers, New-York, 1956).
- [53] S. K. Ivanov and A. M. Kamchatnov, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **151**, 644-662 (2017) [*JETP*, **124**, 546-563 (2017)].
- [54] V. E. Zakharov, S. V. Manakov, S. P. Novikov, L. P. Pitaevskii, *The Theory of solitons: The Inverse Scattering Method*, (Nauka, Moscow, 1980) [translation: Consultants Bureau, 1984].
- [55] S. K. Ivanov and A. M. Kamchatnov, "Riemann problem for the photon fluid: self-steepening effects", preprint.

Conclusion

Comme on l'a mentionné dans l'introduction, les condensats de Bose-Einstein à deux composantes constituent un excellent laboratoire pour étudier de nouveaux fluides dispersifs. Le dernier chapitre en est la parfaite illustration : dans un régime proche de la limite de Manakov, le degré de liberté de polarisation du condensat présente la même dynamique que les fluctuations de magnétisation à l'intérieur d'un matériau ferromagnétique. Dans le cas où le condensat est suffisamment polarisé (limite Non-Linéaire de Schrödinger, cf. la Section 4.b du Chapitre 3), le degré de liberté de polarisation se comporte formellement comme un condensat de Bose-Einstein à interactions répulsives de densité $\rho_{\uparrow} - \rho_{\downarrow}$ et de vitesse $v_{\uparrow} - v_{\downarrow}$. Dans un autre comportement limite, où la vitesse relative entre les deux condensats est proche de la vitesse du son de polarisation (limite Kaup-Boussinesq), la polarisation décrit un nouveau régime dispersif de l'équation de Kaup-Boussinesq dynamiquement stable. Ces deux régimes sont obtenus ici par la modification du mélange du condensat et de la vitesse relative entre les espèces, accessibles toutes les deux expérimentalement.

D'un point de vue plus général, le degré de liberté interne des condensats spinoriels enrichit la dynamique des excitations. On a montré à cet égard dans le Chapitre 2 que les deux modes d'excitations peuvent interagir de façon non-linéaire à travers un système d'équations de Zakharov. Ce second degré offre aussi la possibilité de concevoir de nouvelles excitations non-linéaires du condensat à l'aide de couplages cohérents dont les paramètres sont hautement réglables (cf. équation Korteweg-de Vries *quartique* dans l'Article 1).

Bien que ces modélisations constituent différentes limites formelles de la dynamique de champ moyen des condensats à deux composantes, elles décrivent de nouveaux phénomènes jamais observés jusqu'à maintenant dans les gaz quantiques. Les travaux présentés ainsi dans les Chapitres 2 et 3 ouvrent de nouvelles perspectives quand à l'observation de nouveaux phénomènes et peuvent mener à de nouveaux développements théoriques pour les fluides quantiques à deux composantes. Un des prolongements naturels des travaux présentés dans le Chapitre 2 consiste en l'étude des interactions non-linéaires entre les deux modes d'excitations dans la phase dite *plane-wave* disponible en présence d'interaction spin-orbite. Dans cette phase les modes d'excitations ne possèdent plus la symétrie $\omega(-k) = \omega(k)$ et le mode de plus basse énergie présente un mode de rotons (cf. la Fig. 2.3). D'après l'analyse multi-échelle développée dans le Chapitre 2, l'étude des excitations non-linéaires dans cette phase du condensat semble très prometteuse et peut mener à l'observation de nouvelles interactions entre les excitations à travers les condensats de spinors, au même titre de la résonance onde longue – onde courte mise en évidence dans la phase *single minimum*.

Dans le Chapitre 3, la mise en évidence d'un nouveau type de soliton (dénomé ici soliton algébrique) d'amplitude finie possédant une énergie nulle pose la question de sa stabilité

transversale une fois plongé dans une géométrie à deux ou trois dimensions²⁵. Le caractère atypique de l'énergie des solitons magnétiques amène ici un traitement plus fin de la stabilité transversale. L'étude de la stabilité *aux grandes longueurs d'onde transversales* des ondes non-linéaires dans les condensats à deux composantes peut être systématisée à l'aide d'une analyse multi-échelle : la séparation en deux échelles de longueurs s'effectuant naturellement ici en comparant la largeur du soliton et la longueur d'onde de l'excitation transversale²⁶.

Les travaux développés dans le Chapitre 3 restent très généraux et trouvent par définition une application dans les milieux dont la dynamique est gouvernée par les équations de Landau-Lifshitz. La résolution du problème de Riemann a été motivée ici par les expériences réalisées dans les condensats à deux composantes qui nous ont alors mené à étudier le modèle de Landau-Lifshitz dans une configuration *easy-plane*, et ces résultats peuvent être étendus à d'autres configurations pour lesquelles ces équations restent intégrables ; plus explicitement la méthode peut être généralisée au régime *easy-axis* dans lequel les équations de la dynamique appartiennent toujours à la hiérarchie AKNS. Plus formellement, les travaux développés dans le Chapitre 3 et l'Article 4 permettent de clarifier la nature surjective de la relation entre les paramètres des ondes cnoïdales w_i et les invariants de Riemann de la théorie de Whitham λ_i mis en évidence initialement durant l'intégration *finite-gap*²⁷ dérivée par [148]. La construction de la solution du problème de Riemann proposée ici permet d'associer à chacune des multiplicités de la relation $w_i(\lambda)$ un chemin bien particulier dans l'espace des phases (v, w) et lève ainsi la dégénérescence apparaissant durant l'intégration des solutions à une phase des équations de Landau-Lifshitz. La résolution du problème de Riemann pour un système non *genuinely non-linear* ouvre aussi la perspective à la résolution de nouveaux systèmes. Le modèle hydrodynamique des fluides stratifiés où l'on prend en compte les effets dispersifs constitue un exemple d'application possible de la méthode développée dans le Chapitre 3. Ce modèle, appelé modèle de Miyata-Camassa-Choi [167, 168], est décrit par un système d'équations pour lequel les invariants de Riemann ne varient pas de façon monotone avec les paramètres physiques (cf. la Ref. [169]). Bien qu'il ne soit pas intégrable, la résolution présentée dans le Chapitre 3 offre la possibilité d'étendre la méthode développée pour les systèmes non intégrables par G. El [155] à ce système non *genuinely non-linear*, et permettrait de décrire ainsi les principales caractéristiques des ondes de choc dispersives pouvant se propager à travers les fluides stratifiés.

25. Parallèlement, la stabilité à deux et trois dimensions des solitons magnétiques est renforcée par la grande largeur de la longueur de cicatrisation de polarisation ξ_p qui protège le soliton dans la limite d'excitations transversales de longueur d'onde inférieure à ξ_p (comme le soulignent les auteurs de la Ref. [99]).

26. Cette étude fait l'objet d'un travail en cours et n'est pas présentée ici.

27. et aussi durant la dérivation de la relation entre les champs w et v et les invariants de Riemann hydrodynamiques λ_{\pm} dans l'approximation où la dispersion est négligeable.

Annexe A

Distributions de Thomas-Fermi

Dans cet annexe on détermine les distributions stationnaires $\varphi_{\uparrow}(x)$ et $\varphi_{\downarrow}(x)$ du condensat à deux composantes en présence d'un piège harmonique :

$$\psi_{\uparrow}(x, t) = \varphi_{\uparrow}(x) e^{-i\mu_{\uparrow}t} \quad \text{et} \quad \psi_{\downarrow}(x, t) = \varphi_{\downarrow}(x) e^{-i\mu_{\downarrow}t} . \quad (\text{A.1})$$

Dans le cas général, les équations de Gross-Pitaevskii adimensionnées (1.14) s'écrivent :

$$\mu_{\uparrow}\varphi_{\uparrow} = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2\varphi_{\uparrow}}{\partial x^2} + (g_{\uparrow\uparrow}|\varphi_{\uparrow}|^2 + g_{\uparrow\downarrow}|\varphi_{\downarrow}|^2)\varphi_{\uparrow} + \frac{\Omega}{2}\varphi_{\downarrow} + V(x)\varphi_{\uparrow} , \quad (\text{A.2a})$$

$$\mu_{\downarrow}\varphi_{\downarrow} = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2\varphi_{\downarrow}}{\partial x^2} + (g_{\downarrow\downarrow}|\varphi_{\downarrow}|^2 + g_{\uparrow\downarrow}|\varphi_{\uparrow}|^2)\varphi_{\downarrow} + \frac{\Omega}{2}\varphi_{\uparrow} + V(x)\varphi_{\downarrow} , \quad (\text{A.2b})$$

où $V(x) = x^2/2$, μ_{\uparrow} et μ_{\downarrow} sont des potentiels chimiques à déterminer, et les g_i sont les coefficients non-linéaires définis par (1.12) (pour une configuration quasi-1D) ; on rappelle que ces équations sont normalisées telles que x soit exprimé en unité a_{\parallel} et t en unité ω_{\parallel}^{-1} [cf. l'Eq. (1.3)]. Afin de calculer les distributions $\varphi_{\uparrow}(x)$ et $\varphi_{\downarrow}(x)$, on considère par la suite la limite de Thomas-Fermi pour laquelle on peut négliger l'énergie cinétique du condensat par rapport à son énergie de confinement et son énergie d'interactions (ainsi que l'énergie du couplage Rabi dans le cas où $\Omega \neq 0$). On considère en pratique les équations (A.2a) et (A.2b) avec :

$$-\frac{1}{2}\frac{\partial^2\varphi_{\uparrow,\downarrow}}{\partial x^2} = 0 . \quad (\text{A.3})$$

1. Condensat à deux composantes

Dans cette partie on considère le condensat sans couplage Rabi et les équations (A.2) s'écrivent dans l'approximation de Thomas-Fermi :

$$\mu_{\uparrow}\varphi_{\uparrow} = [g_{\uparrow\uparrow}\rho_{\uparrow} + g_{\uparrow\downarrow}\rho_{\downarrow} + V(x)]\varphi_{\uparrow} , \quad (\text{A.4a})$$

$$\mu_{\downarrow}\varphi_{\downarrow} = [g_{\downarrow\downarrow}\rho_{\downarrow} + g_{\uparrow\downarrow}\rho_{\uparrow} + V(x)]\varphi_{\downarrow} . \quad (\text{A.4b})$$

Dans le cas où les deux espèces coexistent ($\varphi_{\uparrow}(x) \neq 0$ et $\varphi_{\downarrow}(x) \neq 0$), les amplitudes se simplifient et le système linéaire (A.4) est résolu pour :

$$\begin{pmatrix} \rho_{\uparrow} \\ \rho_{\downarrow} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_{\uparrow}^a(x) \\ \rho_{\downarrow}^a(x) \end{pmatrix} = \frac{1}{g_{\uparrow\uparrow}g_{\downarrow\downarrow} - g_{\uparrow\downarrow}^2} \begin{pmatrix} g_{\downarrow\downarrow} & -g_{\uparrow\downarrow} \\ -g_{\uparrow\downarrow} & g_{\uparrow\uparrow} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mu_{\uparrow} - V(x) \\ \mu_{\downarrow} - V(x) \end{pmatrix} . \quad (\text{A.5})$$

Dans le cas où $\varphi_{\downarrow}(x) = 0$, le système (A.4) est trivialement résolu par :

$$\rho_{\uparrow} = \rho_{\uparrow}^b(x) = \frac{\mu_{\uparrow} - V(x)}{g} . \quad (\text{A.6})$$

On suppose par la suite que la condition de miscibilité (1.22) est bien remplie et on note par la suite le déterminant du système (A.5) par :

$$G^2 \equiv g_{\uparrow\uparrow}g_{\downarrow\downarrow} - g_{\uparrow\downarrow}^2 > 0 . \quad (\text{A.7})$$

Les domaines de définition des deux distributions ρ_{\uparrow} et ρ_{\downarrow} n'étant pas nécessairement les mêmes, on définit¹ :

- une zone centrale $|x| \in [0, X_a]$ où les deux espèces coexistent :

$$\rho_{\uparrow}^a(x) = G^{-2} \left[(g_{\downarrow\downarrow}\mu_{\uparrow} - g_{\uparrow\downarrow}\mu_{\downarrow}) - (g_{\downarrow\downarrow} - g_{\uparrow\downarrow}) x^2/2 \right] , \quad (\text{A.8})$$

$$\rho_{\downarrow}^a(x) = G^{-2} \left[(g_{\uparrow\uparrow}\mu_{\downarrow} - g_{\uparrow\downarrow}\mu_{\uparrow}) - (g_{\uparrow\uparrow} - g_{\uparrow\downarrow}) x^2/2 \right] , \quad (\text{A.9})$$

où la limite X_a est définie par :

$$\rho_{\downarrow}^a(X_a) \equiv 0 \quad \Leftrightarrow \quad X_a = \sqrt{\frac{2(g_{\uparrow\uparrow}\mu_{\downarrow} - g_{\uparrow\downarrow}\mu_{\uparrow})}{g_{\uparrow\uparrow} - g_{\uparrow\downarrow}}} , \quad (\text{A.10})$$

- une zone $|x| \in [X_a, X_b]$ où il n'y a plus d'atomes dans l'état $|\downarrow\rangle$:

$$\rho_{\uparrow}^b(x) = g_{\uparrow\uparrow}^{-1} \left[\mu_{\uparrow} - \frac{1}{2} x^2 \right] , \quad (\text{A.11})$$

$$\rho_{\downarrow}^b(x) = 0 , \quad (\text{A.12})$$

où la limite X_b est définie par :

$$\rho_{\uparrow}^b(X_b) = \rho_{\downarrow}^b(X_b) \equiv 0 \quad \Leftrightarrow \quad X_b = \sqrt{2\mu_{\uparrow}} . \quad (\text{A.13})$$

Les valeurs des potentiels chimiques sont fixées par les conditions de normalisation [cf. les Eqs. (1.15)] :

$$\int dx \rho_{\uparrow}(x) = N_{\uparrow} \quad \Leftrightarrow \quad \int_0^{X_a} dx \rho_{\uparrow}^a(x) + \int_{X_a}^{X_b} dx \rho_{\uparrow}^b(x) = \frac{N_{\uparrow}}{2} , \quad (\text{A.14})$$

$$\int dx \rho_{\downarrow}(x) = N_{\downarrow} \quad \Leftrightarrow \quad \int_0^{X_a} dx \rho_{\downarrow}^a(x) = \frac{N_{\downarrow}}{2} , \quad (\text{A.15})$$

qui sont respectées pour les potentiels chimiques définis par :

$$\mu_{\uparrow} = \frac{1}{2} \left[\frac{3}{2} (g_{\uparrow\uparrow}N_{\uparrow} + g_{\uparrow\downarrow}N_{\downarrow}) \right]^{2/3} , \quad (\text{A.16})$$

$$\mu_{\downarrow} = \frac{g_{\uparrow\downarrow}}{2g_{\uparrow\uparrow}} \left[\frac{3}{2} (g_{\uparrow\uparrow}N_{\uparrow} + g_{\uparrow\downarrow}N_{\downarrow}) \right]^{2/3} + \frac{(g_{\uparrow\uparrow} - g_{\uparrow\downarrow})^{1/3} G^{2/3}}{2g_{\uparrow\uparrow}} \left[\frac{3}{2} GN_{\downarrow} \right]^{2/3} . \quad (\text{A.17})$$

On remarque ici que la valeur du potentiel chimique μ_{\downarrow} est bien définie si $g_{\uparrow\uparrow} > g_{\uparrow\downarrow}$ ². On peut réécrire ces distributions en fonction des longueurs de diffusion en onde s intra et

1. On choisit ici arbitrairement un domaine plus large pour ρ_{\uparrow} .

2. Cette condition lève alors l'indétermination relevée précédemment : l'espèce d'extension la plus large est celle dont le coefficient d'auto-interaction est le plus élevé.

inter-espèces et des paramètres de confinement axial $\omega_{//}$ et radial ω_{\perp} à l'aide de (1.12) :

$$\rho_{\uparrow}(x) = \begin{cases} \frac{\omega_{//}}{\omega_{\perp}} \left[\frac{a_{//}}{4a_{\uparrow\uparrow}} X_b^2 - \frac{a_{\uparrow\downarrow}a_{//}}{4A^2} \left(1 - \frac{a_{\uparrow\downarrow}}{a_{\uparrow\uparrow}}\right) X_a^2 - \frac{(a_{\downarrow\downarrow}-a_{\uparrow\downarrow})a_{//}}{4A^2} x^2 \right] & \text{si } |x| < X_a \\ \frac{\omega_{//}}{\omega_{\perp}} \frac{a_{//}}{4a_{\uparrow\uparrow}} (X_b^2 - x^2) & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{A.18})$$

$$\rho_{\downarrow}(x) = \begin{cases} \frac{\omega_{//}}{\omega_{\perp}} \frac{(a_{\uparrow\uparrow}-a_{\uparrow\downarrow})a_{//}}{4A^2} (X_a^2 - x^2) & \text{si } |x| < X_a \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{A.19})$$

où les constantes X_a , X_b et A sont définies par :

$$X_a^3 = \frac{3\omega_{\perp}}{\omega_{//}} \frac{A^2 N_{\downarrow}}{(a_{\uparrow\uparrow} - a_{\uparrow\downarrow})a_{//}}, \quad X_b^3 = \frac{3\omega_{\perp}}{\omega_{//}} \frac{a_{\uparrow\uparrow}N_{\uparrow} + a_{\uparrow\downarrow}N_{\downarrow}}{a_{//}}, \quad (\text{A.20})$$

$$\text{et } A^2 = a_{\uparrow\uparrow}a_{\downarrow\downarrow} - a_{\uparrow\downarrow}^2. \quad (\text{A.21})$$

