

Thèse de doctorat de l'Université Paris XI

Spécialité :

PHYSIQUE THÉORIQUE

présentée par

Olivier GIRAUD

pour obtenir le grade de DOCTEUR EN SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ PARIS XI

Sujet :

Statistiques spectrales des systèmes diffractifs

Soutenue le 28 juin 2002 devant le jury composé de

M. Vincent RIVASSEAU	président
M. Dominique DELANDE	
M. John H. HANNAY	rapporteur
M. André VOROS	rapporteur
M. Eugène BOGOMOLNY	directeur de thèse

Questo è un nodo avviluppato,
Questo è un gruppo rintrecciato.
Chi sviluppa più inviluppa,
Chi più sgruppa, più raggruppa;

Ed intanto la mia testa
Vola, vola e poi s'arresta;
Vo tenton per l'aria oscura,
E comincio a delirar.

Gioacchino Rossini, *La Cenerentola*,
livret de Jacopo Ferretti

Résumé

Nous nous intéressons aux aspects analytiques de l'étude des statistiques spectrales des systèmes quantiques diffractifs. Les systèmes dynamiques peuvent présenter classiquement un comportement intégrable, chaotique ou intermédiaire, et il existe une correspondance entre ce comportement classique et les propriétés quantiques du système: les valeurs propres du Hamiltonien des systèmes intégrables sont généralement distribuées comme des variables aléatoires indépendantes, et les niveaux d'énergie de tels systèmes suivent une statistique poissonnienne, alors que ceux d'un système chaotique sont distribués comme les valeurs propres de matrices à coefficients aléatoires. D'autres conjectures décrivent un nouveau type de statistiques, qualifiées d'intermédiaires. Peu d'éléments analytiques existent à l'appui de ces conjectures, pourtant étayées par de nombreuses simulations numériques.

Ce travail porte sur l'étude des fonctions de corrélation spectrale de systèmes qui suivent des statistiques intermédiaires: systèmes intégrables perturbés par une singularité (centre diffracteur ponctuel (potentiel delta), angle singulier dans un billard, et ligne de flux Aharonov-Bohm) ou systèmes pseudo-intégrables. Il est possible, en utilisant leurs propriétés mathématiques spécifiques, d'obtenir analytiquement l'expression du facteur de forme à l'origine pour divers systèmes particuliers: billard rectangulaire ou billard circulaire traversé par un flux Aharonov-Bohm, billards triangulaires ayant la "propriété de Veech", billards avec barrière. Les résultats analytiques, conformes aux résultats numériques, semblent accréditer l'hypothèse de l'existence de traits statistiques communs à ces systèmes.

Afin d'obtenir l'expression complète du facteur de forme, il convient d'inclure la contribution des orbites diffractives. Dans le cas d'un billard rectangulaire muni d'un centre diffracteur ponctuel, on utilise une méthode semi-classique qui permet de resommer toutes les contributions des interactions entre orbites périodiques et orbites diffractives, et ainsi de calculer analytiquement le facteur de forme à tout ordre. En outre, la distribution des écarts entre niveaux d'énergie pour ce même système est calculée analytiquement, et son comportement asymptotique démontre que ce système présente des traits communs aux systèmes intégrables et aux systèmes chaotiques, confirmant ainsi l'existence de systèmes ayant une statistique intermédiaire.

Abstract

We are interested in the analytical aspects of the spectral statistics of quantum diffractive systems. Dynamical systems have a classical behaviour which ranges from integrable to chaotic or intermediate, and there seems to be a correspondence between this classical behaviour and the quantum properties of the system: the eigenvalues of the Hamiltonian for integrable systems are generally distributed like independent random variables (the energy levels have a Poisson distribution), whereas for chaotic systems the energy levels are distributed as eigenvalues of matrices with random coefficients. Other conjectures describe a new kind of spectral statistics, which we call intermediate statistics. Though there is a lot of numerical evidence in favour of these conjectures, few analytical arguments have been obtained.

This work is a study of the spectral correlation functions of systems which numerically display intermediate statistics: systems perturbed by a singularity (infinitely small scattering center (delta-like potential), singular corner in a billiard, Aharonov-Bohm flux line) or pseudo-integrable systems. It was possible to analytically obtain the expression of the form factor at the origin for some specific systems: rectangular or circular billiard with Aharonov-Bohm flux line, triangular billiards with “Veech property”, barrier billiards. The analytical results agree with numerics and support the existence of a statistical behaviour common to all these systems.

