**L3 et Magistère 1$^{\text{ème}}$ année** 13 mai 2023

---

**EXAMEN de RELATIVITÉ**

*Durée : 2 heures*

*Les calculatrices sont autorisées, mais inutiles.*
*Barème approximatif : A = 10 pts ; B = 10 pts.*
**En cas de difficulté dans l'exercice B on peut admettre** (B1) **et continuer.**

# Formulaire – Rappel de cours

• On rappelle la forme des équations de Maxwell :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho/\varepsilon_0 \ , \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \ , \quad \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \ , \quad \vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \ .$$

• On considère deux référentiels inertiels $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$. $\mathcal{R}'$ est animé par rapport à $\mathcal{R}$ d'un mouvement de translation rectiligne uniforme à la vitesse $\vec{V} = V\,\vec{e}_x$. Si un quadri-vecteur a pour expressions respectives $\underset{\sim}{A}$ et $\underset{\sim}{A}'$ dans $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$, on a $A'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}\, A^{\nu}$ avec

$$\Lambda^{\mu}{}_{\nu} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ , \quad \text{où} \quad \beta = V/c \quad \text{et} \quad \gamma = (1-\beta^2)^{-1/2} \ . \tag{1}$$

Pour inverser la relation entre $\underset{\sim}{A}$ et $\underset{\sim}{A}'$ il suffit de changer le signe de $\beta$ dans l'expression ci-dessus.

• Les champs électrique et magnétique dans $\mathcal{R}'$ ($\vec{E}\,'$ et $\vec{B}\,'$) s'expriment en fonction de ceux dans $\mathcal{R}$ ($\vec{E}$ et $\vec{B}$) selon la loi (2) ci-dessous où $\vec{E}_\perp$ (respectivement $\vec{E}_\parallel$) est la composante de $\vec{E}$ perpendiculaire (respectivement colinéaire) à $\vec{V}$. Même convention pour $\vec{B}_\perp$ et $\vec{B}_\parallel$.

$$\vec{E}\,' = \vec{E}_\parallel + \gamma\left(\vec{E}_\perp + \vec{V} \wedge \vec{B}_\perp\right) \ , \quad \vec{B}\,' = \vec{B}_\parallel + \gamma\left(\vec{B}_\perp - \frac{\vec{V}}{c^2} \wedge \vec{E}_\perp\right) \ . \tag{2}$$

• Soit $F^{\mu\nu}(\vec{r}, t)$ le tenseur électromagnétique. On a

$$F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = 2(\vec{B}^2 - \vec{E}^2/c^2) \quad \text{et} \quad \det F^{\mu\nu} = (\vec{E} \cdot \vec{B}/c)^2 \ . \tag{3}$$

## A Transformation d'une onde plane

On considère une onde électromagnétique caractérisée dans un référentiel $\mathcal{R}$ par les champs

$$\vec{E}(\vec{r},t) = E_0 \cos\Phi\, \vec{e}_y \quad \text{et} \quad \vec{B}(\vec{r},t) = B_0 \cos\Phi\, \vec{e}_z \ , \quad \text{où} \quad \Phi(\vec{r},t) = kx - \omega t \ . \tag{A1}$$

**1/**(a) Montrez que ces champs sont solutions des équations de Maxwell, moyennant certaines conditions, à déterminer, que doivent satisfaire les constantes *a priori* indépendantes $E_0$, $B_0$, $\omega$, $k$ et les sources $\rho(\vec{r},t)$ et $\vec{J}(\vec{r},t)$.

(b) Dorénavant on se place dans ces conditions, dans le cas $\vec{J} = \vec{0}$. Quel nom porte ce type de solution ?

**2/**(a) Donner la valeur des champs électrique et magnétique dans le référentiel $\mathcal{R}'$ qui est animé par rapport à $\mathcal{R}$ d'un mouvement de translation rectiligne uniforme à la vitesse $\vec{V} = V\,\vec{e}_x$. On donnera leur expression en fonction des coordonnées $(t', x', y', z')$ dans $\mathcal{R}'$.

(b) Calculer $|\vec{E}\,'|^2$.

(c) Calculer $|\vec{B}\,'|^2$ et $\vec{E}\,' \cdot \vec{B}\,'$. Ces résultats étaient-ils prévisibles ?

**3/**(a) Déduire de ce qui précède la pulsation $\omega'$ de l'onde dans $\mathcal{R}'$, ainsi que son vecteur d'onde $\vec{k}\,'$.

(b) Quelle est la relation entre $\omega'$ et $k' = |\vec{k}\,'|$. Ce résultat était-il prévisible ?

(c) Calculez $\vec{E}\,' \cdot \vec{k}\,'$ et $\vec{B}\,' \cdot \vec{k}\,'$. Qu'en concluez-vous sur la nature de l'onde dans $\mathcal{R}'$ ?