2. En présence de couplage Raman $\Omega \neq 0$

Dans un souci de concision, on suppose ici que les coefficients d'interaction intra-espèce sont égaux :

$$g_{\uparrow\uparrow} = g_{\downarrow\downarrow} = g, \quad (\text{A.22})$$

On détermine ici les distributions stationnaires $\rho_{\uparrow} \neq 0$ et $\rho_{\downarrow} \neq 0$ en présence du couplage Rabi : $\Omega \neq 0$ dans l'Eq. (1.14). En présence de ce couplage cohérent, la phase relative entre les deux composantes dans l'état stationnaire est égale à $\phi_0 = \pi$ [cf. l'Eq. (2.11)] et les deux fonctions d'onde φ_{\uparrow} et φ_{\downarrow} sont reliées de la façon suivante :

$$\varphi_{\downarrow} = -\sqrt{\frac{\rho_{\downarrow}}{\rho_{\uparrow}}} \varphi_{\uparrow}. \quad (\text{A.23})$$

Comme il a été remarqué dans le cas uniforme (cf. la Section 1.a du Chapitre 2), les nombres d'atomes ne peuvent être fixés indépendamment en présence de ce couplage cohérent et le potentiel chimique est ici commun aux deux espèces $\mu_{\uparrow} = \mu_{\downarrow} = \mu$. Dans l'approximation de Thomas-Fermi le système (A.2) s'écrit alors :

$$\mu = V(x) + g\rho_{\uparrow} + g_{\uparrow\downarrow}\rho_{\downarrow} - \frac{\Omega}{2} \sqrt{\frac{\rho_{\downarrow}}{\rho_{\uparrow}}}, \quad (\text{A.24a})$$

$$\mu = V(x) + g\rho_{\downarrow} + g_{\uparrow\downarrow}\rho_{\uparrow} - \frac{\Omega}{2} \sqrt{\frac{\rho_{\uparrow}}{\rho_{\downarrow}}}. \quad (\text{A.24b})$$

En isolant le terme proportionnel à Ω , on obtient en multipliant (A.24a) par (A.24b) :

$$\frac{\Omega^2}{4} = (V(x) - \mu + g\rho_{\uparrow} + g_{\uparrow\downarrow}\rho_{\downarrow})(V(x) - \mu + g\rho_{\downarrow} + g_{\uparrow\downarrow}\rho_{\uparrow}), \quad (\text{A.25})$$

et en divisant (A.24a) par (A.24b) :

$$\rho_{\uparrow}(V(x) - \mu + g\rho_{\uparrow}) = \rho_{\downarrow}(V(x) - \mu + g\rho_{\downarrow}). \quad (\text{A.26})$$

L'équation (A.26) possède deux racines :

$$\rho_{\uparrow} = \rho_{\downarrow} \quad \text{ou} \quad \rho_{\uparrow} + \rho_{\downarrow} = \frac{\mu - V(x)}{g}, \quad (\text{A.27})$$

correspondant respectivement à un condensat non-polarisé et un condensat polarisé (cf. la Section 1.a).

2.a. État non-polarisé : $\rho_{\uparrow} = \rho_{\downarrow}$

Dans ce cas, la résolution de l'équation (A.25) devient triviale et on obtient :

$$\rho_{\uparrow}(x) = \rho_{\downarrow}(x) = \frac{1}{g + g_{\uparrow\downarrow}} \left(\mu \pm \frac{\Omega}{2} - V(x) \right), \quad (\text{A.28})$$

où seule la solution + est solution du système initial (A.24) (la solution - correspond à l'état stationnaire de phase relative $\phi_0 = 0$). Le potentiel chimique μ est fixé par la condition de normalisation :

$$\int dx [\rho_{\uparrow}(x) + \rho_{\downarrow}(x)] = N \quad \Leftrightarrow \quad \int_0^X dx \rho_{\uparrow}(x) = \frac{N}{4}, \quad (\text{A.29})$$

où X est défini par l'équation :

$$\rho_{\uparrow}(X) \equiv 0 \quad \Leftrightarrow \quad X = \sqrt{2\mu + \Omega}. \quad (\text{A.30})$$

Après détermination explicite de l'expression (A.29), on obtient :

$$\mu = \frac{1}{8} [6(g + g_{\uparrow\downarrow})N]^{2/3} - \frac{\Omega}{2}. \quad (\text{A.31})$$

2.b. État polarisé : $\rho_{\uparrow} > \rho_{\downarrow}$

Dans ce cas $g(\rho_{\uparrow} + \rho_{\downarrow}) = \mu - V(x)$ et l'équation (A.25) est résolue par :

$$\rho_{\pm}(x) = \frac{\mu - V(x)}{2g} \pm \sqrt{\left(\frac{\mu - V(x)}{2g} \right)^2 - \left(\frac{\Omega}{2(g - g_{\uparrow\downarrow})} \right)^2}. \quad (\text{A.32})$$

Les fonctions $\rho_+(x)$ et $\rho_-(x)$ ne s'annulent jamais, et afin de normaliser ces distributions il est nécessaire de relier les solutions (A.32) aux solutions non-polarisées (A.28) ; à cet égard on sépare le domaine de définition des distributions de la façon suivante :

- une zone $x \in [0, X_a]$ où l'état est polarisé :

$$\rho_{\uparrow}^a(x) = \rho_+(x) \quad \text{et} \quad \rho_{\downarrow}^a(x) = \rho_-(x) \quad (\text{A.33})$$

où la limite X_a est définie par :

$$\rho_{\uparrow}^a(X_a) \equiv \rho_{\downarrow}^a(X_a) \quad \Leftrightarrow \quad X_a = \sqrt{2\mu \pm \frac{2g\Omega}{g - g_{\uparrow\downarrow}}}. \quad (\text{A.34})$$

- une zone $x \in [X_a, X_b]$ où l'état est non-polarisé [cf. l'Eq. (A.28)] :

$$\rho_{\uparrow}^b(x) = \rho_{\downarrow}^b(x) = \frac{1}{g + g_{\uparrow\downarrow}} \left(\mu + \frac{\Omega}{2} - \frac{1}{2}x^2 \right), \quad (\text{A.35})$$

où la limite X_b est définie par :

$$\rho_{\uparrow}^b(x) = \rho_{\downarrow}^b(x) \equiv 0 \quad \Leftrightarrow \quad X_b = \sqrt{2\mu + \Omega}. \quad (\text{A.36})$$

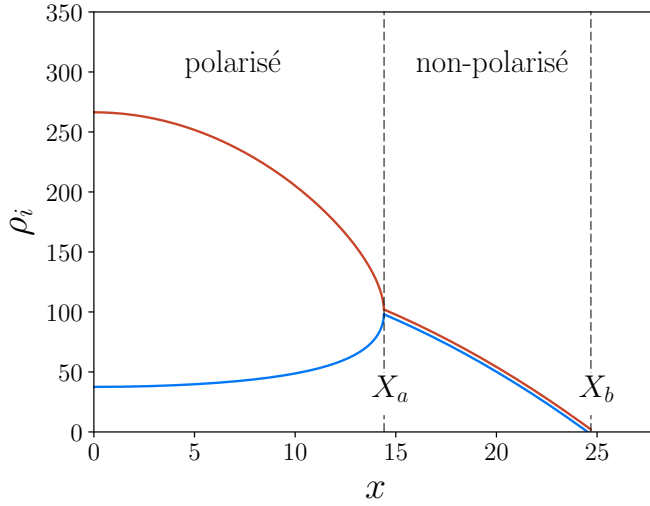


FIGURE A.1 – Distributions de Thomas-Fermi en présence d'un couplage Rabi pour un choix de paramètres (A.39) respectant : $\Omega + (g - g_{\uparrow\downarrow})\rho_0 < 0$. La polarisation du condensat au centre du piège $|x| \ll X_a$ est très proche de celle déterminée dans le cas uniforme (2.11), ici égale à $\cos \theta_0 \approx 0.75$.

L'indétermination de signe dans la définition X_a est fixée au signe + par l'équation de continuité :

$$\rho_{\uparrow}^a(X_a) = \rho_{\downarrow}^a(X_a) = \rho_{\uparrow}^b(X_a) = \rho_{\downarrow}^b(X_a) = \frac{\Omega}{2(g_{\uparrow\downarrow} - g)}. \quad (\text{A.37})$$

On remarque ici que la distribution polarisée est bien définie ssi $g_{\uparrow\downarrow} > g$ de façon similaire à la phase uniforme déterminée dans la section 1.a. Le potentiel chimique est déterminé par la condition de normalisation :

$$\int_0^{X_a} [\rho_{\uparrow}^a(x) + \rho_{\downarrow}^a(x)] dx + \int_{X_a}^{X_b} [\rho_{\uparrow}^b(x) + \rho_{\downarrow}^b(x)] dx = \frac{N}{2}, \quad (\text{A.38})$$

que l'on ne résoudra pas analytiquement ici. À titre d'illustration on trace dans la figure A.1 les distributions $\rho_{\uparrow}(x)$ et $\rho_{\downarrow}(x)$ pour le choix de paramètres suivant :

$$g = 1, \quad g_{\uparrow\downarrow} = 1.01, \quad \Omega = 2 \quad \text{et} \quad N = 10^4. \quad (\text{A.39})$$

On peut vérifier dans la figure A.1 qu'au centre de la distribution $x = 0$ la polarisation du condensat $\cos \theta_0$ vérifie bien la relation déterminée dans le cas uniforme [cf. l'Eq. (2.11)] :

$$\frac{\rho_{\uparrow}^a(0) - \rho_{\downarrow}^a(0)}{\rho_{\uparrow}^a(0) + \rho_{\downarrow}^a(0)} = \cos \theta_0 = \sqrt{1 - \left(\frac{\Omega}{(g - g_{\uparrow\downarrow})\rho_0} \right)^2}, \quad (\text{A.40})$$

où $\rho_0 = \rho_{\uparrow}^a(0) + \rho_{\downarrow}^a(0)$.

Annexe B

Schémas numériques

Dans cet annexe on présente les différents schémas numériques utilisés pour résoudre numériquement le problème de Riemann pour les équations de Gross-Pitaevskii (1.14) et l'équation de Landau-Lifshitz (3.26). Dans un souci de concision, on présentera ces schémas pour l'équation de Gross-Pitaevskii **à une composante** :

$$i \partial_t \psi = -\frac{1}{2} \partial_x^2 \psi + g |\psi|^2 \psi, \quad (\text{B.1})$$

pour laquelle on considère le problème de Riemann suivant :

$$\psi(x, t = 0) = \varphi_0(x) = \frac{\sqrt{\rho_D} - \sqrt{\rho_G}}{2} \tanh\left(\frac{x}{x_0}\right) + \frac{\sqrt{\rho_D} + \sqrt{\rho_G}}{2}. \quad (\text{B.2})$$

ρ_G et ρ_D représentent la densité du condensat en $x = -\infty$ et $x = +\infty$ respectivement. Afin de résoudre numériquement le problème de Riemann constitué de (B.1) et (B.2), on discrétise l'espace des x de la façon suivante :

$$x \equiv j \Delta x, \quad j \in \mathbb{N}. \quad (\text{B.3})$$

Dans cet espace discrétisé, le paramètre d'ordre ψ correspond à un vecteur ψ_j défini tel que :

$$\psi_j(t) \equiv \psi(j \Delta x, t). \quad (\text{B.4})$$

La valeur du pas de discrétisation Δx dépend du schéma utilisé mais aussi de la précision numérique recherchée : en pratique on essaiera de prendre un pas de discrétisation spatiale le plus petit possible. Le problème ne pouvant être résolu numériquement qu'avec un nombre fini de variables, on résoudra l'équation (B.1) sur le domaine $x \in [0; L]$ et on définira¹ :

$$P = \left\lfloor \frac{L}{\Delta x} \right\rfloor, \quad (\text{B.5})$$

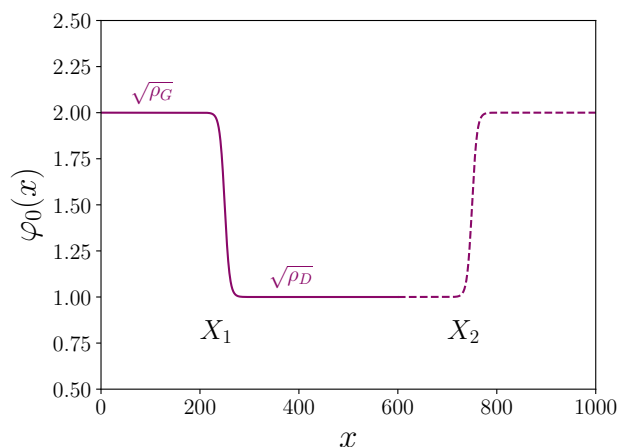
la dimension du vecteur (B.4).

Afin de résoudre le problème de Riemann défini par (B.1) et (B.2) on peut considérer les conditions de Dirichlet suivantes :

$$\psi(x = 0, t) = \sqrt{\rho_G} e^{-i\rho_G t}, \quad \psi(x = L, t) = \sqrt{\rho_R} e^{-i\rho_R t}. \quad (\text{B.6})$$

1. $\lfloor x \rfloor$ correspond à la partie entière de x .

FIGURE B.1 – Condition initiale du problème de Riemann numérique : la marche de densité que l'on souhaite étudier est représentée en trait plein (centrée en X_1 , —) et la marche de densité représentée en trait pointillé (centrée en X_2 , - -) est rajoutée afin de périodiser la condition initiale [cf. l'Eq. (B.8)]. Les différents paramètres sont choisis tels que : $\sqrt{\rho_G} = 2$, $\sqrt{\rho_D} = 1$, $X_1 = 250$, $X_2 = 750$, $L = 1000$ et $x_0 = 10$.



Dans le cas de l'équation de Landau-Lifshitz il est plus difficile de faire respecter ces conditions numériquement et il est préférable de considérer des conditions aux limites périodiques qui s'écrivent pour le problème considéré ici :

$$\psi(x + L, t) = \psi(x, t) \quad \Leftrightarrow \quad \psi_{j+P}(t) = \psi_j(t), \quad (\text{B.7})$$

On présentera par la suite les schémas dans le cas où $\psi(x, t)$ est périodique². Bien que la condition initiale (B.2) ne soit pas périodique, on peut la *périodiser* de la façon suivante³ :

$$\varphi_0(x) = \frac{\sqrt{\rho_D} - \sqrt{\rho_G}}{2} \left[\tanh\left(\frac{x - X_1}{x_0}\right) + \tanh\left(\frac{x - X_2}{x_0}\right) \right] + \sqrt{\rho_G}, \quad (\text{B.8})$$

où $X_1 < X_2$ sont deux positions comprises entre $x = 0$ et $x = L$. Cette distribution est représentée dans la figure B.1. Pour des distance L et $|X_1 - X_2|$ suffisamment grandes on peut décrire indépendamment l'évolution des deux "marches de densité" initialement centrées en X_1 et en X_2 ⁴.

Remarque B.1. Afin de vérifier la validité de la solution numérique, on vérifie que le nombre d'atomes :

$$N = \int_0^L |\psi|^2 dx = \sum_{j=1}^P |\psi_j|^2 \Delta x, \quad (\text{B.9})$$

ainsi que l'énergie du condensat :

$$E = \frac{1}{2} \int_0^L \left(|\partial_x \psi|^2 + g|\psi|^4 \right) dx = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^P \left(\left| \frac{\psi_{j+1} - \psi_{j-1}}{2 \Delta x} \right|^2 + g|\psi_j|^4 \right) \Delta x, \quad (\text{B.10})$$

soient bien constants tout au long de l'évolution. On vérifierait de même dans le cas à deux composantes que les quantités (1.8) et (1.15) soient bien conservées.

2. Initialement le problème de Riemann pour les équations de Landau-Lifshitz a été résolu avec des conditions aux limites $x = 0$ et $x = L$ non maîtrisées : en prenant un domaine de taille L suffisamment grand on a pu « protéger » la solution numérique des perturbations se nucléant à partir de $x = 0$ et $x = L$.

3. On remercie à cet égard Caroline Nore pour cette proposition.

4. En règle générale la période n'est jamais assez grande pour étudier les deux marches de densité sur des temps infiniment longs : la marche centrée en X_1 développe une onde se propageant vers la droite et la marche centrée en X_2 une onde se propageant vers la gauche. En pratique on éloigne le plus possible les deux marches de densité pour que ces deux ondes ne se rencontrent pas dans l'intervalle de temps considéré.

