Transformation onde plane

① on a clairement $\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 = \vec{\nabla}\cdot\vec{E}$ donc $\rho(\vec{r},t) = 0$

$$\vec{\nabla}\wedge\vec{E} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \partial_x E_y = -E_0 k \sin\Phi \end{vmatrix} \qquad -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ -B_0\omega\sin\Phi \end{vmatrix} \quad \text{donc } E_0 k = B_0\omega$$

où, partout dans ce qui suit on note $\Phi = kx - \omega t$.

$$\vec{\nabla}\wedge\vec{B} = \begin{vmatrix} 0 \\ -\partial_x B_z = B_0 k \sin\Phi \\ 0 \end{vmatrix} \qquad \frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \begin{vmatrix} 0 \\ \frac{\omega}{c^2}E_0\sin\Phi \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\text{donc } \mu_0\vec{J} = \vec{\nabla}\wedge\vec{B} - \frac{1}{c^2}\partial_t\vec{E} = \underbrace{\left(B_0 k - \frac{\omega}{c^2}E_0\right)}_{E_0\left(\frac{k^2}{\omega} - \frac{\omega}{c^2}\right)}\sin\Phi\,\vec{e_y}$$

avec la relation obtenue à partir de Maxwell Faraday.

si $\vec{J} = \vec{0}$ on a $k^2 = \omega^2/c^2$ et $B_0 = E_0/c$

il s'agit d'une onde plane $(\vec{k},\vec{E},\vec{B})$ trièdre direct, $\omega = ck$ et $B_0 = E_0/c$ - Elle est polarisée linéairement.

② en utilisant le formulaire et en notant $\vec{E} = E\vec{e_y}$, $\vec{B} = B\vec{e_z}$ =

$$\vec{E}' = \gamma(E\vec{e_y} + V\vec{e_x}\wedge B\vec{e_z}) = \gamma(E - BV)\vec{e_y} = \gamma(1-\beta)E_0\cos\Phi\,\vec{e_y}$$

$$\vec{B}' = \gamma\left(B\vec{e_z} - \frac{V}{c^2}\vec{e_x}\wedge E\vec{e_y}\right) = \gamma\left(B - \frac{V}{c^2}E\right)\vec{e_z} = \gamma(1-\beta)B_0\cos\Phi\,\vec{e_z}$$

on a également $\begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma \\ \beta\gamma & \gamma \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix}$

$$\text{donc } \Phi = kx - \omega t = k(x - ct) = k\gamma(\beta ct' + x' - ct' - \beta x') = k\gamma(1-\beta)(x' - ct')$$

dans les expressions ci-dessus on peut écrire $\gamma(1-\beta) = \frac{1-\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}$

on a $|\vec{E}'|^2 = \frac{1-\beta}{1+\beta}E_0^2\cos^2\Phi$

et, bien-sûr $|\vec{B}'|^2 = \frac{|\vec{E}'|^2}{c^2}$ et $\vec{E}'\cdot\vec{B}' = 0$ (afin de conserver $F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ et $\det F^{\mu\nu}$)

③ on a $\vec{k}' = k(1-\beta)\gamma\, \vec{e}_x$ et $\omega' = ck(1-\beta)\gamma = c|\vec{k}'|$ = normal la relation de dispersion de la lumière est invariante de Lorentz.

dans $\mathcal{R}'$ le trièdre $(\vec{k}', \vec{E}', \vec{B}')$ est direct = l'onde dans $\mathcal{R}'$ est donc également une onde plane. $\boxed{\text{puisqu'on a déjà vu que } |\vec{B}'| = |\vec{E}'|/c \text{ et } \omega' = k'/c}$

④ on retrouve la loi de transformation de la pulsation et du vecteur d'onde en écrivant $\underset{\sim}{k}' = (\Lambda)\, \underset{\sim}{k}$ où $\underset{\sim}{k} = \left(\frac{\omega}{c}, \vec{k}\right)$

cela s'écrit explicitement :

$$\begin{pmatrix} \omega'/c \\ k'_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega/c = k \\ k_x = k = \omega/c \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{cases} \omega'/c = \gamma(1-\beta)\,\omega/c \\ k'_x = \gamma(1-\beta)\, k \end{cases}$$

Quadrupole Magnétique

① en présence d'un champ électromagnétique $\mathcal{E} = \frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} + q\phi \overset{\text{ici}}{=} \frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$

comme il n'y a pas de champ électrique, le thm de l'énergie cinétique montre que $\mathcal{E}$ est conservée ($\vec{B}$ ne travaille pas).

on a $\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{\mathcal{E}}{c^2}\vec{v}$