In order to obtain the whole expansion of the form factor the contribution of diffractive orbits must be taken into account. We use a semiclassical method which allows to resum all contributions of interactions between periodic and diffractive orbits, and obtain the analytical expansion of the form factor for a rectangular billiard with a scattering center. Moreover the nearest-neighbour spacing distribution is analytically computed for this system; its asymptotic behaviour demonstrates that such a system shares features with both integrable and chaotic systems, thus confirming the existence of systems with intermediate statistics.

Remerciements

Comme tout travail effectué en collaboration, le présent texte ne saurait se dispenser des traditionnels remerciements: d’abord pour restituer à chacun une part du mérite qui lui revient; ensuite parce que la lecture d’un tel ouvrage, que la famille et les amis, toujours bienveillants, ne manqueront pas d’entamer, ne dépasse que très rarement ces quelques lignes, et que je souhaite vivement qu’ils y puissent trouver la reconnaissance qui leur est due pour la part essentielle qu’ils ont pris à l’aboutissement de ce travail.

Une personne mérite d’être mise en avant. Directeur de thèse à la fois toujours passionné et infiniment disponible, Eugène Bogomolny a veillé en permanence à me rappeler que “dès qu’on ne s’amuse plus, il faut passer à autre chose”. En ne ménageant pas son temps pour me guider dans les méandres du chaos, et en utilisant le mot “jouer” comme synonyme pour “travailler”, il a su donner à ces trois années un caractère ludique extrêmement plaisant.

De son côté, Charles Schmit, avec qui tout mon travail est en collaboration, a su démontrer tout son talent pour l’art numérique, et rester lui aussi toujours disponible face à mes demandes les plus extravagantes, n’épargnant ni sa peine ni son humour.

Je veux ici remercier Vincent Rivasseau pour avoir accepté de présider mon jury, John Hannay et André Voros pour avoir eu le courage de lire un manuscrit parfois ingrat et pour avoir attiré mon attention sur quelques points obscurs du texte. Je remercie Dominique Delande pour avoir bien voulu participer à mon jury.

De nombreux membres du Laboratoire de Physique Théorique et Modèles Statistiques ont pu être victimes de vols ou d’emprunts de livres, d’articles, d’explications ou de conseils: Oriol Bohigas, Claude Jacquemin, Patricio Leboeuf, Nicolas Pavloff, Peter Schlagheck, Christophe Texier, Denis Ullmo se reconnaîtront; qu’ils en soient remerciés, et avec eux tous les membres du laboratoire qui ont contribué à en faire un lieu où règne une ambiance amicale et propice au travail. A ce titre, je salue le rôle de nos deux directeurs successifs, Alain Comtet puis Stéphane Ouvry, ainsi que celui de Martine Thouvenot, toujours présente pour déjouer les pièges administratifs.

Ma pensée va bien entendu vers mes nombreux compagnons de thèse: Florent Krzakala, Markus Müller, Alejandro Monasterio, Sofian Teber, Raphaël Voituriez; et je garde pour la fin Olivier Brodier, dont j’ai pendant trois ans partagé le bureau, les fou-rires, les délires et les airs musique (qu’Hubert Krivine soit remercié à ce propos pour la patience et l’endurance dont il a fait preuve en tant que voisin, face à des débordements sonores parfois excessifs). Je tiens également à remercier Samuel Lelièvre, qui m’a permis de mieux comprendre les surfaces de Veech.

Mais on ne mène pas à bout un travail de thèse sans l’affection de son entourage. Je tiens

donc à exprimer tout ce que je dois à Philippe, qui m'a accompagné pendant ces deux dernières années; à Yves et Marie-Jo, ses parents, dont l'hospitalité exemplaire n'a jamais été démentie; à Thomas Risler, avec qui des discussions scientifiques ou musicales ont souvent prolongé nos soirées au-delà du raisonnable; à Maï Dinh et Patrice Bertet, autres compagnons de sciences; à mes amis Arnaud, Nicolas et Stéphane, détourneurs du droit chemin; et à tous ceux, parents ou amis, qui m'ont accompagné et su rendre plus plaisant ce parcours.