Bien que l'équation de Landau-Lifshitz conserve aussi la normalisation du vecteur $\|\mathbf{S}(x, t)\| = 1$, on privilégiera dans ce cas la comparaison aux résultats analytiques déterminés dans les sections 3 et 4 du Chapitre 3 comme vérification du bon déroulement de la simulation numérique.

1. Schéma explicite

En évaluant le terme de laplacien de l'équation (B.1) à l'aide de trois points :

$$\partial_x^2 \psi(j \Delta x, t) = \frac{\psi_{j+1}(t) + \psi_{j-1}(t) - 2\psi_j(t)}{\Delta x^2}, \quad (\text{B.11})$$

l'équation de Gross-Pitaevskii se réécrit :

$$i \frac{d\psi_j}{dt} = -\frac{1}{2\Delta x^2} (\psi_{j+1} + \psi_{j-1}) + \left(g|\psi_j|^2 + \frac{1}{\Delta x^2} \right) \psi_j. \quad (\text{B.12})$$

En introduisant la notation vectorielle :

$$\boldsymbol{\psi}(t) \equiv (\psi_1, \dots, \psi_j, \dots, \psi_P)^T, \quad (\text{B.13})$$

l'équation (B.12) peut être exprimée sous la forme plus compacte suivante :

$$i \frac{d\boldsymbol{\psi}}{dt} = \mathcal{H}(\boldsymbol{\psi}) \cdot \boldsymbol{\psi}, \quad (\text{B.14})$$

où \mathcal{H} est une matrice $P \times P$ définie par :

$$\mathcal{H}(\boldsymbol{\psi}) \equiv \begin{pmatrix} a_1 & b & 0 & \dots & \dots & 0 & b \\ b & \ddots & \ddots & \ddots & & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & b & a_j & b & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & \ddots & \ddots & \ddots & b \\ b & 0 & \dots & \dots & 0 & b & a_P \end{pmatrix}, \quad (\text{B.15})$$

pour laquelle on a introduit les variables $a_j = g|\psi_j|^2 + \frac{1}{\Delta x^2}$ et $b = \frac{-1}{2\Delta x^2}$. Résoudre le problème de Riemann constitué de (B.1) et (B.8) revient alors à résoudre l'équation différentielle non-linéaire (B.14) avec la condition initiale $\psi_j(t=0) = \varphi_0(j \Delta x)$.

Remarque B.2. L'équation d'évolution (B.14) est très générale : on pourrait récrire les équations de Gross-Pitaevskii (1.14) ou l'équation de Landau-Lifshitz (3.26) sous cette forme en posant $\boldsymbol{\psi} = (\psi_{\uparrow,1} \dots \psi_{\uparrow,P}, \psi_{\downarrow,1} \dots \psi_{\downarrow,P})^T$ et $\boldsymbol{\psi} = (\dots, S_{x,j}, S_{y,j}, S_{z,j} \dots)^T$ respectivement ; dans ces deux cas, \mathcal{H} reste une **matrice bande** dépendante de $\boldsymbol{\psi}$.

1.a. Méthode d'Euler

Afin de résoudre l'équation différentielle (B.14), on divise l'espace temporel en intervalles de largeur Δt tel que :

$$t \equiv n \Delta t. \quad (\text{B.16})$$

On définit alors :

$$\boldsymbol{\psi}^n \equiv \boldsymbol{\psi}(n \Delta t) \quad \Leftrightarrow \quad \psi_j^n \equiv \psi(j \Delta x, n \Delta t) . \quad (\text{B.17})$$

Afin de calculer $\boldsymbol{\psi}^n$ pour $n > 0$, on peut dans un premier temps discrétiser l'équation (B.14) à l'aide de la **méthode explicite d'Euler** :

$$i \frac{\boldsymbol{\psi}^{n+1} - \boldsymbol{\psi}^n}{\Delta t} = \mathcal{H} \cdot \boldsymbol{\psi}^n \quad (\text{B.18})$$

$$\Leftrightarrow \boldsymbol{\psi}^{n+1} = (\mathbb{1} - i \Delta t \mathcal{H}) \boldsymbol{\psi}^n . \quad (\text{B.19})$$

où $\mathbb{1}$ est la matrice identité dimension $P \times P$. On peut montrer en analysant la stabilité de Von Neumann de ce schéma (cf. e.g. la Ref. [170]) que cette méthode explicite est instable⁵ pour l'équation de Gross-Pitaevskii (B.1) et qu'elle ne conserve notamment pas les quantités (B.9) et (B.10).

Appliqué à l'équation de Landau-Lifshitz ce schéma explicite est conditionnellement stable et permet de résoudre le problème pour l'équation (3.26) à condition que :

$$\Delta t \lesssim \Delta x^2 . \quad (\text{B.20})$$

Il est important de souligner ici que l'erreur commise à chaque itération $n \rightarrow n + 1$ en utilisant le schéma (B.19) est de l'ordre de Δt^2 . On peut cependant diminuer l'ordre de grandeur de cette erreur en changeant la méthode utilisée pour discrétiser (B.14).

1.b. Méthode de Runge-Kutta (ordre 4)

Dans un souci de concision on réécrit l'équation (B.14) de la façon suivante :

$$\frac{d\boldsymbol{\psi}}{dt} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{\psi}(t)) , \quad (\text{B.21})$$

où \boldsymbol{f} est la *pente* définie par :

$$\boldsymbol{f} \equiv -i \mathcal{H}(\boldsymbol{\psi}) \cdot \boldsymbol{\psi} . \quad (\text{B.22})$$

Afin d'évaluer le vecteur $\boldsymbol{\psi}$ à l'instant $t + \Delta t$, on ne considère plus la valeur de $\boldsymbol{\psi}$ seulement à l'instant t mais aussi à des instants intermédiaires compris entre t et $t + \Delta t$. La méthode utilisée pour résoudre l'équation de Landau-Lifshitz est la méthode Runge-Kutta à l'ordre 4 où l'on évalue la pente $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\psi}(t))$ à 4 instants différents :

$$\boldsymbol{k}_1 = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{\psi}(t)) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{\psi}^n) \quad (\text{B.23a})$$

$$\boldsymbol{k}_2 = \boldsymbol{f} \left(\boldsymbol{\psi}^n + \frac{\Delta t}{2} \boldsymbol{k}_1 \right) \quad (\text{B.23b})$$

$$\boldsymbol{k}_3 = \boldsymbol{f} \left(\boldsymbol{\psi}^n + \frac{\Delta t}{2} \boldsymbol{k}_2 \right) \quad (\text{B.23c})$$

$$\boldsymbol{k}_4 = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{\psi}^n + \Delta t \boldsymbol{k}_3) . \quad (\text{B.23d})$$

La valeur de $\boldsymbol{\psi}$ à l'instant $t + \Delta t$ est déterminée à l'aide de la moyenne pondérée de ces 4 pentes :

$$\boldsymbol{\psi}^{n+1} = \boldsymbol{\psi}^n + \frac{\Delta t}{6} (\boldsymbol{k}_1 + 2\boldsymbol{k}_2 + 2\boldsymbol{k}_3 + \boldsymbol{k}_4) . \quad (\text{B.24})$$

5. On comprends ici par instabilité au sens de Von Neumann le développement par le schéma numérique de perturbations croissant exponentiellement avec le temps.

Cette méthode n'est pas beaucoup plus coûteuse numériquement que la méthode d'Euler (B.19) et permet de limiter l'erreur de numérique à chaque itération en temps à Δt^5 . On a privilégié cette méthode pour résoudre le problème de Riemann pour l'équation de Landau-Lifshitz. En effet le calcul explicite de la pente $\mathbf{f}(\boldsymbol{\psi})$ [cf. la définition (B.22)] est très rapide à effectuer : pour l'équation de Landau-Lifshitz la matrice \mathcal{H} est une matrice bande et le temps de calcul pour évaluer $\mathbf{f}(\boldsymbol{\psi})$ est de $\mathcal{O}(P)$. De plus la multiplication entre la matrice \mathcal{H} et le vecteur $\boldsymbol{\psi}$ mise en jeu lors de ce calcul est aisément parallélisable et on a pu implémenter ce schéma numérique en C++ en utilisant la bibliothèque de parallélisation OpenMP.

2. Schéma de Crank-Nicolson

Bien que les schémas explicites exposés précédemment ne soient pas stables numériquement pour l'équation (B.1), on peut résoudre cette équation à l'aide d'un schéma implicite. Supposons que le terme de droite de l'équation (B.14) ne soit pas évalué en t mais en $t + \Delta t$, les équations (B.18) et (B.19) se réécrivent :

$$i \frac{\boldsymbol{\psi}^{n+1} - \boldsymbol{\psi}^n}{\Delta t} = \mathcal{H} \cdot \boldsymbol{\psi}^{n+1} \quad (\text{B.25})$$

$$\Leftrightarrow \boldsymbol{\psi}^{n+1} = (\mathbb{1} + i \Delta t \mathcal{H})^{-1} \boldsymbol{\psi}^n . \quad (\text{B.26})$$

On peut montrer que ce schéma numérique au contraire des schémas précédents est *inconditionnellement* stable⁶ (cf. la Ref. [170]). Ce schéma numérique implicite est communément appelé **schéma de Crank-Nicolson**. Sous cette forme, le schéma de Crank-Nicolson ne conserve pas la normalisation de la fonction d'onde (B.9) et il est nécessaire de renormaliser ψ_j à chaque itération $n \rightarrow n + 1$.

La renormalisation peut être évitée en considérant la forme dite de Cayley consistant à alterner une itération « de type Euler » et une itération implicite :

$$\boldsymbol{\psi}^{n+2} = \left[\mathbb{1} + i \Delta t \mathcal{H} (\boldsymbol{\psi}^{n+1}) \right]^{-1} \left[\mathbb{1} - i \Delta t \mathcal{H} (\boldsymbol{\psi}^n) \right] \boldsymbol{\psi}^n , \quad (\text{B.27})$$

Ce schéma a été privilégié au schéma explicite exposé précédemment⁷ pour résoudre numériquement les équations de Gross-Pitaevskii (1.14). Bien que l'on n'a pas été en mesure de paralléliser ce schéma implicite, le temps de calcul de ce schéma est relativement court. En effet l'inversion de la matrice **tri-diagonale** $(\mathbb{1} + i \Delta t \mathcal{H})$ mise en jeu dans le schéma s'effectue en un temps de calcul $\mathcal{O}(P)$. Comme précédemment ce schéma a été implémenté en C++.

6. Cette analyse de la stabilité serait exacte si les termes diagonaux de la matrice (B.15) ne dépendaient par des ψ_j , ce qui n'est pas le cas ici. Cependant dans le cas où les $|\psi_j(t)|^2$ ne varient presque pas durant une itération Δt , le schéma numérique peut être considéré comme stable ; cette condition de lente variation des $|\psi_j(t)|^2$ constitue ainsi une limite supérieure au pas de temps Δt .

7. Cependant à notre grande surprise le schéma explicite Runge-Kutta présenté précédemment fournit un résultat très convenable (conservation de la normalisation et de l'énergie pour des temps longs) ce qui nous a permis d'effectuer des simulations préliminaires très rapides des équations de Gross-Pitaevskii.

Annexe C

Article 5 : Spontaneously formed autofocusing caustics in a confined self-defocusing medium

L'article présenté ici correspond à un travail que l'on n'a pas pu inclure dans le corps de la thèse dédiée à l'étude des condensats de Bose-Einstein à deux composantes. À l'origine, nous avons été contactés par le groupe de S. Barad de l'université de Tel Aviv afin d'interpréter les résultats expérimentaux du montage suivant : un faisceau laser se propage à travers une cuve cylindrique aux parois internes réfléchissantes et remplie d'un fluide optiquement actif, ici de l'éthanol dopé en iode¹ ; le profil radial de l'intensité lumineuse du faisceau laser à l'entrée de la cuve est Gaussien et présente après propagation à travers la cuve remplie d'éthanol une forme d'anneau (cf. la Fig. C.1).

Le profil stationnaire de l'intensité lumineuse peut être décrit par une équation de Schrödinger de coordonnées spatiales (x, y) et de coordonnée temporelle z (cf. la Fig. C.1) avec un potentiel *répulsif* non uniforme correspondant à la variation radiale de l'indice de réfraction. En résolvant l'équation de Schrödinger à l'aide d'une méthode semi-classique, nous avons alors montré que l'anneau lumineux observé à la sortie de la cuve correspond à la formation d'une caustique² par un procédé similaire à la diffusion dite *arc-en-ciel* (*rainbow scattering* en anglais) lors de la diffusion sur un potentiel de Lennard-Jones. De façon plus quantitative, le profil radial à la sortie de la cuve correspond à une fonction d'Airy possédant la propriété de se propager de façon *accélérée* dans le vide. Dans cette géométrie, cela se traduit par un effondrement accéléré de l'anneau lumineux après propagation dans le vide. Les applications pratiques des faisceaux d'Airy auto-accélérés sont nombreuses et nous avons pu présenter dans cet article un montage suffisamment simple permettant de les générer.

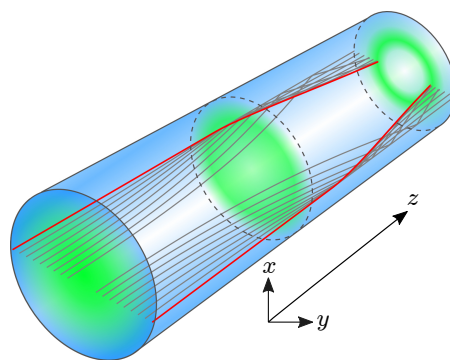


FIGURE C.1 – Propagation du faisceau laser (représenté en vert) à travers la cuve cylindrique ; la propagation est dirigée selon l'axe z . Le trait plein rouge représente la trajectoire de la caustique lumineuse mise en évidence lors de l'étude semi-classique du problème.

1. Ce fluide a la propriété d'avoir un indice de réfraction dépendant de sa température.

2. correspondant à une accumulation des trajectoires *classiques* mises en évidence lors de l'analyse semi-classique et que l'on représente en gris dans la figure C.1.

Spontaneously formed autofocusing caustics in a confined self-defocusing medium

MICHAEL KARPOV,¹ THIBAUT CONGY,² YONATAN SIVAN,³ VICTOR FLEUROV,¹
NICOLAS PAVLOFF,² AND SHIMSHON BAR-AD^{1,*}

¹Sackler School of Physics and Astronomy, Tel Aviv University, Tel Aviv 69978, Israel

²LPTMS, CNRS and Univ. Paris Sud, 91405 Orsay Cedex, France

³Unit of Electro-Optical Engineering, Ben Gurion University, Beer Sheva 84105, Israel

*Corresponding author: shimshon@post.tau.ac.il

Received 24 July 2015; revised 12 November 2015; accepted 15 November 2015 (Doc. ID 246661); published 14 December 2015

Self-accelerating Airy beams, which are nondiffracting waves in the form of an Airy function that propagate in free space with constant acceleration, have received considerable attention in recent years. They are typically generated by manipulation of the phase front of the wave by means of specially designed optical elements. Here we show that autofocusing, radially symmetric Airy waves can form spontaneously as a laser beam propagates in a defocusing, non-local thermal nonlinear medium, inside a cylindrical channel with a reflective boundary. The beam forms a ring-shaped optical caustic, which, following reflection from the boundary, converges to a focal point. We demonstrate this new method experimentally and numerically, and present a semi-classical analytical model for the wave dynamics that shows that the self-generated, radially symmetric wave is indeed a caustic with an Airy-function profile. In the hydrodynamic representation of the nonlinear wave equation, the ring-shaped caustic that we describe can be interpreted as a shock wave that forms as the “photonic fluid” bounces off the reflective boundary. These results suggest a very simple and accessible, yet mathematically accurate, way to obtain autofocusing radially symmetric Airy waves for various applications. © 2015 Optical Society of America

OCIS codes: (190.4420) Nonlinear optics, transverse effects in; (260.1960) Diffraction theory.

<http://dx.doi.org/10.1364/OPTICA.2.001053>

Self-accelerating Airy beams, namely nondiffracting waves in the form of an Airy function, with probability density functions (but not “centers of mass”) that propagate in free space with constant acceleration, have received considerable attention since they were first proposed and demonstrated [1–3], and were shown to be useful for applications such as optical manipulation of small particles, microscopy, laser machining, and generation of light bullets and plasma channels in air [4–8]. The idea has been generalized to nonlinear and nonlocal media [9–11] and to arbitrary convex trajectories [12], and was also applied to electron beams [13] and surface plasmons [14]. The majority of works in this field have focused on one-dimensional Airy beams that propagate in a plane, but radially symmetric Airy waves, which exhibit abrupt autofocusing, have also been proposed and demonstrated [15,16].