**4/** Retrouver l'expression de $\omega'$ et celle de $\vec{k}\,'$ en utilisant les lois de transformation du quadri-vecteur d'onde.

## B Quadrupole magnétique

Un faisceau de particules identiques (masse $m$, charge $q > 0$) de vitesse approximativement colinéaire à l'axe $Oz$ pénètre dans une région où il n'y a aucun champ électrique et où règne un champ magnétique quadrupolaire $\vec{B} = y\,b\,\vec{e}_x + x\,b\,\vec{e}_y$, où $b$ est une constante positive.

**1/**(a) Donner, dans ce système, l'expression de l'énergie $\mathcal{E}$ d'une particule et montrer que c'est une constante du mouvement.

(b) Exprimer l'impulsion relativiste $\vec{p}$ d'une particule en fonction de $\mathcal{E}$, $c$ et de sa vitesse $\vec{v}$.

**2/** Utiliser les résultats de la question précédente pour écrire les équations du mouvement reliant $\mathrm{d}v_x/\mathrm{d}t$, $\mathrm{d}v_y/\mathrm{d}t$ et $\mathrm{d}v_z/\mathrm{d}t$ à $x$, $y$, $v_x$, $v_y$, $v_z$ et aux constantes $\mathcal{E}$, $b$, $c$, $q$.

**3/** On se place désormais dans "l'approximation paraxiale" où l'on considère $x$, $y$, $v_x$ et $v_y$ comme des infiniments petits.

(a) Montrer alors que $v_z$ est approximativement conservé. On notera $v_0$ sa valeur.

(b) En déduire que l'on peut, dans les équations du mouvement, remplacer $\mathrm{d}(..)/\mathrm{d}t$ par $v_0\mathrm{d}(..)/\mathrm{d}z$. On notera désormais $\mathrm{d}x/\mathrm{d}z = x'$, $\mathrm{d}^2x/\mathrm{d}z^2 = x''$, etc.

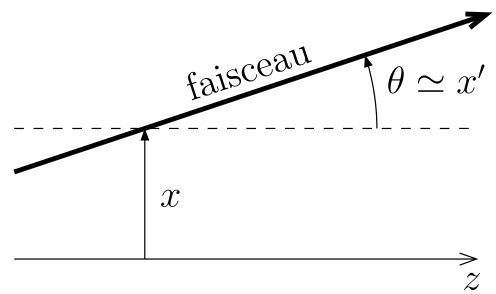
(c) Montrez que, dans le cadre de notre approximation, $x$ et $y$ satisfont aux équations

$$x'' + k^2 x = 0 \ , \quad y'' - k^2 y = 0 \ , \tag{B1}$$

où vous donnerez l'expression de la constante $k$ en fonction de $q$, $b$, $c$, $\mathcal{E}$ et $v_0$. Vérifiez l'homogénéité de votre formule.

**4/** On étudie dans un premier temps le mouvement dans le plan $xOz$.

On définit l'angle $\theta(z)$ par $\tan\theta = x'$. Dans l'approximation paraxiale on écrit $\theta \simeq x'$. On peut ainsi décrire, dans le plan $xOz$, le faisceau par sa position $x(z)$ et sa pente $x'(z)$, comme illustré sur la figure ci-contre.




(a) La zone où règne le champ magnétique quadrupolaire correspond au domaine $0 \le z \le \ell$. Montrer que l'on a, en sortie du quadrupole,

$$\begin{pmatrix} x(\ell) \\ x'(\ell) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(k\ell) & k^{-1}\sin(k\ell) \\ -k\sin(k\ell) & \cos(k\ell) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(0) \\ x'(0) \end{pmatrix} \ . \tag{B2}$$

(b) On se place désormais dans la limite de la "lentille mince" où $k\ell \ll 1$. Montrer que tout faisceau entrant dans le quadrupole avec une inclinaison nulle ($x'(0) = 0$) converge en sortie vers un foyer image situé sur l'axe $Oz$ à une distance $f_x$ que l'on exprimera en fonction de $k$ et $\ell$.
*Indication* : Un schéma sera bienvenu.

(c) Monter qu'un calcul non relativiste sous-estime la valeur de la distance focale $f_x$ par un facteur $\gamma$. Montrer également que dans la limite ultra-relativiste tous les quadrupoles tendent à se comporter comme des lentilles minces.

(d) Justifier rapidement que dans la direction $y$ le système est divergent. Pouvez-vous intuiter la valeur de sa distance focale $f_y$ ?
*Indication* : on rappelle que pour $\alpha \in \mathbb{R}$, $\cos(i\alpha) = \cosh\alpha$ et $\sin(i\alpha) = i\sinh\alpha$.