Table des matières

Introduction générale	1
I Rappel du cadre théorique	9
1 Mécanique classique	11
1.1 Mécanique lagrangienne	11
1.2 Description des trajectoires classiques	12
1.3 Matrice de monodromie	13
1.4 Systèmes intégrables, chaotiques,...	15
1.5 Conclusion	18
2 Mécanique quantique	19
2.1 Les problèmes quantiques	19
2.2 Les outils statistiques	20
2.3 Les conjectures	24
2.4 Conclusion	30
3 Modèles pour les systèmes intermédiaires	31
3.1 Modèle semi-poissonien	31
3.2 Modèle d'Anderson	32
3.3 Interpolation entre Wigner-Dyson et Poisson	33
3.4 Modèle SRPM	34
3.5 Modèle de Gaudin	35
3.6 Conclusion	35
4 Formules de trace	37
4.1 Fonction de Green quantique	37
4.2 Fonction de Green semi-classique	39
4.3 Densité de niveaux	41
4.4 Formules de traces	42
4.5 Exemples d'application	46
4.6 Limitations des formules de trace	47

5	Diffraction	49
5.1	Modèle	49
5.2	Contributions diffractives à la formule des traces	50
5.3	Corrections diffractives près de la frontière optique	52
5.4	Conclusion	54
6	Interactions d'orbites périodiques	55
6.1	Interactions de densités	55
6.2	Approximation diagonale et hors-diagonale	57
6.3	Conclusion	59
II	Etude détaillée de systèmes spécifiques	61
7	Systèmes intégrables perturbés	65
7.1	Le modèle du billard de Šeba	65
7.2	Interprétation par les fonctions de Green	66
7.3	Problèmes de renormalisation	68
7.4	Autres systèmes se modélisant de la même façon	68
7.5	Résultats numériques antérieurs	69
7.6	Résultats analytiques	69
7.7	Facteur de forme	71
7.8	Conclusion	72
8	Quelques systèmes pseudo-intégrables	73
8.1	Lignes de flux Aharonov-Bohm	73
8.2	Billards polygonaux	76
8.3	Billards triangulaires	76
8.4	Billards de Veech	77
8.5	Billards avec barrière	83
8.6	Conclusion	84
Article 1 - Periodic Orbit Contribution to the 2-Point Correlation Form Factor for Pseudo-Integrable Billiards		85
Article 2 - Nearest-Neighbor Distribution for Singular Billiards		131
Article 3 - Semiclassical Calculations of the Two-Point Correlation Form Factor for Diffractive Systems		149
III	Annexes	177
A	Trace formula for integrable systems	179
A.1	Computation of the smooth term	179
A.2	Computation of the prefactor	180

A.3	The density of periodic orbits	181
A.4	Computation of the form factor	184
B	Berry's bootstrap	187
B.1	Development of the action up to the second order	187
B.2	The saddle-point manifold	189
B.3	Integration over the smooth-term manifold	192
C	Form Factor for a Circular Billiard	197
C.1	The Green function in the free case	197
C.2	The density of states in the free case	198
C.3	Another way to compute the density of states	201
C.4	The form factor in the free case	203
C.5	The Green function in the Aharonov-Bohm case	203
C.6	The 2-point correlation form factor	208
D	Facteur de forme en 0 pour un billard avec barrière	211
E	Transmission par une jonction	215
E.1	Expression de la conductance	215
E.2	La matrice S	216
E.3	Perturbation pour le billard rectangulaire	218
E.4	Amplitudes de transition	221
	Bibliographie	230
	Références bibliographiques	230

Introduction générale

Dans son *Essai philosophique sur les probabilités*, le philosophe et mathématicien français Pierre Simon de Laplace écrit en 1776 que “si nous concevons une intelligence qui, pour un instant donné, embrasse tous les rapports des êtres de cet univers, elle pourra déterminer pour un temps quelconque pris dans le passé ou dans l’avenir la position respective, les mouvements, et, généralement, les affections de tous ces êtres”. L’idée du déterminisme laplacien prévaut jusqu’à la fin du XIX^{ème} siècle, au moment où le mathématicien Jacques Hadamard met en évidence des systèmes dont l’évolution dépend fortement des conditions initiales, ce qui rend impossible toute prédiction à long terme. Dans *Science et méthode* (1908), Henri Poincaré reconnaît qu’ “une cause très petite, qui nous échappe, détermine un effet considérable que nous ne pouvons pas ne pas voir, et alors nous disons que cet effet est dû au hasard”. Les systèmes classiques sont donc sensibles aux conditions initiales, ce qui fait que leur évolution est imprédictible et que très vite, le chaos apparaît. Cela a conduit à l’émergence de nouvelles branches de la Physique, comme l’étude des systèmes stochastiques, dont le but est de trouver, par une approche statistique des phénomènes, les lois qui gouvernent le chaos.