The generation of Airy waves usually relies on manipulation of the phase front of the wave by means of a phase mask, diffractive optical elements, or wave-mixing processes. Here we describe *spontaneously generated*, ring-shaped autofocusing Airy waves that form when an optical caustic in a *defocusing*, nonlocal, thermal nonlinear medium is reflected from a cylindrical boundary. Rings in defocusing thermal media have been known for many years [17], although their relation to optical caustics was not explicitly mentioned. Here we use them to construct a ring-shaped

caustic that autofocuses to a point. We first demonstrate the idea experimentally and numerically, and then study the wave dynamics analytically using a semi-classical model. We also briefly discuss the hydrodynamic representation of the nonlinear wave equation, interpreting the ring-shaped caustic as a shock wave that forms as the “photonic fluid” bounces off the reflective boundary.

In the paraxial approximation, the propagation of a coherent light beam through a nonlinear medium is usually described analytically by the nonlinear Schrödinger equation:

$$i \frac{\partial \psi}{\partial z} = -\frac{1}{2\beta_0} \nabla^2 \psi + U(x, y) \psi + g |\psi|^2 \psi. \quad (1)$$

Here ψ is the weakly z -dependent complex amplitude of the light propagating in the z direction, β_0 is the propagation constant, $\nabla^2 = \partial_x^2 + \partial_y^2$ is the transverse Laplacian, $U(x, y)$ is the equivalent potential created by *static* spatial variations of the refractive index, and g is the nonlinear Kerr coefficient, representing the *instantaneous* nonlinear response of the medium. The last term in the equation thus describes the nonlinear refractive index changes due to *local* spatial variations of the light intensity. Strictly speaking, Eq. (1) is not applicable in the case of a thermal nonlinearity [17,18], where the light-induced refractive index variations are nonlocal in both space and time (due to heat diffusion

and accumulation, respectively). It is common to take the spatial nonlocality into account by considering a nonlocal response kernel [19], but in fact, since in many cases a steady state is obtained after sufficiently long exposure to laser light (typically ~ 1 s for laser intensities of a few watts), it is appropriate to describe the delayed, nonlocal response as a static potential $U(x, y)$, determined by the laser beam characteristics, the heat capacity and transport coefficients of the nonlinear medium, and the boundary conditions [20,21].

Consider a laser beam propagating in a thermal, *self-defocusing* medium [meaning that the index of refraction decreases as a function of the temperature, and corresponding to positive g in Eq. (1)] along the axis of a cylindrical channel with a reflective boundary [see Fig. 1(a)]. The material that forms the boundary has very high thermal conductivity and heat capacity. In the steady state the heat flux produced by the laser is balanced by heat diffusion to the boundary, which acts as a heat sink. The heat diffusion is sustained by a radial temperature gradient, and the temperature profile that forms inside the channel, and peaks on its axis, is best described by a static *repulsive* potential with radial symmetry. As the laser beam propagates along the z direction, in the presence of the repulsive potential, its phase fronts acquire an increasing concave curvature, which corresponds to defocusing. (Note that the same result would be obtained in the case of a local, defocusing Kerr nonlinearity, but that the result here depends only weakly on the details of the light intensity distribution in the channel.) Now if the laser beam is sufficiently broad, reflection off the boundary forms another, inward-propagating wave, with *convex* phase fronts, the curvature of which increases as a function of z . As shown in Fig. 1(b), this is a recipe for formation of a caustic.

To illustrate the above scenario we present one-dimensional numerical simulations of Eq. (1), for cylindrical symmetry, assuming a static potential that is a solution of the heat diffusion equation for uniform light intensity (i.e., heat generation) in the channel, namely $U(r) = -\beta_0 n_0 \Delta n(r) = -\beta_0 n_0 \Delta n(1 - (r/R)^2)$, where n_0 is the linear refractive index, r is the radial coordinate, and R is the radius of the channel. (Although this is not a self-consistent model, it greatly simplifies the numerical simulation; moreover, we have verified that the results of the simulation are not very sensitive to the exact form of repulsive potential that we assume.) Figure 2 shows simulation results for input parameters that correspond to the experiment described later. Figure 2(a) is a contour plot of the light intensity as a function of the radial and z coordinates, and Fig. 2(b) is a plot of the intensity as a function of the radial coordinate at the exit of the 8-cm-long channel. The figure clearly shows the formation of a ring, which propagates inward as z increases. The cross section of the ring resembles an Airy function, which is known to be the typical mathematical form of a caustic [1]. Below we will describe a semi-analytical

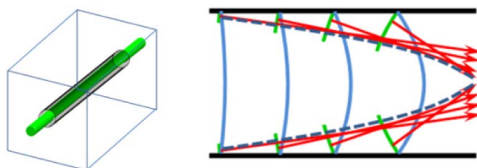


Fig. 1. (a) Setup described in the text. (b) Sketch explaining the formation of a caustic from partial waves reflected off the boundary.

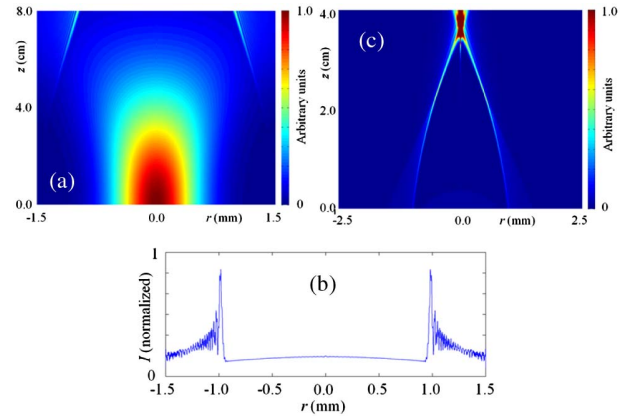


Fig. 2. (a) Numerical simulation of Eq. (1) with a 3-mm-diameter, 8-cm-long channel, a centered, 1-mm-diameter Gaussian input beam, the parabolic potential described in the text, $U(0) = 9000 \text{ m}^{-1}$, $\beta_0 = 1.181 \times 10^7 \text{ m}^{-1}$, and $g|A(0)|^2 = 100 \text{ m}^{-1}$; (a) is a contour plot of the beam intensity as a function of the radial coordinate and the propagation distance inside the channel; (b) is the intensity profile at the output of the channel; (c) self-acceleration and focusing to a point of the output beam as it propagates in free space behind the channel. See also Supplement 1.

model that shows that this conjecture is in fact accurate. At this point, however, we just show numerically that when propagating in free space, behind the nonlinear channel, the self-generated ring is also self-accelerating, and autofocuses to a point in space [Fig. 2(c)]. Finally, we find that the instantaneous Kerr nonlinearity [the last term on the right-hand side of Eq. (1)] does not play any role in the formation of the ring.

In the experiment we launch the beam of a frequency-doubled YAG laser (532 nm, continuous wave) into a 3-mm-diameter, 71-mm-long, circular channel, with polished, reflective walls, drilled in an aluminum block. The latter is enclosed in a cell with glass windows, filled with iodine-doped ethanol (~ 20 ppm)—a defocusing nonlinear medium. The nonlinear index variations result from absorption by the iodine, which in turn leads to non-local, thermally induced changes of the index of refraction [17,18]. Typically, after ~ 1 s exposure to the laser (1–4 W) a steady state is reached, where the heat flux produced by the laser is balanced by heat diffusion to the aluminum block, which acts as a heat sink. Figure 3(a) shows an image of the beam at the output of the channel, obtained with a CCD camera, for a 1 W input beam with a ~ 2.5 mm waist. A bright ring is clearly observed. Similar rings are obtained for a wide range of input powers

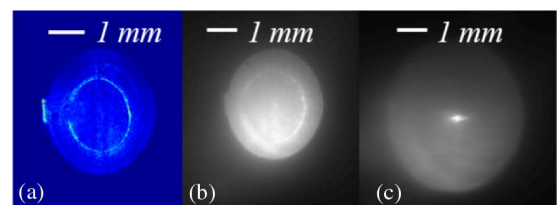


Fig. 3. Experimental: (a) image of the output plane of the 3 mm channel for a 1 W input beam (note: the cylindrical channel has an opening, i.e., a groove on one side, which results in a cutoff piece that is seen ejected to the left); (b) image of the fluorescence at the output plane of the channel for a 3.5 W input beam and a 27% duty cycle; (c) the ring in (b) focuses to a point after propagating ~ 6 cm in free space.

and beam waist sizes. As the input power is increased, the ring moves inward. Reducing the duty cycle of the laser, by means of a mechanical shutter, has the opposite effect. Using fluorescent dye on a glass cover slip as a screen allows imaging of the beam beyond the channel output. Figures 3(b) and 3(c) show images of the fluorescent screen when it is positioned at the output plane of the channel (b) and ~ 6 cm behind it (c), with a 3.5 W input beam and a 27% duty cycle [about the same average power as in Fig. 3(a)], clearly showing that the outgoing beam focuses to a point. The focusing distance from the output plane can be controlled by varying the intensity and duty cycle of the laser. These findings are in excellent agreement with the simulations.

We now turn to the semi-classical model. Since the numerical simulations of Eq. (1) show that the instantaneous Kerr nonlinearity is not important, we replace Eq. (1) with a dimensionless Schrödinger equation for a quantum particle, with implicit cylindrical symmetry (i.e., only radial momentum):

$$i\partial_t\psi = \left[-\frac{1}{2m}\nabla_r^2 + f(r) \right] \psi(r, t). \quad (2)$$

Here r is the normalized radial coordinate ($0 \leq r \leq 1$), $t = zU_{r=0}$, the mass $m = \beta_0 R^2 U_{r=0} \sim 10^5$ corresponds to the values of the experimental parameters, and $f(r) = U(r)/U_{r=0}$ is a normalized potential satisfying $f(0) = 1$, $f(r > 1) = +\infty$, as well as $f'(1^-) = 0$, to simplify the behavior at the boundary. Furthermore, since the ring forms far from the center of the channel, the cylindrical term $r^{-1}\partial_r$ in the Laplacian is neglected (we have numerically verified the excellent accuracy of this approximation for the beam configuration that we consider here). Introducing the notation

$$\psi(r, t) = A(r, t)e^{iS(r, t)}, \quad (3)$$

where A and S are real, we obtain

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \frac{1}{2m} \left[\frac{1}{A} \frac{\partial^2 A}{\partial r^2} - \left(\frac{\partial S}{\partial r} \right)^2 \right] - f, \quad (4a)$$

$$\frac{\partial A^2}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r} \left(A^2 \frac{1}{m} \frac{\partial S}{\partial r} \right) = 0. \quad (4b)$$

We solve the problem in the semi-classical limit in which A is a slowly varying function of position. The first term on the RHS of Eq. (4a) can then be neglected, and one obtains the Hamilton–Jacobi equation:

$$\partial_t S + H(r, \partial_r S) = 0, \quad (5)$$

while Eq. (4b) is a current-conservation equation.

To solve the problem semi-classically, we evolve a swarm of classical test particles in phase space $\{q, p\}$ with the Hamiltonian $\mathcal{H} = p^2/2m + f(r)$ and the following initial conditions: $q(t=0) = q_0 \in [0, 1]$; $p(t=0) = p_0 = \partial S/\partial r|_{(q_0, t=0)} = 0$. The density of initial points along the segment $[0, 1]$ is given by the initial distribution $|\psi(r, t=0)|^2 = A^2(r, t=0)$.

The phase-space curves that describe the distribution of classical particles as a function of time and that evolve according to the Hamiltonian flow are Lagrangian manifolds. At $t=0$ the Lagrangian manifold corresponding to our initial configuration coincides with the line $p=0, q \in [0, 1]$. For sufficiently short times the position $q(t)$ of a classical particle is a unique function $q = q(q_0, t)$ of its initial position q_0 , and one can determine q_0 for each r and t by inverting $q(q_0, t) = r$. The standard semi-classical approach then yields

$$\psi(r, t) = \left| \frac{\partial q_0}{\partial q} \right|^{1/2} A_0(q_0(r, t)) e^{iS(q_0(r, t), t)}, \quad (6)$$

where $A_0(q_0) = A(q_0, t=0)$ is the initial amplitude at the initial position of the particle, and $S(q_0(r, t), t)$ is the action $\int_0^t L(q, \dot{q}, t') dt'$ calculated along the classical trajectory, which leads from q_0 to q . Figure 4 shows the evolution of the classical test particles in phase space and the corresponding density profiles $A^2(r, t)$ calculated from Eq. (6).

The situation gets more complex after some of the classical test particles bounce from the hard wall at $r=1$ and propagate backward toward $r=0$, against the potential $f(r)$, which typically occurs for $t \sim 250$ (corresponding to a propagation of 5 cm in the experiment). This induces a fold catastrophe in the Lagrangian manifold. As seen in Fig. 5, there are now either one or three momenta p associated with each position q , which we denote by p_1, p_2 , and p_3 . The latter corresponds to a particle (i.e., wave component) that still propagates outward, while p_1 and p_2 are the momenta of particles propagating inward. As we show below, using standard mathematical analysis, the joint contribution of these particles forms an interference peak, i.e., a caustic in the density profile at the turning point $r = R_c$ (to keep the notation simple we do not write the time dependence of R_c explicitly).

Since each $r > R_c$ can be reached by three different classical trajectories [$q_1(t), q_2(t)$, and $q_3(t)$ in Fig. 5(b)], a trivial extension of the semi-classical approach leading to Eq. (6) yields

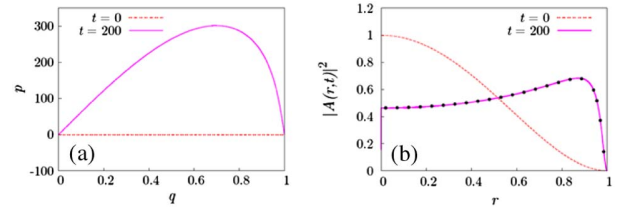


Fig. 4. (a) Classical evolution of the Lagrangian manifold in phase space for short times. (b) Corresponding density profiles—the red dashed line corresponds to the initial density, which is arbitrarily taken to be $A_0(r) = 1 - r^2$; the purple solid line is the semi-classical result Eq. (6); and the black dots are brute-force numerical solutions of Eq. (2); without loss of generality we take $f(r) = (1 + \cos \pi r)/2$.

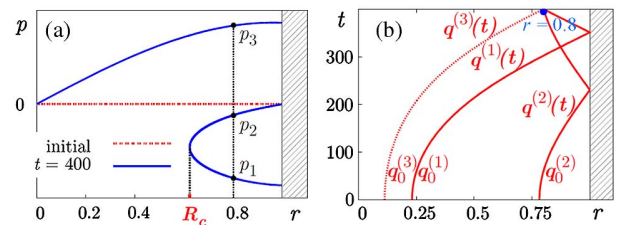


Fig. 5. (a) Classical evolution of the Lagrangian manifold in phase space for $t=400$, corresponding to a propagation distance of 8 cm in the experiment—a caustic appears at $r = R_c(t)$. (b) The three classical trajectories $q^{(j)}(t)$ correspond to the three momenta p_i in (a); $q_1(t)$ and $q_2(t)$ merge exactly for $r = R_c(t)$.

$$\begin{aligned}\psi(r, t) &= \sum_{b \in \{1,2,3\}} \psi^{(b)}(r, t) \\ &= \sum_{b \in \{1,2,3\}} e^{i\mu_b \pi/2} A_0(q^{(b)}(r, t)) \left| \frac{\partial q_0^{(b)}}{\partial q} \right|^{1/2} e^{iS(q^{(b)}(r, t))}, \quad (7)\end{aligned}$$

where $q_0^{(b)} = q_b(t=0)$, the μ_b 's are Maslov indices [$\mu_3 = 0$ as in Eq. (6), and $(\mu_1, \mu_2) = (2, 1)$], and $\psi^{(1)}$ and $\psi^{(2)}$ are zero for $r < R_c$. The intensity profile obtained from this crude semi-classical approximation is depicted in Fig. 6(a), for the same parameters and time as in Fig. 5. Also shown is the intensity profile calculated by numerical integration of Eq. (2). Figure 6(a) shows that near the caustic ($r = R_c$) approximation Eq. (7) diverges—the two classical trajectories $q_1(t)$ and $q_2(t)$ coincide, and the stationary phase method, which is at the heart of the semi-classical approximation, must be refined, since the factors $\partial q_0^{(b)}/\partial q$ in Eq. (7) diverge for $b = 1, 2$. Yet, since there are no caustics in momentum space, one may obtain a better solution in the vicinity of the caustic by Fourier-transforming the wave function at an earlier time, before the caustic forms, evolving the Fourier components in time, and finally Fourier-transforming back to real space. The last step must be performed with care because of the presence of two nearby saddle points in the integral (corresponding to the classical momenta p_1 and p_2). The result for $\psi^{(1)} + \psi^{(2)}$ involves the Airy function Ai [the contribution of $\psi^{(3)}$ in Eq. (7) is not modified]:

$$\begin{aligned}\psi^{(1)}(r, t) + \psi^{(2)}(r, t) \\ = \frac{\sqrt{2\pi}}{l} A_0(\tilde{q}) \left| \frac{\partial q_0^{(1,2)}}{\partial p} \right|_{R_c}^{1/2} Ai\left(\frac{R_c - r}{l}\right) e^{i(S_c + k_c(r - R_c)) + \frac{3\pi}{4}i}, \quad (8)\end{aligned}$$

where $\tilde{q} = q_0^{(1)}(R_c, t) = q_0^{(2)}(R_c, t)$ is the initial position leading to $q_{1,2}(t) = R_c$, and the quantities l and S_c are defined by

$$l^3 = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 q}{\partial p^2} \Big|_{R_c}; \quad S_c = S(\tilde{q}, t). \quad (9)$$

