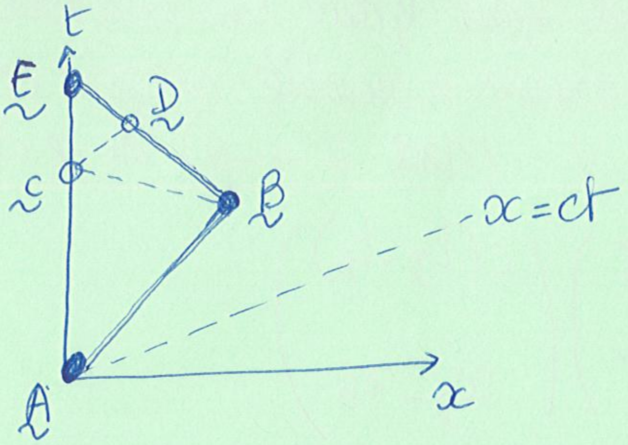
Vaisseau spatial



A = départ

B = arrivée à la station spatiale et émission d'un photon.

C = réception du photon sur Terre et émission d'un second photon

D = réception du 2nd photon par le vaisseau

▨ Dans le réf. propre du vaisseau
$t'_B = 30$ mns (et bien-sûr $x'_B = 0$)
les coordonnées de B dans le réf. R lié à la Terre sont : $\begin{pmatrix} ct_B \\ x_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma \\ \beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct'_B \\ 0 \end{pmatrix}$

donc $t_B = \underset{5}{\gamma}\, t'_B = 50$ mns

$\left(\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{64}{100}}} = \sqrt{\frac{100}{36}} = \frac{5}{3}\right)$ et alors $x_B = V t_B = 7{,}2\ 10^8$ km

▨ $t_C = t_B + \frac{x_B}{c} = (\beta+1)t_B = 90$ mns

▨ Sur le diagramme de Minkowski D est à l'intersection de deux droites : $x = c(t - t_C)$ et $x = x_B - V(t - t_B)$

cela donne $c(t_D - t_C) = x_B - V(t_D - t_B)$ soit $(c+V)t_D = x_B + Vt_B + ct_C$
$= 2Vt_B + c(\beta+1)t_B$

soit $\begin{cases} t_D = \frac{1+3\beta}{1+\beta} t_B = 94{,}4 \text{ mns} \simeq 1\text{h}34 \text{ mns} \\ x_D = c(t_D - t_C) = c\beta\frac{1-\beta}{1+\beta} t_B = 8\ 10^7 \text{ km} \end{cases}$

▨ Pour déterminer les coordonnées de D dans le réf. propre du vaisseau il faut faire une nouvelle analyse en prenant B comme nouvelle origine et en changeant $V \to -V$ (cad $\beta \to -\beta$) on a donc

$$\begin{pmatrix} c(t'_D - t'_B) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma \\ \beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c(t_D - t_B) \\ x_D - x_B \end{pmatrix}$$

effectivement, on peut vérifier, on a bien 0 ici car $V(t_D - t_B) + x_D - x_B = 0$.

cela donne $t'_D - t'_B = \gamma \left[t_D - t_B + \frac{\beta}{c} \underbrace{(x_D - x_B)}_{-V(t_D - t_B)} \right]$

$$= \gamma (t_D - t_B)(1 - \beta^2) = \sqrt{1-\beta^2} \cdot \underbrace{\left(\frac{1+3\beta}{1+\beta} - 1 \right)}_{\frac{2\beta}{1+\beta}} t_B$$

donc $t'_D - t'_B = 2\beta \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}\, t_B = 26.6$ mns

et alors

$t'_D = 56.6$ mns = le 2d photon est reçu par le vaisseau peu de temps avant son retour sur Terre (le trajet aller-retour prend 60 mns pour les occupants du vaisseau)

NB = une fois qu'on a fait ce calcul on s'aperçoit qu'il repose sur la formule $t'_D - t'_B = \frac{t_D - t_B}{\gamma}$ qu'on peut obtenir avec un raisonnement simple qui évite la lourdeur du formalisme ci-dessus ☺

Masse du π^-

$\underset{\sim}{P}_\pi + \underset{\sim}{P}_p = \underset{\sim}{P}_n + \underset{\sim}{P}_\gamma$ soit $\begin{cases} (M+m)c = \dfrac{\mathcal{E}_n}{c} + \mathcal{E}_\gamma/c \\ \text{et} \quad 0 = \vec{p}_n + \vec{p}_\gamma \end{cases}$ (partie temporelle avec π^- et p initialement au repos) (partie spatiale)

or $\dfrac{\mathcal{E}_\gamma}{c} = |\vec{p}_\gamma|$ (photon masse nulle) et $|\vec{p}_\gamma| = |\vec{p}_n| = c\beta$ - On a donc =