Poincaré précise qu’il existe des systèmes, qu’il appelle intégrables, dont les équations du mouvement peuvent être rendues équivalentes, par un changement de variables approprié, à un ensemble de systèmes indépendants à un seul degré de liberté. Pour les systèmes à 1 degré de liberté, les équations du mouvement admettent une solution analytique exacte: les équations du mouvement des systèmes intégrables peuvent donc être résolues exactement. Dans ces systèmes dits intégrables, les trajectoires sont neutres et forment des familles. En revanche, les systèmes dont les équations du mouvement sont non-linéaires n’admettent pas en général de solution exacte, et sont alors qualifiés de non-intégrables. Les trajectoires y sont en général isolées, et chaotiques, c’est-à-dire que deux trajectoires initialement très proches peuvent diverger rapidement. Ainsi, l’atome d’hydrogène, dont la description peut se faire classiquement par un modèle à deux corps, est un système intégrable, tandis que l’atome d’hélium, plus complexe, est non-intégrable: une description statistique de son comportement devient plus adaptée. Cette distinction établit donc, pour le monde de la Mécanique classique, deux classes, l’une regroupant les systèmes intégrables, dont les équations du mouvement sont résolubles et qui sont gouvernés par la prédictibilité, et l’autre comprenant tous les systèmes non-intégrables, dont le chaos semble la principale caractéristique. Cette classification, on le verra, demande à être affinée.

A l’imprédictibilité que confère au monde cet indéterminisme fondamental des systèmes non-intégrables s’est ajoutée, au début du XX^{ème} siècle, la révolution quantique. Le principe d’incertitude de Heisenberg rend impossible tout déterminisme microscopique, à cause de l’impossibilité de connaître avec précision simultanément l’impulsion et la position d’une particule. Toutefois,

la notion de trajectoire perd son sens en Mécanique quantique, et l'évolution d'un système est gouvernée par l'équation de Schrödinger, qui est une équation linéaire permettant de décrire dans un même formalisme l'atome d'hydrogène et celui d'hélium. Le Hamiltonien, et bien entendu les fonctions propres et les valeurs propres correspondantes, décrivent le système et contiennent l'information sur son évolution. Cette description est, par nature, probabiliste, puisque la fonction d'onde représente une amplitude de densité de probabilité. Mais la connaissance des fonctions et valeurs propres ne nécessite plus la description statistique qui, en Mécanique classique, permettait de pallier la méconnaissance que l'on avait de l'évolution des systèmes. La Mécanique quantique semble donc ignorer la distinction qu'avait établie la Mécanique classique entre les systèmes intégrables et chaotiques.

Pourtant, en étudiant plus en détail la structure des données expérimentales provenant de la diffusion de neutrons sur des noyaux atomiques lourds, on a constaté que de tels processus, chaotiques, présentaient une distribution locale de niveaux d'énergie qui coïncidait avec celle des valeurs propres de matrices à coefficients aléatoires, tandis que des systèmes plus simples, intégrables, comme un électron dans une boîte rectangulaire, présentaient une distribution locale de niveaux d'énergie comparable à celle de variables aléatoires indépendantes, très différente de la précédente. Au début des années 1980 est ainsi apparue l'idée qu'il y avait bien une manifestation quantique des caractéristiques classiques d'intégrabilité ou de chaoticité d'un système, cette manifestation se traduisant par la nature de la distribution locale des niveaux d'énergie.

L'étude numérique ou expérimentale d'un grand nombre de systèmes confirme l'existence de deux classes pour la distribution des niveaux d'énergie, correspondant aux deux classes des systèmes classiques intégrables ou chaotiques: tous les systèmes classiquement chaotiques d'une part, tous les systèmes classiquement intégrables d'autre part, ont un comportement quantique semblable. On peut s'interroger sur l'origine de cette correspondance, qui traduit un lien profond entre le monde classique et le monde quantique. On sait que la Mécanique classique peut être vue comme la limite de la Mécanique quantique lorsque la constante de Planck, vue comme un paramètre, tend vers 0. Il est donc naturel que, pour des valeurs assez petites de ce paramètre, les caractéristiques classiques des systèmes quantiques commencent à émerger. Si l'on considère un électron dans une boîte, on peut construire une certaine combinaison linéaire de fonctions d'onde qui décrit quantiquement sa densité de probabilité de présence en chaque point de la boîte. Cette densité de probabilité de présence se localise (c'est-à-dire prend des valeurs plus importantes), à la limite classique, sur les trajectoires classiquement autorisées. Le système quantique "sait" donc, d'une façon ou d'une autre, quelles sont les trajectoires du système classique qui lui est associé, et il est assez naturel que le comportement statistique des niveaux d'énergie quantiques soit, dans une certaine mesure, relié au le comportement classique du système.