This result, combining an isolated classical path and two others forming a caustic, is identical to rainbow scattering from a Lennard–Jones-type central potential [22]. The corresponding intensity profile depicted in Fig. 6(b) validates the interpretation of the experimental and numerical results in terms of a caustic, with a typical Airy-function form. Note, however, that the divergence of Eq. (7) at $r = R_c$ has been eliminated in Eq. (8) at the price of loss of accuracy away from the caustic, in the region $0.8 \lesssim r < 1$ [cf. Fig. 6(b)]. Yet the discrepancy can be resolved by more uniform treatment, following [23]. The final result is

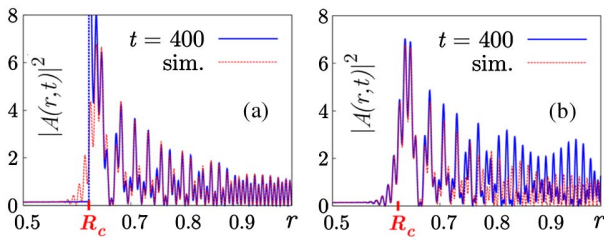


Fig. 6. (a) Numerical $A(r, t)$ (red dashed line) and crude semi-classical result Eq. (7) (blue solid line) for $t = 400$ ($z = 8$ cm); the semi-classical result diverges at the caustic. (b) Same as (a), for the semi-classical result Eq. (8), supplemented with the contribution $\psi^{(3)}$ from Eq. (7).

$$\begin{aligned}\psi^{(1)}(r, t) + \psi^{(2)}(r, t) &= \sqrt{\pi} e^{iS_c + i\pi} \\ &\times \left[\left(A_0(q_0^{(1)}(r, t)) \left| \frac{\partial q_0^{(1)}}{\partial q} \right|^{\frac{1}{2}} + A_0(q_0^{(2)}(r, t)) \left| \frac{\partial q_0^{(2)}}{\partial q} \right|^{\frac{1}{2}} \right) \zeta^{\frac{1}{3}} Ai(\zeta) \right. \\ &\left. + i \left(A_0(q_0^{(2)}(r, t)) \left| \frac{\partial q_0^{(2)}}{\partial q} \right|^{\frac{1}{2}} - A_0(q_0^{(1)}(r, t)) \left| \frac{\partial q_0^{(1)}}{\partial q} \right|^{\frac{1}{2}} \right) \zeta^{-\frac{1}{3}} Ai'(\zeta) \right]; \\ \zeta = \zeta(r, t) &= \left[\frac{3}{4} (S(q_0^{(2)}(r, t), t) - S(q_0^{(1)}(r, t), t)) \right]^{2/3}; \\ S_c = S_c(r, t) &= \frac{S(q_0^{(1)}(r, t), t) + S(q_0^{(2)}(r, t), t)}{2}. \quad (10)\end{aligned}$$

Figure 7(a) compares the results of this uniform approximation with a numerical solution of Eq. (2). Figure 7(b) is a sketch of the semi-classical trajectories and the position of the (time-dependent) caustic obtained in this approximation. Considering all the approximations made, and in particular the impossibility of measuring the exact shape of the static potential, it is quite remarkable that the position of the ring in the experimental data is in excellent agreement with the prediction of the semi-classical model, for similar laser powers and propagation lengths.

In the hydrodynamic representation of the nonlinear wave equation, the Madelung transformation [24] maps Eq. (1) to coupled equations for the amplitude and phase, which have the form of continuity and Euler equations for an equivalent “photon fluid.” This approach has been used successfully to model dispersive shock waves that appear around laser beams that propagate in isotropic self-defocusing media [25]. Similarly, when the nonlinear term in Eq. (1) is predominant, the caustics can be interpreted as shock waves in the photon fluid. The increasing curvature of the reflected wave fronts as a function of z [see Fig. 1(b)] corresponds to increasing velocity of the partial waves as a function of time, leading to steepening of the wave and formation of a shock. We checked numerically and qualitatively that the caustic associated with the fold singularity of the Lagrangian manifold indeed turns into a dispersive shock wave when the nonlinear term is sufficiently large.

Finally, the simple method that we suggest for generating autofocusing, radially symmetric Airy waves has several advantages compared to established methods. Unlike a typical spatial light modulator, it can handle high average powers. Moreover, as the autofocusing distance is power-dependent, the autofocusing element can be combined with a pinhole in a nonlinear switching device, the pinhole position defining the threshold power above which transmission is high. The abrupt autofocusing of the non-Gaussian beam will result in a sharp transition.

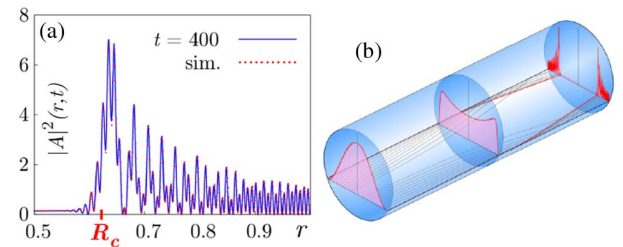


Fig. 7. (a) Numerical $A(r, t)$ (red dashed line) and semi-classical result Eq. (10) (blue solid line) for $t = 400$ ($z = 8$ cm). (b) Sketch of semi-classical trajectories (black lines) and the (time-dependent) caustic (red lines) obtained from Eq. (10); the curves show the evolution of $A(r, t)$. See also Supplement 1.

Funding. German-Israeli Foundation for Scientific Research and Development (GIF) (1157-127.14/2011); Israel Science Foundation (ISF) (1309/11).

Acknowledgment. We thank E. Bogomonly and A. Szameit for stimulating discussions.

See [Supplement 1](#) for supporting content.

REFERENCES

1. M. V. Berry and N. L. Balazs, "Nonspreading wave packets," *Am. J. Phys.* **47**, 264 (1979).
2. G. A. Siviloglou and D. N. Christodoulides, "Accelerating finite energy Airy beams," *Opt. Lett.* **32**, 979–981 (2007).
3. G. A. Siviloglou, J. Broky, A. Dogariu, and D. N. Christodoulides, "Observation of accelerating Airy beams," *Phys. Rev. Lett.* **99**, 213901 (2007).
4. J. Baumgartl, M. Mazilu, and K. Dholakia, "Optically mediated particle clearing using Airy wavepackets," *Nat. Photonics* **2**, 675–678 (2008).
5. S. Jia, J. C. Vaughan, and X. Zhuang, "Isotropic three-dimensional superresolution imaging with a self-bending point spread function," *Nat. Photonics* **8**, 302–306 (2014).
6. A. Mathis, F. Courvoisier, L. Froehly, L. Furfaro, M. Jacquot, P. A. Lacourt, and J. M. Dudley, "Micromachining along a curve: femtosecond laser micromachining of curved profiles in diamond and silicon using accelerating beams," *Appl. Phys. Lett.* **101**, 071110 (2012).
7. P. Polynkin, M. Kolesik, J. V. Moloney, G. A. Siviloglou, and D. N. Christodoulides, "Curved plasma channel generation using ultraintense Airy beams," *Science* **324**, 229–232 (2009).
8. A. Chong, W. H. Renninger, D. N. Christodoulides, and F. W. Wise, "Airy-Bessel wave packets as versatile linear light bullets," *Nat. Photonics* **4**, 103–106 (2010).
9. T. Ellenbogen, N. Voloch-Bloch, A. Ganany-Padowicz, and A. Arie, "Nonlinear generation and manipulation of Airy beams," *Nat. Photonics* **3**, 395–398 (2009).
10. I. Kaminer, M. Segev, and D. N. Christodoulides, "Self-accelerating self-trapped optical beams," *Phys. Rev. Lett.* **106**, 213903 (2011).
11. R. Bekenstein and M. Segev, "Self-accelerating optical beams in highly nonlocal nonlinear media," *Opt. Express* **19**, 23706 (2011).
12. E. Greenfield, M. Segev, W. Walasik, and O. Raz, "Accelerating light beams along arbitrary convex trajectories," *Phys. Rev. Lett.* **106**, 213902 (2011).
13. N. Voloch-Bloch, Y. Lereah, Y. Lilach, A. Gover, and A. Arie, "Generation of electron Airy beams," *Nature* **494**, 331–335 (2013).
14. A. Libster-Hershko, I. Epstein, and A. Arie, "Rapidly accelerating Mathieu and Weber surface plasmon beams," *Phys. Rev. Lett.* **113**, 123902 (2014).
15. N. K. Efremidis and D. N. Christodoulides, "Abruptly autofocusing waves," *Opt. Lett.* **35**, 4045–4047 (2010).
16. D. G. Papazoglou, N. K. Efremidis, D. N. Christodoulides, and S. Tzortzakis, "Long-transient effects in lasers with inserted liquid samples," *Opt. Lett.* **36**, 1842–1844 (2011).
17. S. A. Akhmanov, D. P. Krindach, A. P. Sukhorukov, and R. V. Khokhlov, "Nonlinear defocusing of laser beams," *Pis'ma Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **6**, 509 (1967), *JETP Lett.* **6**, 38 (1967).
18. J. P. Gordon, R. C. C. Leite, R. S. Moore, S. P. S. Porto, and J. R. Whinnery, "Long-transient effects in lasers with inserted liquid samples," *J. Appl. Phys.* **36**, 3–8 (1965).
19. A. Minovich, D. N. Neshev, A. Dreischuh, W. Krolikowski, and Y. S. Kivshar, "Experimental reconstruction of nonlocal response of thermal nonlinear optical media," *Opt. Lett.* **32**, 1599–1601 (2007).
20. A. W. Snyder and D. J. Mitchell, "Accessible solitons," *Science* **276**, 1538–1541 (1997).
21. D. Buccoliero, A. S. Desyatnikov, W. Krolikowski, and Y. S. Kivshar, "Laguerre and Hermite soliton clusters in nonlocal nonlinear media," *Phys. Rev. Lett.* **98**, 053901 (2007).
22. M. V. Berry, "Uniform approximation for potential scattering involving a rainbow," *Proc. Phys. Soc.* **89**, 479–490 (1966).
23. C. Chester, B. Friedman, and F. Ursell, "An extension of the method of steepest descents," *Proc. Cambridge Philos. Soc.* **53**, 599–611 (1957).
24. E. Madelung, "Quantum theory in hydrodynamical form," *Z. Phys.* **40**, 322 (1927).
25. W. Wan, S. Jia, and J. W. Fleischer, "Dispersive superfluid-like shock waves in nonlinear optics," *Nat. Phys.* **3**, 46–51 (2006).

Spontaneously formed autofocusing caustics in a confined self-defocusing medium: supplementary material

MICHAEL KARPOV,¹ THIBAUT CONGY,² YONATAN SIVAN,³ VICTOR FLEUROV,¹ NICOLAS PAVLOFF,² AND SHIMSHON BAR-AD^{1,*}

¹Sackler School of Physics and Astronomy, Tel Aviv University, Tel Aviv 69978, Israel

²LPTMS, CNRS and Univ. Paris Sud, 91405 Orsay Cedex, France

³Unit of Electro-Optical Engineering, Ben Gurion University, Beer Sheva 84105, Israel

*Corresponding author: shimshon@post.tau.ac.il

Published 14 December 2015

This document provides supplementary information to “Spontaneously formed autofocusing caustics in a confined self-defocusing medium,” <http://dx.doi.org/10.1364/optica.2.001053>. The supplementary material comprises data from additional numerical simulations, to support our claims, for which there is insufficient space in the main body of the article, as well as a high-resolution version of a figure which could not be included in the article due to lack of space. We also explain the translation from physical units to the dimensionless model. © 2015 Optical Society of America

<http://dx.doi.org/10.1364/optica.2.001053.s001>

We first present data from computer simulations that show the effects of linear absorption and different static, repulsive potentials. Figure S1 shows the same data presented in Fig. 2 of the article with better definition. Figure S1(a) is a contour plot of the light intensity in the channel as a function of the radial and z coordinates, Fig. S1(b) is a plot of the intensity as a function of the radial coordinate at the exit of the channel, and Fig. S1(c) shows, in a contour plot similar to Fig. S1(a), the propagation of light in free space, behind the exit plane of the nonlinear channel, and in particular the self-generated, self-accelerating, autofocusing ring. The data presented in Fig. S1 were calculated assuming the linear absorption is negligible (although it is an essential ingredient of the thermal nonlinearity that we discuss). Figure S2 shows, in a similar representation, data obtained from an identical simulation, except for adding a (realistic) absorption coefficient of 0.04 cm^{-1} , and a matched, z -dependent, thermally-induced static potential (namely reduced heating as a function of the z coordinate). It can be seen that the behavior remains essentially the same, except that the ring is weaker and autofocusing is slightly slower. Figure S3 shows data obtained without absorption (as in Fig. S1), but with the semi-circular static potential changed to a Gaussian form of similar width and with the same maximum value (at the center of the channel). In this case the ring starts forming earlier, as the beam undergoes self-defocusing, but the reflective boundary is essential for transforming it into an autofocusing wave. The “ringing” which is typical of Airy beams is evident. Self-acceleration is not as obvious as in Fig. S1 and Fig. S2, but can still be observed upon close examination of Fig. S3(c). Finally, Fig. S4 is a high-resolution version of Fig. 7(b) in the article, and shows the semi-classical

trajectories and the position of the (time dependent) caustic obtained from Eq. (10) in the article.

We now explain in more detail the translation from physical units to the dimensionless semi-classical model. We first note that the mass and time, which are calculated from the expressions given below Eq. (2) of the article, are both functions of $U_{r=0}$, the potential at the center of the waveguide. We estimate $U_{r=0}$ from the rate of expansion of the outgoing beam, *i.e.* the part which undergoes self-defocusing and is not reflected by the boundary. Figure 3(b) is an image of the fluorescence at the output plane of the channel for a 3.5-Watt input beam and a 27% duty cycle (note that this is about the same average power as in Fig. 3(a) – the radius of the ring is indeed almost identical); Figure 3(c) is a fluorescence image that shows how the ring in Fig. 3(b) focuses to a point after propagating ~ 6 cm in free space – the spot at the center of Fig. 3(c) is the auto-focused ring, while the part which undergoes self-defocusing and is not reflected by the boundary is seen as a pale halo in Fig. 3(c). The expansion rate of this halo allows us to calculate the radius of curvature of the phase fronts of the defocusing component at the channel exit plane, and this curvature, in turn, allows us to calculate the refractive index contrast in the channel, Δn . From the expression at the center of the LHS column in page 2 of the article we finally obtain $U_{r=0}=50 \text{ cm}^{-1}$, the mass m , and the conversion factor from z to t .

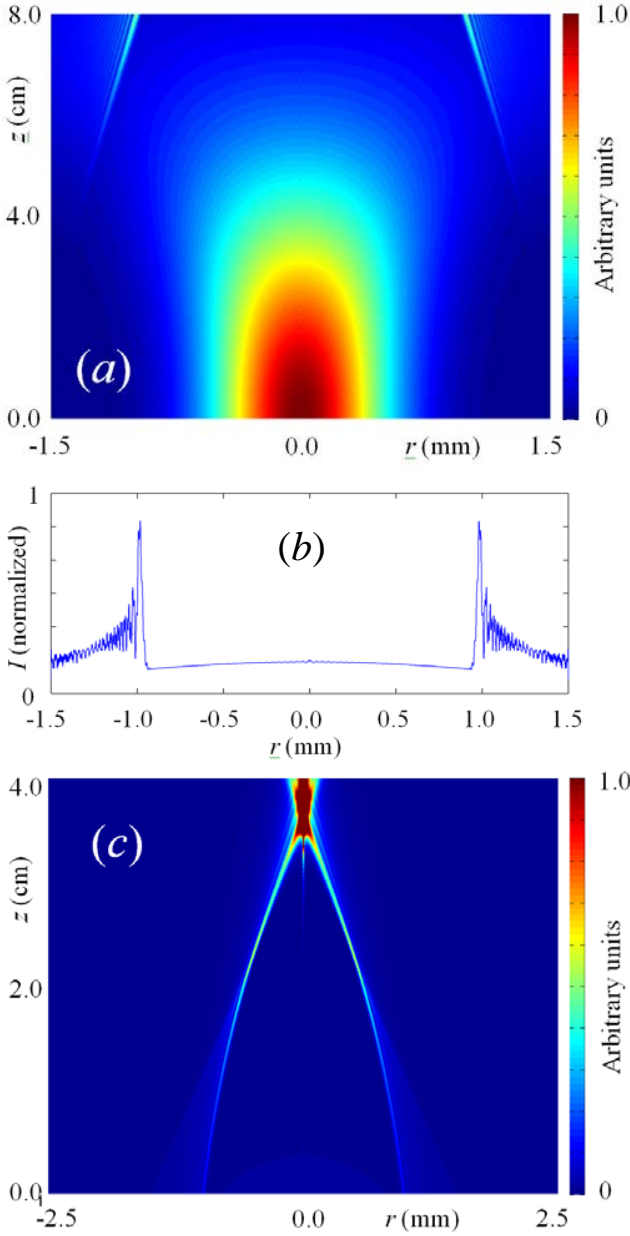


Fig. S1. A numerical simulation of beam propagation through and behind 3 mm diameter, 8-cm long channel, with reflective walls, filled with a defocusing nonlinear medium. The input beam is a 1-mm diameter Gaussian beam, and the other parameters are described in the body of the article and the caption of Fig. 2 therein; (a) is a contour plot of the beam intensity as a function of the radial coordinate and the propagation distance inside the channel; (b) is the intensity profile at the output of the channel; (c) shows self-acceleration and focusing to a point of the output beam as it propagates in free space behind the channel.

