# Vecteur de Riemann–Silberstein

$\vec{D} = \vec{E} - ic\vec{B}$ avec le formulaire :

$* \; D'_x = E_x - icB_x = D_x$

$* \; D'_y = \gamma(E_y - \beta c B_z) - i\gamma(cB_y + \beta E_z)$

$= \gamma D_y + \beta\gamma(-iE_z - cB_z) = \gamma D_y - i\beta\gamma D_z$

$* \; D'_z = \gamma(E_z + \beta c B_y) - i\gamma(cB_z - \beta E_y)$

$= \gamma D_z + \beta\gamma(iE_y + cB_y) = \gamma D_z + i\beta\gamma D_y$

on a donc :

$$\begin{pmatrix} D'_x \\ D'_y \\ D'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & -i\beta\gamma \\ 0 & i\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{pmatrix}$$

la matrice est bien une matrice de rotation d'un angle $i\theta$

avec : $\begin{cases} ch\theta = \gamma \\ sh\theta = \beta\gamma \end{cases}$ en effet on a bien : $ch^2\theta - sh^2\theta = \gamma^2(1-\beta^2) = 1$

on a donc $th\theta = \beta$ [soit $\theta = \text{arth}\beta = \frac{1}{2}\ln\frac{1+\beta}{1-\beta}$. $\theta$ est parfois appelée la "rapidité"]

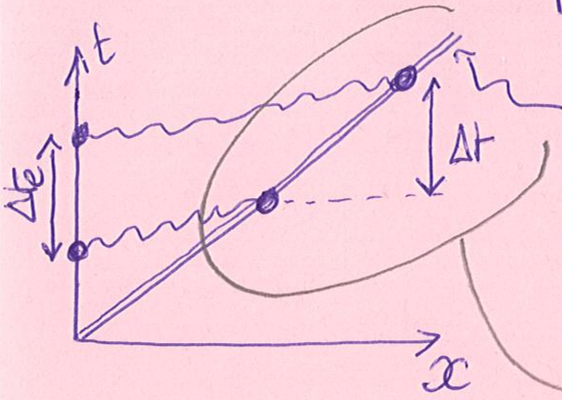
* la conservation de $\vec{D}\cdot\vec{D}$ lors de la rotation s'écrit :

$$\vec{D}\cdot\vec{D} = \vec{E}^2 - c^2\vec{B}^2 - 2ic\,\vec{E}\cdot\vec{B} = \vec{D}'\cdot\vec{D}'$$

la partie réelle et la partie imaginaire sont conservées : on retrouve le résultat du cours. Le raisonnement fait ici sur un boost de Lorentz est bien-sûr général : il suffit de bien choisir les axes pour toujours pouvoir se ramener à un boost de Lorentz.

# Voilier cosmique

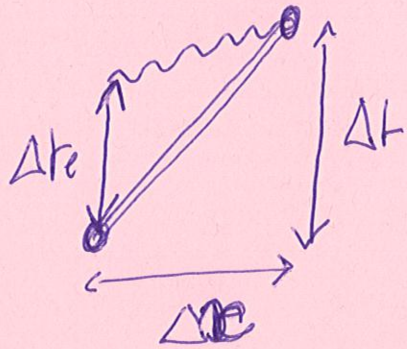
VC1




ligne d'univers du vaisseau.

$\sim\sim\sim$ = lignes d'univers des photons.

en zoomant ici on a :




il est clair que :

$$\Delta x = c(\Delta t - \Delta t_e) = v\,\Delta t$$

d'où $\Delta t_e = (1-\beta)\Delta t$

* si le laser émet 1 photon (énergie $\hbar\omega$) tous les $\Delta t_e$, le vaisseau reçoit l'énergie $\hbar\omega$ tous les $\Delta t$, donc ici :

$$P_e = \frac{\hbar\omega}{\Delta t_e} \quad \text{et} \quad P = \frac{\hbar\omega}{\Delta t} = P_e(1-\beta)$$

le facteur "$1-\beta$" est intuitif : si $\beta \to 1$ $v \to c$ et les photons n'atteignent plus le faisceau : $P \to 0$.

2/ la conservation de la quadri-impulsion s'écrit :

$$\begin{cases} \mathcal{E}_\gamma + \mathcal{E} = \mathcal{E}'_\gamma + \mathcal{E} + \delta_1\mathcal{E} \\ \mathcal{E}_\gamma + cp = -\mathcal{E}'_\gamma + cp + c\,\delta_1 p \end{cases}$$

en faisant la somme : $2\mathcal{E}_\gamma = \delta_1\mathcal{E} + c\,\delta_1 p$

soit : $\mathcal{E}_\gamma = \frac{c}{2}\,\delta_1\!\left(\frac{\mathcal{E}}{c} + p\right) = \frac{mc^2}{2}\,\delta_1\left[\gamma(1+\beta)\right]$

en écrivant $\frac{\mathcal{E}}{c} = m\gamma c$

et $p = m\gamma v = m\gamma\beta c$

VC2

pendant $dt$ le vaisseau reçoit $N$ photons avec

$$N = \frac{P\,dt}{\mathcal{E}_\gamma} = \frac{\text{energie totale reçue}}{\text{energie d'un photon}}$$

il subit $N$ chocs de type (B1) on a donc :

$$d[\gamma(1+\beta)] = N\,\delta_1[\gamma(1+\beta)] = N\,\frac{2\mathcal{E}_\gamma}{mc^2} = \frac{2P\,dt}{mc^2}$$

en écrivant $P = P_e(1-\beta)$ il vient :

$$\boxed{\frac{1}{1-\beta}\,\frac{d[\gamma(1+\beta)]}{dt} = \frac{2P_e}{mc^2} \equiv 1/\tau}$$

pour un vaisseau de 1 tonne et un laser de 1 TW (enorme ! $= 10^{12}$ W)

on a : $\tau = \frac{10^3 \times (3\,10^8)^2}{2\,10^{12}}\,s = 4.5\,10^7\,s = 12500\,h \simeq 1.4$ ans