② les eqs. du mouvement $\frac{d\vec{p}}{dt} = q\vec{v}\wedge\vec{B}$ s'écrivent

$$\frac{\mathcal{E}}{c^2}\left|\begin{array}{l}\dot{v}_x\\ \dot{v}_y\\ \dot{v}_z\end{array}\right. = q\left|\begin{array}{l}v_x\\ v_y\\ v_z\end{array}\right. \wedge \left|\begin{array}{l}yb\\ xb\\ 0\end{array}\right. = qb\left|\begin{array}{l}-xv_z\\ yv_z\\ xv_x - yv_y\end{array}\right.$$

③ si l'on fait l'approx. paraxiale on a $\dot{v}_z = \frac{qbc^2}{\mathcal{E}}(xv_x - yv_y) \simeq 0$

donc $v_z = v_0$ est une constante.

alors $z(t) = v_0 t + z(0)$ et $\frac{d}{dt}(--) = v_0\frac{d}{dz}(--)$

l'eq. selon $\vec{e}_x$ s'écrit alors : $\underbrace{\frac{\mathcal{E}}{c^2}\ddot{x}}_{\frac{\mathcal{E}v_0^2}{c^2}x''} = -qbv_0x$

soit $x'' + k^2x = 0$

avec $k^2 = \frac{qbc^2}{\mathcal{E}v_0}$

analyse dimensionnelle :

$[k^2] = \frac{[q][B][\text{vitesse}]}{[\mathcal{E}][L]}$ car $[b] = \frac{[B]}{[L]}$

$= \frac{[\text{force}]}{[\mathcal{E}].[L]}$ et comme $[\mathcal{E}] = [\text{force}].[L]$ on voit que k^2 est homogène à L^{-2} ⇒ les eqs. (B1) sont donc homogènes.

④ l'éq. pour x est facilement intégrée :

$x(z) = A\cos(kz) + B\sin(kz)$ et $x'(z) = -Ak\sin(kz) + Bk\cos(kz)$

il est alors clair que $A = x(0)$ et $Bk = x'(0)$

cela correspond bien aux relations (B2).

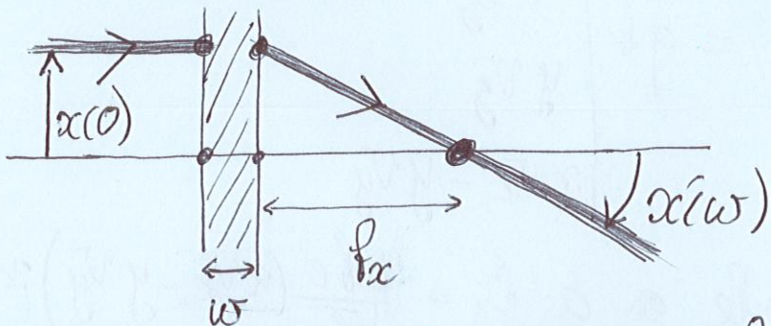
⚠ ce qui est noté w ici est noté ℓ dans le sujet

Dans le cas d'une lentille mince on écrit : (limite $kw \ll 1$)

$$\begin{pmatrix} x(w) \\ x'(w) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & w \\ -k^2 w & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(0) \\ x'(0) \end{pmatrix}$$

pour un faisceau entrant avec $x'(0) = 0$ on a : $\begin{cases} x(w) = x(0) \\ x'(w) = -k^2 w\, x(0) \end{cases}$

Soit :



on a $|x'(w)| = \dfrac{x(0)}{f_x}$

soit $f_x = \dfrac{1}{k^2 w}$

noter que dans la limite $kw \ll 1$ on a $f_x \gg w$: c'est bien la limite d'une lentille mince.

☑ on a $f_x = \dfrac{1}{k^2 w} = \dfrac{\mathcal{E}}{c^2}\dfrac{v_0}{qbw}$. Pour arriver à ce résultat on a écrit initialement $\vec{p} = \dfrac{\mathcal{E}}{c^2}\vec{v}$. En méca. non relativiste on aurait simplement écrit $\vec{p} = m\vec{v}$ ⇝ cela revient à remplacer $\dfrac{\mathcal{E}}{c^2}$ par m

on aurait donc $(f_x)_{non\text{-}rel} = \dfrac{m v_0}{q b w} = \dfrac{1}{\gamma} f_x$

De même la limite de lentille mince $k^2 w^2 \ll 1$ s'écrit : $\dfrac{q b w^2}{v_0} \cdot \dfrac{c^2}{\mathcal{E}} \ll 1$

elle est d'autant mieux vérifiée que $\gamma \to \infty$

càd dans la limite ultra-relativiste.

☑ Selon y on a $y'' - k^2 y = 0$ cela revient à remplacer, dans les formules selon x, k^2 par $-k^2$ et k par ik :

$$\begin{pmatrix} y(w) \\ y'(w) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{ch}(kw) & k^{-1}\,\mathrm{sh}(kw) \\ +k\,\mathrm{sh}(kw) & \mathrm{ch}(kw) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y(0) \\ y'(0) \end{pmatrix}$$

et $f_y = -\dfrac{1}{k^2 w} = -f_x$