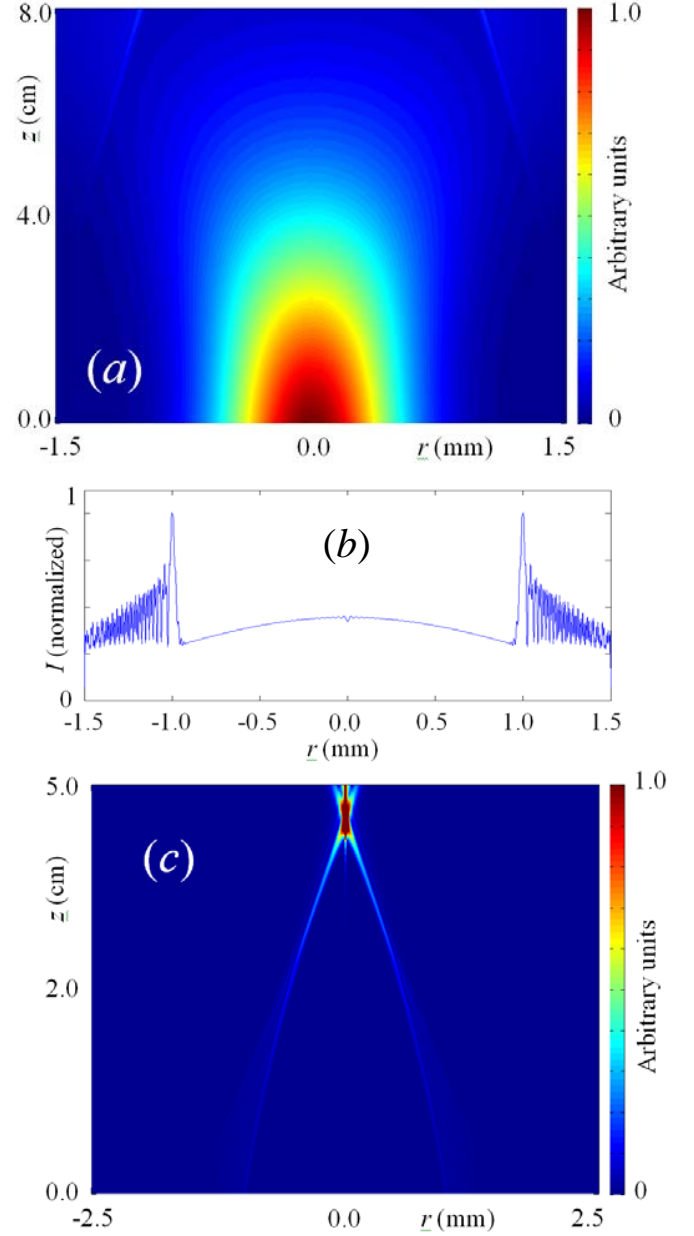


Fig. S2. A numerical simulation of beam propagation through and behind the channel, with the same parameters as in the simulation shown in Figure S1, except for the addition of an absorption coefficient of 0.04 cm^{-1} , and a matched, z -dependent, thermally-induced static potential (namely reduced heating as a function of the z coordinate); (a) is a contour plot of the beam intensity as a function of the radial coordinate and the propagation distance inside the channel; (b) is the intensity profile at the output of the channel; (c) shows self-acceleration and focusing to a point of the output beam as it propagates in free space behind the channel.

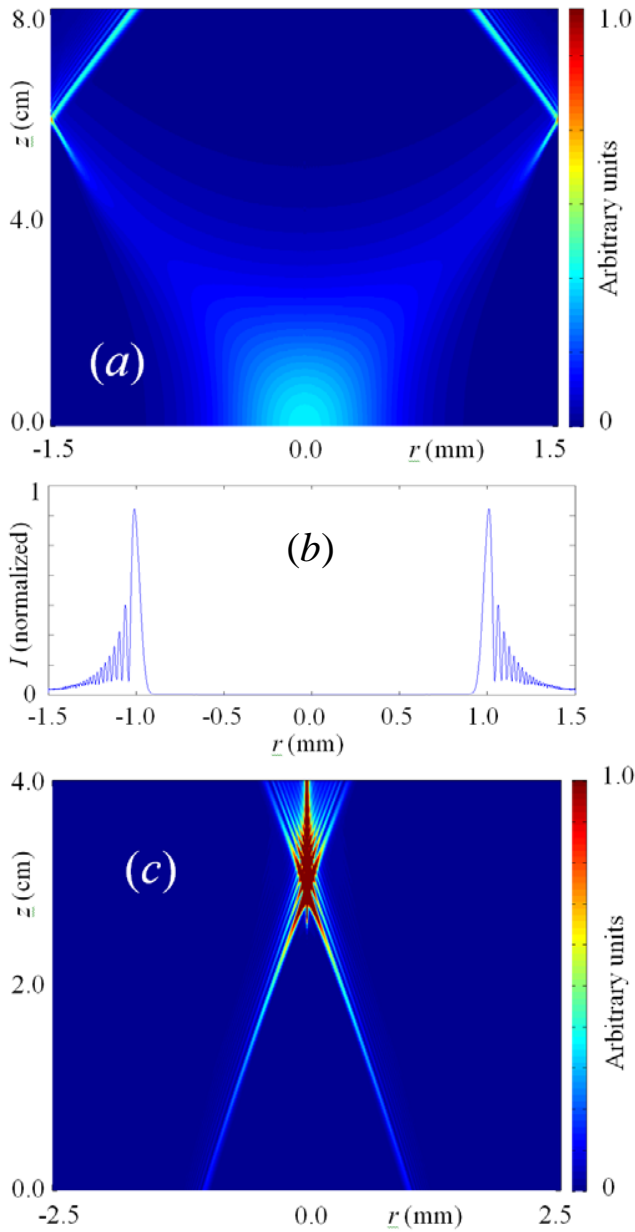


Fig. S3. A numerical simulation of beam propagation through and behind the channel, with the same parameters as in the simulation shown in Figure S1, except for substitution of the semi-circular static potential with a Gaussian form of similar width and with the same maximum value (at the center of the channel); (a) is a contour plot of the beam intensity as a function of the radial coordinate and the propagation distance inside the channel; (b) is the intensity profile at the output of the channel; (c) shows self-acceleration and focusing to a point of the output beam as it propagates in free space behind the channel.

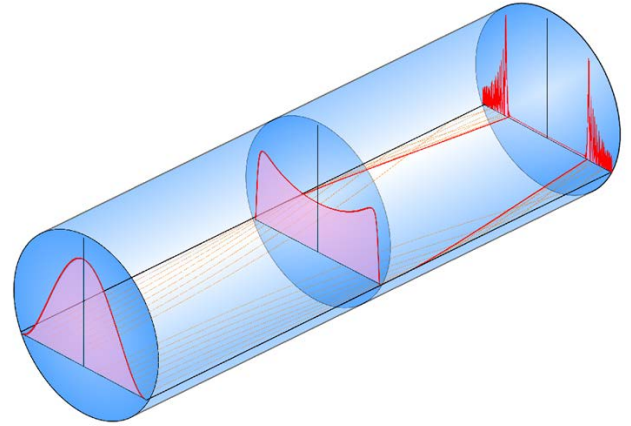


Fig. S4. A sketch of some semi-classical trajectories obtained from Eq. (10) in the article, plotted as orange lines, and the (time dependent) location of the caustic, plotted as a red line; the curves show the evolution of the amplitude of the wave.

Bibliographie

1. M. H. ANDERSON, J. R. ENSHER, M. R. MATTHEWS, C. E. WIEMAN et E. A. CORNELL, “Observation of Bose-Einstein Condensation in a Dilute Atomic Vapor”, *Science* **269**, 198–201 (1995).
2. J. F. ALLEN et A. D. MISENER, “Flow of Liquid Helium II”, *Nature* **141**, 75–75 (1938).
3. P. KAPITZA, “Viscosity of Liquid Helium below the λ -Point”, *Nature* **141**, 74–74 (1938).
4. G. LERARIO, A. FIERAMOSCA, F. BARACHATI, D. BALLARINI, K. S. DASKALAKIS, L. DOMINICI, M. DE GIORGI, S. A. MAIER, G. GIGLI, S. KÉNA-COHEN et D. SANVITTO, “Room-temperature superfluidity in a polariton condensate”, *Nat. Phys. advance online publication* (2017) [10.1038/nphys4147](https://doi.org/10.1038/nphys4147).
5. A. LEITNER, *Superfluid Liquid Helium (Isotope 4)*, 1963.
6. K. B. DAVIS, M. O. MEWES, M. R. ANDREWS, N. J. van DRUTEN, D. S. DURFEE, D. M. KURN et W. KETTERLE, “Bose-Einstein Condensation in a Gas of Sodium Atoms”, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 3969–3973 (1995).
7. C. C. BRADLEY, C. A. SACKETT, J. J. TOLLETT et R. G. HULET, “Evidence of Bose-Einstein Condensation in an Atomic Gas with Attractive Interactions”, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 1687–1690 (1995).
8. C. C. BRADLEY, C. A. SACKETT et R. G. HULET, “Bose-Einstein Condensation of Lithium : Observation of Limited Condensate Number”, *Phys. Rev. Lett.* **78**, 985–989 (1997).
9. H. F. HESS, G. P. KOCHANSKI, J. M. DOYLE, N. MASUHARA, D. KLEPPNER et T. J. GREYTAK, “Magnetic trapping of spin-polarized atomic hydrogen”, *Phys. Rev. Lett.* **59**, 672–675 (1987).
10. W. WAN, S. JIA et J. W. FLEISCHER, “Dispersive superfluid-like shock waves in nonlinear optics”, *Nat. Phys.* **3**, 46–51 (2007).
11. M. A. HOEFER, M. J. ABLOWITZ, I. CODDINGTON, E. A. CORNELL, P. ENGELS et V. SCHWEIKHARD, “Dispersive and classical shock waves in Bose-Einstein condensates and gas dynamics”, *Phys. Rev. A* **74**, 023623 (2006).
12. G. B. WHITHAM, *Linear and Nonlinear Waves*, 1^{re} éd. (Wiley-Interscience, 1999).
13. K. W. MADISON, F. CHEVY, W. WOHLLEBEN et J. DALIBARD, “Vortex Formation in a Stirred Bose-Einstein Condensate”, *Phys. Rev. Lett.* **84**, 806–809 (2000).
14. E. P. GROSS, “Structure of a quantized vortex in boson systems”, *Il Nuovo Cimento* **20**, 454–477 (1961).
15. L. P. PITAEVSKII, “Vortex lines in an imperfect Bose gas”, *JETP* **13**, 451 (1961).

16. V. E. ZAKHAROV, “Stability of periodic waves of finite amplitude on the surface of a deep fluid”, *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* **9**, 190–194 (1972).
17. H. HASIMOTO et H. ONO, “Nonlinear Modulation of Gravity Waves”, *J. Phys. Soc. Jpn.* **33**, 805–811 (1972).
18. A. DAVEY, “The propagation of a weak nonlinear wave”, *J. Fluid Mech.* **53**, 769 (1972).
19. P. L. KELLEY, “Self-Focusing of Optical Beams”, *Phys. Rev. Lett.* **15**, 1005–1008 (1965).
20. V. I. TALANOV, “Self Focusing of Wave Beams in Nonlinear Media”, *JETP Lett.* **2**, 138 (1965).
21. S. BURGER, K. BONGS, S. DETTMER, W. ERTMER, K. SENGSTOCK, A. SANPERA, G. V. SHLYAPNIKOV et M. LEWENSTEIN, “Dark Solitons in Bose-Einstein Condensates”, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 5198–5201 (1999).
22. J. DENSCHLAG, J. E. SIMSARIAN, D. L. FEDER, C. W. CLARK, L. A. COLLINS, J. CUBIZOLLES, L. DENG, E. W. HAGLEY, K. HELMERSON, W. P. REINHARDT, S. L. ROLSTON, B. I. SCHNEIDER et W. D. PHILLIPS, “Generating Solitons by Phase Engineering of a Bose-Einstein Condensate”, *Science* **287**, 97–101 (2000).
23. R. MEPELINK, S. B. KOLLER, J. M. VOGELS, P. van der STRATEN, E. D. van OOIJEN, N. R. HECKENBERG, H. RUBINSZTEIN-DUNLOP, S. A. HAINE et M. J. DAVIS, “Observation of shock waves in a large Bose-Einstein condensate”, *Phys. Rev. A* **80**, 043606 (2009).
24. M. R. MATTHEWS, B. P. ANDERSON, P. C. HALJAN, D. S. HALL, C. E. WIEMAN et E. A. CORNELL, “Vortices in a Bose-Einstein Condensate”, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 2498–2501 (1999).
25. V. E. ZAKHAROV, “Turbulence in Integrable Systems”, *Stud. Appl. Math.* **122**, 219–234 (2009).
26. D. S. AGAFONTSEV et V. E. ZAKHAROV, “Integrable turbulence and formation of rogue waves”, *Nonlinearity* **28**, 2791 (2015).
27. S. RANDOUX, F. GUSTAVE, P. SURET et G. EL, “Optical Random Riemann Waves in Integrable Turbulence”, *Phys. Rev. Lett.* **118**, 233901 (2017).
28. J. BOUSSINESQ, *Essai sur la théorie des eaux courantes* (Imprimerie nationale, Paris, 1877).
29. D. J. KORTEWEG et G. de VRIES, “On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and on a new type of long stationary waves”, *Philosophical Magazine Series 5* **39**, 422–443 (1895).
30. V. F. ZAKHAROV et A. B. SHABAT, “Exact Theory of Two-dimensional Self-focusing and One-dimensional Self-modulation of Wave in Nonlinear Media”, *JETP* **34**, 62 (1972).
31. C. J. MYATT, E. A. BURT, R. W. GHRIST, E. A. CORNELL et C. E. WIEMAN, “Production of Two Overlapping Bose-Einstein Condensates by Sympathetic Cooling”, *Phys. Rev. Lett.* **78**, 586–589 (1997).
32. D. M. STAMPER-KURN, M. R. ANDREWS, A. P. CHIKKATUR, S. INOUE, H.-J. MIESNER, J. STENGER et W. KETTERLE, “Optical Confinement of a Bose-Einstein Condensate”, *Phys. Rev. Lett.* **80**, 2027–2030 (1998).