$(M+m)c = \dfrac{\mathcal{E}_n}{c} + |\vec{p}_n|$ avec $\mathcal{E}_n = \dfrac{Mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$ et $|\vec{p}_n| = \dfrac{M\beta c}{\sqrt{1-\beta^2}}$

cela donne $m + M = \dfrac{M}{\sqrt{1-\beta^2}}(1+\beta)$ soit = $\boxed{m = M\left(\sqrt{\dfrac{1+\beta}{1-\beta}} - 1\right)}$

(2) soit t^* l'instant de la desintégration.

on a $t - t^* = \dfrac{L}{v_n}$ et $t_0 - t^* = L_0/c$ en faisant la diffé-rence et en notant $\Delta t = t - t_0$ on obtient $\Delta t = \dfrac{L}{v_n} - \dfrac{L_0}{c}$

soit $\dfrac{v_n}{L} = \dfrac{1}{\Delta t + L_0/c}$ cad $\beta = \dfrac{L}{c\Delta t + L_0} = 0{,}1378$

et alors $m = 139{,}7$ MeV

Note = on peut retrouver le resultat encadré de manière plus besogneuse = on écrit

$$0 = (\underset{\sim}{P}_\gamma)^2 = (\underset{\sim}{P}_\pi + \underset{\sim}{P}_p - \underset{\sim}{P}_n)^2 = m^2c^2 + 2M^2c^2 + \underbrace{2\,\underset{\sim}{P}_\pi \cdot (\underset{\sim}{P}_p - \underset{\sim}{P}_n)}_{2mc\left(Mc - \frac{\mathcal{E}_n}{c}\right)} \underbrace{- 2\,\underset{\sim}{P}_p \cdot \underset{\sim}{P}_n}_{-2M\mathcal{E}_n}$$

cela donne une éq. du 2^d degré pour m =

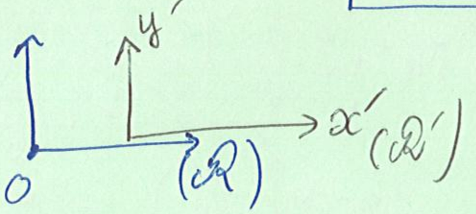
$m^2 + 2m\left(M - \dfrac{\mathcal{E}_n}{c^2}\right) + 2M\left(M - \dfrac{\mathcal{E}_n}{c^2}\right) = 0$ $\left\{ \begin{aligned} &= \text{discriminant réduit} = \\ &\Delta' = \left(M - \frac{\mathcal{E}_n}{c^2}\right)\left(M - \frac{\mathcal{E}_n}{c^2} - 2M\right) \\ &= \left(\frac{\mathcal{E}_n}{c^2}\right)^2 - M^2 \end{aligned} \right.$

racines = $m = \dfrac{\mathcal{E}_n}{c^2} - M \pm \sqrt{\left(\dfrac{\mathcal{E}_n}{c^2}\right)^2 - M^2}$

on écrit $\mathcal{E}_n/c^2 = M\gamma$ alors $\dfrac{m}{M} = \gamma - 1 + \sqrt{\gamma^2 - 1}$ (bien sûr il faut un signe "+" dans le "±", sinon $m<0$)

or $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$, $\sqrt{\gamma^2-1} = \sqrt{\dfrac{\beta^2}{1-\beta^2}}$ et $\boxed{\dfrac{m}{M} = \dfrac{1+\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1}$ c'est le résultat encadré plus haut

Contraction des longueurs



R' = lié à l'observateur =

$$\begin{pmatrix} c\,dt' \\ dx' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c\,dt \\ dx \end{pmatrix} \quad \text{où } \beta = v/c$$

donc $u' = \dfrac{dx'}{dt'} = \dfrac{dx - v\,dt}{dt - \beta \frac{dx}{c}} = \dfrac{u - v}{1 - uv/c^2}$

l'observateur mesure un volume =

$v' = \dfrac{1}{\gamma} v_0$ (contraction des longueurs le long de x, rien de la sorte le long de y ou z)

où ce facteur γ vaut $\dfrac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{u'}{c}\right)^2}}$.

$$\text{Donc } \sqrt{1-\left(\frac{u'}{c}\right)^2} = \sqrt{1-\left(\frac{u-v}{c-uv/c}\right)^2} = \frac{\sqrt{c^2 + \frac{u^2v^2}{c^2} - \cancel{2uv} - u^2 - v^2 + \cancel{2uv}}}{c - uv/c}$$

$$= \frac{\sqrt{(c - u^2/c)(c - v^2/c)}}{c - uv/c} = \frac{\sqrt{(c^2-u^2)(c^2-v^2)}}{c^2 - uv}$$