- l'énoncé nous dit que cette équation se met sous la forme :

$$\frac{df}{dt} = \frac{1}{\tau} \quad \text{où} \quad f(\beta) = \frac{(1+\beta)(2-\beta)\gamma}{3(1-\beta)}$$

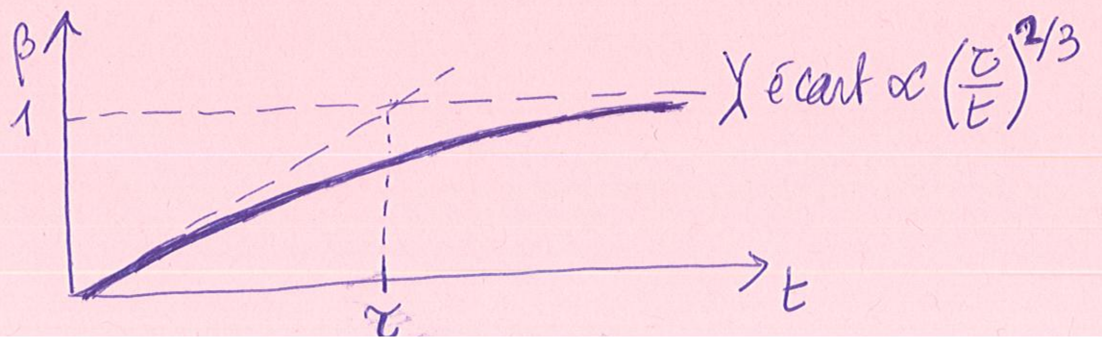
on a donc immédiatement : $f(\beta) - f(0) = t/\tau$
(condition initiale : $\beta = 0$ à $t=0$)

* pour $t \ll \tau$ $\beta$ est faible on peut écrire $f(\beta) - f(0) \simeq \beta \left.\frac{df}{d\beta}\right|_0 = \beta$
d'où $\beta \simeq t/\tau$

* pour $t \gg \tau$ $\beta$ tend certainement vers 1. alors on peut utiliser l'approximation (B3) et négliger $f(0)$ devant $f(\beta)$.

Il vient : $\frac{\sqrt{2}}{3(1-\beta)^{3/2}} \simeq t/\tau$ soit $\beta \simeq 1 - \left(\frac{\sqrt{2}\,\tau}{3t}\right)^{2/3}$

d'où l'allure :



5/ analyse classique valable pour $\beta \ll 1$ et $P \simeq P_e$ [VC3]

pdt $dt$ le vaisseau reçoit $N = \dfrac{P\,dt}{\mathcal{E}_\gamma}$ photons

chaque photon, en rebondissant sur le vaisseau lui transfère une impulsion $2p_\gamma = 2\,\mathcal{E}_\gamma/c$ ($\beta \ll 1$ = les photons rebondissant sur un miroir presque immobile = $p_{\text{réfléchi}} = -p_{\text{incident}} = -p_\gamma$)

on a donc $dp = 2N \dfrac{\mathcal{E}_\gamma}{c} = \dfrac{2P\,dt}{c} \underset{\beta \ll 1}{=} \dfrac{2P_e\,dt}{c}$

donc $\dfrac{dp}{dt} = \dfrac{2P_e}{c}$

En écrivant l'impulsion non relativiste $p = mv = mc\beta$ cela donne =

$$\frac{d\beta}{dt} = \frac{2P_e}{mc^2} = \frac{1}{\tau} \underset{\substack{\text{avec la condition}\\ \text{initiale } \beta(t=0)=0}}{\Longrightarrow} \beta = t/\tau$$

c'est le résultat (B4) à faible vitesse

---

remarque = calcul non relativiste complet = il suffit de prendre dans (B1) $\delta\left(\dfrac{\mathcal{E}}{c} + p\right) = \delta\left(\dfrac{1}{2}m\dfrac{v^2}{c} + mv\right) = mc\,\delta\left(\dfrac{\beta^2}{2} + \beta\right)$.

Alors, à la place de (B2) on obtient $\dfrac{1}{1-\beta}\,\dfrac{d(\beta + \beta^2/2)}{dt} = 1/\tau$.

Il est alors facile de vérifier que la fonction $f(\beta)$ est ici $-\beta - 2\ln(1-\beta)$. On obtient toujours $\beta \simeq t/\tau$ pour $t \ll \tau$, mais maintenant, pour $t \gg \tau$ on a : $\beta \simeq 1 - \exp(-t/2\tau)$.

autre remarque = en méca relat ou non relat on a tjs $\delta\mathcal{E} = v\,\delta p$ donc (B1) peut s'écrire =

$$\mathcal{E}_\gamma = \frac{c}{2}(1+\beta)\,\delta p = \frac{mc^2}{2}(1+\beta)\,\delta(\gamma\beta)$$

et pour avoir l'approx. non relativiste il faut prendre $\gamma = 1$ dans la formule ci-dessus