33. T.-L. HO et V. B. SHENOY, “Binary Mixtures of Bose Condensates of Alkali Atoms”, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 3276–3279 (1996).
34. M. R. MATTHEWS, B. P. ANDERSON, P. C. HALJAN, D. S. HALL, M. J. HOLLAND, J. E. WILLIAMS, C. E. WIEMAN et E. A. CORNELL, “Watching a Superfluid Untwist Itself : Recurrence of Rabi Oscillations in a Bose-Einstein Condensate”, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 3358–3361 (1999).
35. Y.-J. LIN, K. JIMÉNEZ-GARCÍA et I. B. SPIELMAN, “Spin-orbit-coupled Bose-Einstein condensates”, *Nature* **471**, 83–86 (2011).
36. T. BUSCH, J. I. CIRAC, V. M. PÉREZ-GARCÍA et P. ZOLLER, “Stability and collective excitations of a two-component Bose-Einstein condensed gas : A moment approach”, *Phys. Rev. A* **56**, 2978–2983 (1997).
37. H.-J. MIESNER, D. M. STAMPER-KURN, J. STENGER, S. INOUE, A. P. CHIKKATUR et W. KETTERLE, “Observation of Metastable States in Spinor Bose-Einstein Condensates”, *Phys. Rev. Lett.* **82**, 2228–2231 (1999).
38. D. S. HALL, M. R. MATTHEWS, J. R. ENSHER, C. E. WIEMAN et E. A. CORNELL, “Dynamics of Component Separation in a Binary Mixture of Bose-Einstein Condensates”, *Phys. Rev. Lett.* **81**, 1539–1542 (1998).
39. P. MADDALONI, M. MODUGNO, C. FORT, F. MINARDI et M. INGUSCIO, “Collective Oscillations of Two Colliding Bose-Einstein Condensates”, *Phys. Rev. Lett.* **85**, 2413–2417 (2000).
40. G. DELANNOY, S. G. MURDOCH, V. BOYER, V. JOSSE, P. BOUYER et A. ASPECT, “Understanding the production of dual Bose-Einstein condensation with sympathetic cooling”, *Phys. Rev. A* **63**, 051602 (2001).
41. V. SCHWEIKHARD, I. CODDINGTON, P. ENGELS, S. TUNG et a. E. A. CORNELL, “Vortex-Lattice Dynamics in Rotating Spinor Bose-Einstein Condensates”, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 210403 (2004).
42. K. M. MERTES, J. W. MERRILL, R. CARRETERO-GONZÁLEZ, D. J. FRANTZESKAKIS, P. G. KEVREKIDIS et D. S. HALL, “Nonequilibrium Dynamics and Superfluid Ring Excitations in Binary Bose-Einstein Condensates”, *Phys. Rev. Lett.* **99**, 190402 (2007).
43. R. P. ANDERSON, C. TICKNOR, A. I. SIDOROV et B. V. HALL, “Spatially inhomogeneous phase evolution of a two-component Bose-Einstein condensate”, *Phys. Rev. A* **80**, 023603 (2009).
44. S. TOJO, Y. TAGUCHI, Y. MASUYAMA, T. HAYASHI, H. SAITO et T. HIRANO, “Controlling phase separation of binary Bose-Einstein condensates via mixed-spin-channel Feshbach resonance”, *Phys. Rev. A* **82**, 033609 (2010).
45. C. HAMNER, J. J. CHANG, P. ENGELS et M. A. HOEFER, “Generation of Dark-Bright Soliton Trains in Superfluid-Superfluid Counterflow”, *Phys. Rev. Lett.* **106**, 065302 (2011).
46. S. B. PAPP, J. M. PINO et C. E. WIEMAN, “Tunable Miscibility in a Dual-Species Bose-Einstein Condensate”, *Phys. Rev. Lett.* **101**, 040402 (2008).
47. S. SUGAWA, R. YAMAZAKI, S. TAIE et Y. TAKAHASHI, “Bose-Einstein condensate in gases of rare atomic species”, *Phys. Rev. A* **84**, 011610 (2011).

48. G. FERRARI, M. INGUSCIO, W. JASTRZEBSKI, G. MODUGNO, G. ROATI et A. SIMONI, “Collisional Properties of Ultracold K-Rb Mixtures”, *Phys. Rev. Lett.* **89**, 053202 (2002).
49. G. MODUGNO, M. MODUGNO, F. RIBOLI, G. ROATI et M. INGUSCIO, “Two Atomic Species Superfluid”, *Phys. Rev. Lett.* **89**, 190404 (2002).
50. G. THALHAMMER, G. BARONTINI, L. DE SARLO, J. CATANI, F. MINARDI et M. INGUSCIO, “Double Species Bose-Einstein Condensate with Tunable Interspecies Interactions”, *Phys. Rev. Lett.* **100**, 210402 (2008).
51. D. J. MCCARRON, H. W. CHO, D. L. JENKIN, M. P. KÖPPINGER et S. L. CORNISH, “Dual-species Bose-Einstein condensate of ^{87}Rb and ^{133}Cs ”, *Phys. Rev. A* **84**, 011603 (2011).
52. A. D. LERCHER, T. TAKEKOSHI, M. DEBATIN, B. SCHUSTER, R. RAMESHAN, F. FERLAINO, R. GRIMM et H.-C. NÄGERL, “Production of a dual-species Bose-Einstein condensate of Rb and Cs atoms”, *Eur. Phys. J. D* **65**, 3–9 (2011).
53. B. PASQUIOU, A. BAYERLE, S. M. TZANOVA, S. STELLMER, J. SZCZEPKOWSKI, M. PARIGGER, R. GRIMM et F. SCHRECK, “Quantum degenerate mixtures of strontium and rubidium atoms”, *Phys. Rev. A* **88**, 023601 (2013).
54. L. WACKER, N. B. JØRGENSEN, D. BIRKMOSE, R. HORCHANI, W. ERTMER, C. KLEMP, N. WINTER, J. SHERSON et J. J. ARLT, “Tunable dual-species Bose-Einstein condensates of ^{39}K and ^{87}Rb ”, *Phys. Rev. A* **92**, 053602 (2015).
55. F. WANG, X. LI, D. XIONG et D. WANG, “A double species ^{23}Na and ^{87}Rb Bose-Einstein condensate with tunable miscibility via an interspecies Feshbach resonance”, *J. Phys. B: At., Mol. Opt. Phys.* **49**, 015302 (2016).
56. I. FERRIER-BARBUT, M. DELEHAYE, S. LAURENT, A. T. GRIER, M. PIERCE, B. S. REM, F. CHEVY et C. SALOMON, “A mixture of Bose and Fermi superfluids”, *Science* **345**, 1035–1038 (2014).
57. G. AGRAWAL, *Nonlinear Fiber Optics*, 5^e éd. (Elsevier Science Publishing, 2013).
58. J. STENGER, S. INOUE, D. M. STAMPER-KURN, H.-J. MIESNER, A. P. CHIKKATUR et W. KETTERLE, “Spin domains in ground-state Bose-Einstein condensates”, *Nature* **396**, 345–348 (1998).
59. Z. DUTTON, “Observation of Quantum Shock Waves Created with Ultra-Compressed Slow Light Pulses in a Bose-Einstein Condensate”, *Science* **293**, 663–668 (2001).
60. N. S. GINSBERG, J. BRAND et L. V. HAU, “Observation of Hybrid Soliton Vortex-Ring Structures in Bose-Einstein Condensates”, *Phys. Rev. Lett.* **94**, 040403 (2005).
61. L. E. SADLER, J. M. HIGBIE, S. R. LESLIE, M. VENGALATTORE et D. M. STAMPER-KURN, “Spontaneous symmetry breaking in a quenched ferromagnetic spinor Bose-Einstein condensate”, *Nature* **443**, 312–315 (2006).
62. M.-S. CHANG, Q. QIN, W. ZHANG, L. YOU et M. S. CHAPMAN, “Coherent spinor dynamics in a spin-1 Bose condensate”, *Nat. Phys.* **1**, 111–116 (2005).
63. T. ZIBOLD, E. NICKLAS, C. GROSS et M. K. OBERTHALER, “Classical Bifurcation at the Transition from Rabi to Josephson Dynamics”, *Phys. Rev. Lett.* **105**, 204101 (2010).
64. S. BEATTIE, S. MOULDER, R. J. FLETCHER et Z. HADZIBABIC, “Persistent Currents in Spinor Condensates”, *Phys. Rev. Lett.* **110**, 025301 (2013).

65. Y.-J. LIN, R. COMPTON, A. PERRY, W. PHILLIPS, J. PORTO et I. SPIELMAN, “Bose-Einstein Condensate in a Uniform Light-Induced Vector Potential”, *Phys. Rev. Lett.* **102**, 130401 (2009).
66. Z. FU, P. WANG, S. CHAI, L. HUANG et J. ZHANG, “Bose-Einstein condensate in a light-induced vector gauge potential using 1064-nm optical-dipole-trap lasers”, *Phys. Rev. A* **84**, 043609 (2011).
67. M. W. RAY, E. RUOKOKOSKI, S. KANDEL, M. MÖTTÖNEN et D. S. HALL, “Observation of Dirac monopoles in a synthetic magnetic field”, *Nature* **505**, 657–660 (2014).
68. J.-Y. ZHANG, S.-C. JI, Z. CHEN, L. ZHANG, Z.-D. DU, B. YAN, G.-S. PAN, B. ZHAO, Y.-J. DENG, H. ZHAI, S. CHEN et J.-W. PAN, “Collective Dipole Oscillations of a Spin-Orbit Coupled Bose-Einstein Condensate”, *Phys. Rev. Lett.* **109**, 115301 (2012).
69. S.-C. JI, J.-Y. ZHANG, L. ZHANG, Z.-D. DU, W. ZHENG, Y.-J. DENG, H. ZHAI, S. CHEN et J.-W. PAN, “Experimental determination of the finite-temperature phase diagram of a spin-orbit coupled Bose gas”, *Nat. Phys.* **10**, 314–320 (2014).
70. C. MENOTTI et S. STRINGARI, “Collective oscillations of a one-dimensional trapped Bose-Einstein gas”, *Phys. Rev. A* **66**, 043610 (2002).
71. Y. KAWAGUCHI et M. UEDA, “Spinor Bose-Einstein condensates”, *Phys. Rep.* **520**, 253–381 (2012).
72. D. M. STAMPER-KURN et M. UEDA, “Spinor Bose gases : Symmetries, magnetism, and quantum dynamics”, *Rev. Mod. Phys.* **85**, 1191–1244 (2013).
73. L. P. PITAEVSKII et S. STRINGARI, *Bose-Einstein Condensation and Superfluidity*, 1^{er} éd. (Oxford University Press, 2016), 567 p.
74. M. OLSHANII, “Atomic Scattering in the Presence of an External Confinement and a Gas of Impenetrable Bosons”, *Phys. Rev. Lett.* **81**, 938–941 (1998).
75. S. K. ADHIKARI, “Coupled Bose-Einstein condensate : Collapse for attractive interaction”, *Phys. Rev. A* **63**, 043611 (2001).
76. M. A. CAZALILLA et A. F. HO, “Instabilities in Binary Mixtures of One-Dimensional Quantum Degenerate Gases”, *Phys. Rev. Lett.* **91**, 150403 (2003).
77. B. D. ESRY, C. H. GREENE, J. BURKE James P. et J. L. BOHN, “Hartree-Fock Theory for Double Condensates”, *Phys. Rev. Lett.* **78**, 3594–3597 (1997).
78. C. K. LAW, H. PU, N. P. BIGELOW et J. H. EBERLY, “Stability Signature in Two-Species Dilute Bose-Einstein Condensates”, *Phys. Rev. Lett.* **79**, 3105–3108 (1997).
79. P. AO et S. T. CHUI, “Binary Bose-Einstein condensate mixtures in weakly and strongly segregated phases”, *Phys. Rev. A* **58**, 4836–4840 (1998).
80. H. PU et N. P. BIGELOW, “Properties of Two-Species Bose Condensates”, *Phys. Rev. Lett.* **80**, 1130–1133 (1998).
81. M. TRIPPENBACH, K. GÓRAL, K. RZAZEWSKI, B. MALOMED et Y. B. BAND, “Structure of binary Bose-Einstein condensates”, *J. Phys. B: At., Mol. Opt. Phys.* **33**, 4017 (2000).
82. S. INOUE, M. R. ANDREWS, J. STENGER, H.-J. MIESNER, D. M. STAMPER-KURN et W. KETTERLE, “Observation of Feshbach resonances in a Bose-Einstein condensate”, *Nature* **392**, 151–154 (1998).

83. C. COHEN-TANNOUDJI, J. DUPONT-ROC et G. GRYNBERG, *Atom-Photon Interactions* (Wiley, 1998).
84. E. A. CORNELL, D. S. HALL, M. R. MATTHEWS et C. E. WIEMAN, “Having It Both Ways : Distinguishable Yet Phase-Coherent Mixtures of Bose-Einstein Condensates”, *J. Low Temp. Phys.* **113**, 151–165 (1998).
85. M. R. MATTHEWS, D. S. HALL, D. S. JIN, J. R. ENSHER, C. E. WIEMAN, E. A. CORNELL, F. DALFOVO, C. MINNITI et S. STRINGARI, “Dynamical Response of a Bose-Einstein Condensate to a Discontinuous Change in Internal State”, *Phys. Rev. Lett.* **81**, 243–247 (1998).
86. M. ALBIEZ, R. GATI, J. FÖLLING, S. HUNSMANN, M. CRISTIANI et M. K. OBERTHALER, “Direct Observation of Tunneling and Nonlinear Self-Trapping in a Single Bosonic Josephson Junction”, *Phys. Rev. Lett.* **95**, 010402 (2005).
87. S. LEVY, E. LAHOUD, I. SHOMRONI et J. STEINHAEUER, “The a.c. and d.c. Josephson effects in a Bose-Einstein condensate”, *Nature* **449**, 579–583 (2007).
88. L. RADZIHOVSKY et V. GURARIE, “Relation between ac Josephson effect and double-well Bose-Einstein-condensate oscillations”, *Phys. Rev. A* **81**, 063609 (2010).
89. P. EMPLIT, J. P. HAMAIDE, F. REYNAUD, C. FROEHLI et A. BARTHELEMY, “Picosecond steps and dark pulses through nonlinear single mode fibers”, *Opt. Commun.* **62**, 374–379 (1987).
90. D. J. FRANTZESKAKIS, “Dark solitons in atomic Bose-Einstein condensates : from theory to experiments”, *J. Phys. A: Math. Theor.* **43**, 213001 (2010).
91. C. BECKER, S. STELLMER, P. SOLTAN-PANAHI, S. DÖRSCHER, M. BAUMERT, E.-M. RICHTER, J. KRONJÄGER, K. BONGS et K. SENGSTOCK, “Oscillations and interactions of dark and dark-bright solitons in Bose-Einstein condensates”, *Nat. Phys.* **4**, 496–501 (2008).
92. B. P. ANDERSON, P. C. HALJAN, C. A. REGAL, D. L. FEDER, L. A. COLLINS, C. W. CLARK et E. A. CORNELL, “Watching Dark Solitons Decay into Vortex Rings in a Bose-Einstein Condensate”, *Phys. Rev. Lett.* **86**, 2926–2929 (2001).
93. A. M. KAMCHATNOV et L. P. PITAEVSKII, “Stabilization of Solitons Generated by a Supersonic Flow of Bose-Einstein Condensate Past an Obstacle”, *Phys. Rev. Lett.* **100**, 160402 (2008).
94. J. BRAND et W. P. REINHARDT, “Solitonic vortices and the fundamental modes of the “snake instability” : Possibility of observation in the gaseous Bose-Einstein condensate”, *Phys. Rev. A* **65**, 043612 (2002).
95. L. LANDAU et E. M. LIFSHITZ, *Course of Theoretical Physics, Volume 6 : Fluid Mechanics*. 2^e éd. (Butterworth-Heinemann, 1987).
96. M. SHALABY et A. C. BARTHELEMY, “Observation of the self-guided propagation of a dark and bright spatial soliton pair in a focusing nonlinear medium”, *IEEE J. Quant. Electron.* **28**, 2736–2741 (1992).
97. T. BUSCH et J. R. ANGLIN, “Dark-Bright Solitons in Inhomogeneous Bose-Einstein Condensates”, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 010401 (2001).
98. S. MIDDELKAMP, J. J. CHANG, C. HAMNER, R. CARRETERO-GONZÁLEZ, P. G. KEVREKIDIS, V. ACHILLEOS, D. J. FRANTZESKAKIS, P. SCHMELCHER et P. ENGELS, “Dynamics of dark-bright solitons in cigar-shaped Bose-Einstein condensates”, *Phys. Lett. A* **375**, 642–646 (2011).

99. C. QU, L. P. PITAEVSKII et S. STRINGARI, “Magnetic Solitons in a Binary Bose-Einstein Condensate”, *Phys. Rev. Lett.* **116**, 160402 (2016).
100. C. QU, M. TYLUTKI, S. STRINGARI et L. P. PITAEVSKII, “Magnetic solitons in Rabi-coupled Bose-Einstein condensates”, *Phys. Rev. A* **95**, 033614 (2017).
101. W. WANG et P. G. KEVREKIDIS, “Two-component dark-bright solitons in three-dimensional atomic Bose-Einstein condensates”, *Phys. Rev. E* **95**, 032201 (2017).
102. S. V. MANAKOV, “On the theory of two-dimensional stationary self-focusing of electromagnetic waves”, *JETP* **38**, 248 (1974).
103. A. M. KAMCHATNOV et V. V. SOKOLOV, “Nonlinear waves in two-component Bose-Einstein condensates : Manakov system and Kowalevski equations”, *Phys. Rev. A* **91**, 043621 (2015).
104. T. BIENAIMÉ, E. FAVA, G. COLZI, C. MORDINI, S. SERAFINI, C. QU, S. STRINGARI, G. LAMPORESI et G. FERRARI, “Spin-dipole oscillation and polarizability of a binary Bose-Einstein condensate near the miscible-immiscible phase transition”, *Phys. Rev. A* **94**, 063652 (2016).
105. A. M. KAMCHATNOV, Y. V. KARTASHOV, P.-É. LARRÉ et N. PAVLOFF, “Nonlinear polarization waves in a two-component Bose-Einstein condensate”, *Phys. Rev. A* **89**, 033618 (2014).
106. E. MADELUNG, “Eine anschauliche Deutung der Gleichung von Schrödinger”, *Die Naturwissenschaften* **14**, 1004–1004 (1926).
107. D. T. SON et M. A. STEPHANOV, “Domain walls of relative phase in two-component Bose-Einstein condensates”, *Phys. Rev. A* **65**, 063621 (2002).
108. E. V. GOLDSTEIN et P. MEYSTRE, “Quasiparticle instabilities in multicomponent atomic condensates”, *Phys. Rev. A* **55**, 2935–2940 (1997).
109. D. V. FIL et S. I. SHEVCHENKO, “Nondissipative drag of superflow in a two-component Bose gas”, *Phys. Rev. A* **72**, 013616 (2005).
110. Y. G. GLADUSH, A. M. KAMCHATNOV, Z. SHI, P. G. KEVREKIDIS, D. J. FRANTZESKAKIS et B. A. MALOMED, “Wave patterns generated by a supersonic moving body in a binary Bose-Einstein condensate”, *Phys. Rev. A* **79**, 033623 (2009).
111. H. FLAYAC, H. TERÇAS, D. D. SOLNYSHKOV et G. MALPUECH, “Superfluidity of spinor Bose-Einstein condensates”, *Phys. Rev. B* **88**, 184503 (2013).
112. N. SUZUKI, H. TAKEUCHI, K. KASAMATSU, M. TSUBOTA et H. SAITO, “Crossover between Kelvin-Helmholtz and counter-superflow instabilities in two-component Bose-Einstein condensates”, *Phys. Rev. A* **82**, 063604 (2010).
113. L. J. LEBLANC, K. JIMÉNEZ-GARCÍA, R. A. WILLIAMS, M. C. BEELER, A. R. PERRY, W. D. PHILLIPS et I. B. SPIELMAN, “Observation of a superfluid Hall effect”, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **109**, 10811–10814 (2012).
114. M. C. BEELER, R. A. WILLIAMS, K. JIMÉNEZ-GARCÍA, L. J. LEBLANC, A. R. PERRY et I. B. SPIELMAN, “The spin Hall effect in a quantum gas”, *Nature* **498**, 201–204 (2013).
115. J.-R. LI, J. LEE, W. HUANG, S. BURCHESKY, B. SHTEYNAS, F. C. TOP, A. O. JAMISON et W. KETTERLE, “A stripe phase with supersolid properties in spin-orbit-coupled Bose-Einstein condensates”, *Nature* **543**, 91–94 (2017).

116. Y. LI, G. I. MARTONE et S. STRINGARI, “Spin-Orbit-Coupled Bose-Einstein Condensates”, in *Annual review of cold atoms and molecules* (World Scientific Pub., 2015), p. 201–250.
117. M. A. KHAMEHCHI, Y. ZHANG, C. HAMNER, T. BUSCH et P. ENGELS, “Measurement of collective excitations in a spin-orbit-coupled Bose-Einstein condensate”, *Phys. Rev. A* **90**, 063624 (2014).
118. S.-C. JI, L. ZHANG, X.-T. XU, Z. WU, Y. DENG, S. CHEN et J.-W. PAN, “Softening of Roton and Phonon Modes in a Bose-Einstein Condensate with Spin-Orbit Coupling”, *Phys. Rev. Lett.* **114**, 105301 (2015).
119. M. KHAMEHCHI, K. HOSSAIN, M. MOSSMAN, Y. ZHANG, T. BUSCH, M. M. FORBES et P. ENGELS, “Negative-Mass Hydrodynamics in a Spin-Orbit-Coupled Bose-Einstein Condensate”, *Phys. Rev. Lett.* **118**, 155301 (2017).
120. H. ZHAI, “Degenerate quantum gases with spin-orbit coupling : a review”, *Rep. Prog. Phys.* **78**, 026001 (2015).
121. Y. V. KARTASHOV, V. V. KONOTOP et D. A. ZEZYULIN, “Bose-Einstein condensates with localized spin-orbit coupling : Soliton complexes and spinor dynamics”, *Phys. Rev. A* **90**, 063621 (2014).
122. P. TOMMASINI, E. J. V. de PASSOS, A. F. R. de TOLEDO PIZA, M. S. HUSSEIN et E. TIMMERMANS, “Bogoliubov theory for mutually coherent condensates”, *Phys. Rev. A* **67**, 023606 (2003).
123. C. P. SEARCH et P. R. BERMAN, “Manipulating the speed of sound in a two-component Bose-Einstein condensate”, *Phys. Rev. A* **63**, 043612 (2001).
124. C. LEE, W. HAI, L. SHI et K. GAO, “Phase-dependent spontaneous spin polarization and bifurcation delay in coupled two-component Bose-Einstein condensates”, *Phys. Rev. A* **69**, 033611 (2004).
125. P. B. BLAKIE, R. J. BALLAGH et C. W. GARDINER, “Dressed states of a two component Bose-Einstein condensate”, *J. Opt. B: Quantum Semiclassical Opt.* **1**, 378–382 (1999).
126. M. ABAD et A. RECATI, “A study of coherently coupled two-component Bose-Einstein condensates”, *Eur. Phys. J. D* **67**, 148 (2013).
127. E. NICKLAS, H. STROBEL, T. ZIBOLD, C. GROSS, B. A. MALOMED, P. G. KEVREKIDIS et M. K. OBERTHALER, “Rabi Flopping Induces Spatial Demixing Dynamics”, *Phys. Rev. Lett.* **107**, 193001 (2011).
128. T. TANIUTI, “Reductive Perturbation Method and Far Fields of Wave Equations”, *Progr. Theoret. Phys. Suppl.* **55**, 1–35 (1974).
129. A. JEFFREY, “Exact and Asymptotic Methods in Nonlinear Wave Theory”, in *Nonlinear waves in solids* (Springer Vienna, 1994), p. 1–50.
130. T. TANIUTI et K. NISHIHARA, *Nonlinear Waves* (Pitman Advanced Publishing Program, 1983).
131. A. C. NEWELL, *Solitons in Mathematics and Physics* (Society for Industrial et Applied Mathematics, 1987).
132. A. M. KAMCHATNOV, *Nonlinear Periodic Waves and Their Modulations : An Introductory Course* (World Scientific Pub., 2000).

133. T. TSUZUKI, “Nonlinear waves in the Pitaevskii-Gross equation”, *J. Low Temp. Phys.* **4**, 441–457 (1971).
134. V. E. ZAKHAROV et E. A. KUZNETSOV, “Multi-scale expansions in the theory of systems integrable by the inverse scattering transform”, *Physica D* **18**, 455–463 (1986).
135. A. M. KAMCHATNOV, Y.-H. KUO, T.-C. LIN, T.-L. HORNG, S.-C. GOU, R. CLIFT, G. A. EL et R. H. J. GRIMSHAW, “Undular bore theory for the Gardner equation”, *Phys. Rev. E* **86**, 036605 (2012).
136. L. D. LANDAU et E. M. LIFSHITZ, *Course of Theoretical Physics, Volume 1 : Mechanics*, 3^e éd. (Butterworth-Heinemann, 1976).
137. V. ZAKHAROV, “Collapse of Langmuir Waves”, *JETP* **35**, 908 (1972).
138. M. PEYRARD et T. DAUXOIS, *Physique des solitons* (EDP Sciences, 2004).
139. T. B. BENJAMIN et J. E. FEIR, “The disintegration of wave trains on deep water Part 1. Theory”, *J. Fluid Mech.* **27**, 417 (1967).
140. V. ZAKHAROV et L. OSTROVSKY, “Modulation instability : The beginning”, *Physica D* **238**, 540–548 (2009).
141. D. J. BENNEY, “A General Theory for Interactions Between Short and Long Waves”, *Stud. Appl. Math.* **56**, 81–94 (1977).
142. R. H. J. GRIMSHAW, “The Modulation of an Internal Gravity-Wave Packet, and the Resonance with the Mean Motion”, *Stud. Appl. Math.* **56**, 241–266 (1977).
143. I. DANAILA, M. A. KHAMEHCHI, V. GOKHROO, P. ENGELS et P. G. KEVREKIDIS, “Vector dark-antidark solitary waves in multicomponent Bose-Einstein condensates”, *Phys. Rev. A* **94**, 053617 (2016).
144. A. M. KOSEVICH, “Bloch oscillations of magnetic solitons as an example of dynamical localization of quasiparticles in a uniform external field (Review)”, *Low Temp. Phys.* **27**, 513–541 (2001).
145. L. D. LANDAU et L. M. LIFSHITZ, “On the theory of the dispersion of magnetic permeability in ferromagnetic bodies.”, *Physik. Zeits. Sowjetunion* **8**, 153–169 (1935).
146. M. LAKSHMANAN, “The fascinating world of the Landau-Lifshitz-Gilbert equation : an overview”, *Philos. Trans. R. Soc. A-Math.* **369**, 1280–1300 (2011).
147. M. J. ABLOWITZ, D. J. KAUP, A. C. NEWELL et H. SEGUR, “The Inverse Scattering Transform-Fourier Analysis for Nonlinear Problems”, *Stud. Appl. Math.* **53**, 249–315 (1974).
148. A. M. KAMCHATNOV, “Periodic nonlinear waves in a uniaxial ferromagnet”, *JETP* **75**, 868 (1992).
149. A. E. BOROVIK, “N-soliton solutions of the nonlinear Landau-Lifshitz equation”, *JETP Lett.* **28**, 581 (1978).
150. A. BOROVIK, S. KLAMA et S. KULINICH, “Integration of the Landau-Lifshitz equation with preferred-axis anisotropy by the method of the inverse scattering problem”, *Physica D* **32**, 107–134 (1988).
151. E. R. TRACY et H. H. CHEN, “Nonlinear self-modulation : An exactly solvable model”, *Phys. Rev. A* **37**, 815–839 (1988).
152. M. ABRAMOWITZ et I. A. STEGUN, *Handbook of Mathematical Functions* (Dover Publications Inc., 1965).

153. S. NOVIKOV, S. MANAKOV, L. PITAEVSKII et V. ZAKHAROV, *Theory of Solitons : The Inverse Scattering Method* (Springer, 1984).
154. G. B. WHITHAM, “Non-Linear Dispersive Waves”, *Proc. R. Soc. A* **283**, 238–261 (1965).
155. G. A. EL, “Resolution of a shock in hyperbolic systems modified by weak dispersion”, *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science* **15**, 037103 (2005).
156. H. LACOMBE, “Courants de densité dans le détroit de Gibraltar”, *La Houille Blanche*, 38–44 (1965).
157. L. V. OVSYANNIKOV, “Two-layer Shallow water model”, *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* **20**, 127–135 (1979).
158. A. GUREVICH et L. PITAEVSKII, “Nonstationary structure of a collisionless shock-wave”, *JETP* **38**, 291–297 (1974).
159. G. EL et M. HOEFER, “Dispersive shock waves and modulation theory”, *Physica D* **333**, 11–65 (2016).
160. J. C. LUKE, “A Perturbation Method for Nonlinear Dispersive Wave Problems”, *Proc. R. Soc. A* **292**, 403–412 (1966).
161. M. J. ABLOWITZ et D. J. BENNEY, “The Evolution of Multi-Phase Modes for Non-linear Dispersive Waves”, *Stud. Appl. Math.* **49**, 225–238 (1970).
162. T. J. BRIDGES, “Breakdown of the Whitham Modulation Theory and the Emergence of Dispersion”, *Stud. Appl. Math.* **135**, 277–294 (2015).
163. A. M. KAMCHATNOV, “On improving the effectiveness of periodic solutions of the NLS and DNLS equations”, *J. Phys. A: Math. Gen.* **23**, 2945–2960 (1990).
164. G. EL, V. GEOGJAEV, A. GUREVICH et A. KRYLOV, “Decay of an initial discontinuity in the defocusing NLS hydrodynamics”, *Physica D* **87**, 186–192 (1995).
165. D. J. KAUP, “A Higher-Order Water-Wave Equation and the Method for Solving It”, *Progr. Theor. Exp. Phys.* **54**, 396–408 (1975).
166. G. A. EL, R. H. J. GRIMSHAW et M. V. PAVLOV, “Integrable Shallow-Water Equations and Undular Bores”, *Stud. Appl. Math.* **106**, 157–186 (2001).
167. M. MIYATA, “Long Internal Waves of Large Amplitude”, in *Nonlinear water waves* (Springer Berlin Heidelberg, 1988), p. 399–406.
168. W. CHOI et R. CAMASSA, “Fully nonlinear internal waves in a two-fluid system”, *J. Fluid Mech.* **396**, 1–36 (1999).
169. J. G. ESLER et J. D. PEARCE, “Dispersive dam-break and lock-exchange flows in a two-layer fluid”, *J. Fluid Mech.* **667**, 555–585 (2011).
170. W. H. PRESS, *Numerical Recipes*, 3^e éd. (Cambridge University Press, 2007).

Titre : Fluctuations non-linéaires dans les gaz quantiques à deux composantes

Mots clés : condensat de Bose-Einstein, excitation non-linéaire, onde de choc dispersive

Résumé : Cette thèse est dédiée à l'étude des fluctuations non-linéaires dans les condensats de Bose-Einstein à deux composantes. On présente dans le premier chapitre la dynamique de champs moyen des condensats à deux composantes et les différents phénomènes typiques associés au degré de liberté spinoriel. Dans ce même chapitre, on montre que la dynamique des excitations se sépare en deux modes distincts : un mode dit de densité correspondant au mouvement global des atomes à l'intérieur du condensat et un mode dit de polarisation correspondant à la dynamique relative entre les deux espèces constituant le condensat. Ce calcul est généralisé dans le deuxième chapitre où l'on montre que le mode de polarisation persiste en présence d'un couplage cohérent entre les deux composantes. En particulier on analyse la stabilité modulationnelle du mode en déterminant, à l'aide d'une analyse multi-échelle, la dynamique des excitations non-linéaires. On montre alors que les excitations de polarisation, au contraire des excitations de densité, souffrent d'une instabilité de Benjamin-Feir.

Cette instabilité est stabilisée aux grandes impulsions par une résonance onde longue – onde courte. Enfin dans le dernier chapitre, on dérive de façon non-perturbative la dynamique de polarisation proche de la limite de Manakov, dynamique qui se révèle être régie par une équation de Landau-Lifshitz sans dissipation. Les équations de Landau-Lifshitz appartiennent à une hiérarchie d'équations intégrables (hiérarchie Ablowitz-Kaup-Newell-Segur) et on étudie les solutions à une phase à l'aide de la méthode d'intégration « finite-gap » ; on détermine notamment à l'aide de cette méthode un nouveau type de soliton pour les condensats à deux composantes. Finalement, profitant de l'intégrabilité du système, on résout le problème de Riemann à l'aide de la théorie de modulation de Whitham et on montre que les condensats à deux composantes peuvent propager des ondes de raréfaction ainsi que des ondes de choc dispersives ; on décrit notamment la modulation de ces ondes de choc par la propagation d'ondes simples et d'ondes de contact d'invariants de Riemann.

Title : Nonlinear fluctuations in two-component quantum gases

Keywords : two-component Bose-Einstein condensate, nonlinear excitation, dispersive shockwave

Abstract : This thesis is devoted to the study of nonlinear fluctuations in two-component Bose-Einstein condensates. In the first chapter we derive the mean field dynamics of two-component condensates and we present the distinctive phenomena associated to the spinorial degree of freedom. In the same chapter, we show that the dynamics of the excitations is divided in two distinct modes: a so called density mode which corresponds to the global motion of the atoms, and a so called polarization mode which corresponds to the relative motion between the two species composing the condensate. The computation is generalized in the second chapter in which we demonstrate that the polarization mode remains in presence of a coherent coupling between the two components. In particular we study the modulational stability of the mode and we determine through a multi-scaling analysis the dynamics of non-linear excitations. We show that the excitations of polarization undergo a Benjamin-Feir instability contrary to the den-

sity excitations. This instability is then stabilized in the short wavelength regime by a long wave - short wave resonance. Finally in the last chapter, we derive in a non-perturbative way the polarisation dynamics close the Manakov limit. In this limit, the dynamics proves to be governed by a Landau-Lifshitz equation without dissipation. Landau-Lifshitz equations belong to a hierarchy of integrable equations (Ablowitz-Kaup-Newell-Segur hierarchy) and we derive the single-phase solutions thanks to the finite-gap method; in particular we identify a new type of soliton for the two-component Bose-Einstein condensates. Finally, taking advantage of the integrability of the system, we solve the Riemann problem thanks to the Whitham modulation theory and we show that the two-component condensates can propagate rarefaction waves as well as dispersive shockwaves; we describe the modulation of the shockwaves by the propagation of simple waves and contact waves of Riemann invariants.