Le comportement quantique d'un système semble ainsi déterminé en partie par sa nature classique. Mais au-delà des systèmes intégrables ou chaotiques, on s'est aperçu que la classe des systèmes classiquement non-intégrables comprenait une grande diversité de systèmes. En particulier, ils peuvent présenter des degrés divers de chaos, certains même n'étant pas chaotiques. Ces systèmes à la fois non-intégrables et non-chaotiques présentent des caractéristiques classiques intermédiaires entre celles des systèmes intégrables et celles des systèmes chaotiques: par exemple, les trajectoires apparaissent sous forme de familles, mais les équations du mouvement ne sont pas résolubles. L'étude quantique de certains de ces systèmes, notamment de systèmes diffractifs, a

montré que, pour beaucoup, la distribution de niveaux d'énergie présentait, elle aussi, des caractéristiques intermédiaires entre les deux distributions "universelles" précédemment évoquées. Les statistiques correspondantes seront désignées sous le terme de "statistiques intermédiaires". Elles vérifient en particulier la caractéristique de "répulsion de niveaux", c'est-à-dire une probabilité nulle d'avoir deux niveaux d'énergie infiniment proches l'un de l'autre, comme pour les valeurs propres des matrices aléatoires; en outre, il y a une décroissance exponentielle de la distribution des plus proches voisins, comme pour les niveaux d'énergie d'un système intégrable. Des résultats, principalement numériques, ont été obtenus, et des modèles ont été proposés pour décrire de façon convaincante ces résultats numériques. Mais jusqu'ici manquaient les résultats analytiques confirmant l'existence de systèmes quantiques présentant des statistiques intermédiaires.

Le but de ce travail est d'étudier les éléments analytiques permettant de mieux comprendre quelles sont réellement les caractéristiques des statistiques intermédiaires, de vérifier si les modèles déjà proposés en permettent une description satisfaisante, et de cerner dans quelle mesure on peut s'attendre à ce que des systèmes très divers puissent être regroupés et décrits par ces statistiques. Deux types d'approche analytique sont envisagés ici: soit un calcul exact; soit des calculs basés sur l'approximation semi-classique, qui donne une formulation approchée de la Mécanique quantique à la limite classique, et permet ainsi de mettre en relation les aspects quantiques et classiques.

Les systèmes étudiés ici sont des systèmes diffractifs. Ces systèmes sont soit des systèmes intégrables perturbés par un centre de diffraction (billard de Šeba), soit des systèmes tels que la dynamique classique diffère de celle des systèmes intégrables, tout en conservant certaines propriétés. A des fins de simplicité, nous allons étudier plus particulièrement des billards plans (bidimensionnels) euclidiens, qui sont une région du plan euclidien bornée par des parois impénétrables, sur lesquelles une particule subit des réflexions élastiques. L'intérêt des billards est que, malgré leur simplicité, ils reproduisent les principaux traits des systèmes hamiltoniens génériques, et que l'on peut y observer tous les types de comportements statistiques évoqués précédemment.

La première partie présente les outils nécessaires à cette étude analytique: on présente tout d'abord au chapitre 1 le formalisme permettant la description classique d'un système dynamique, en rappelant les bases de la mécanique lagrangienne et les principales caractérisations possibles des trajectoires classiques. Cette description classique de la dynamique permet alors de définir les notions de système intégrable et de système chaotique, ce qui établit une classification des systèmes dynamiques classiques: certains systèmes ont un comportement classique "simple" (systèmes intégrables), d'autres un comportement "compliqué" (systèmes chaotiques); les autres ont un comportement que l'on peut qualifier d' "intermédiaire".

Au chapitre 2, nous définissons le problème quantique correspondant, qui est l'étude d'une particule évoluant librement dans un domaine de l'espace (et éventuellement soumise à un potentiel), et en particulier la recherche de ses fonctions propres et valeurs propres. Nous allons ici nous intéresser uniquement aux propriétés statistiques de l'ensemble des valeurs propres. Afin d'étudier ces propriétés, il est nécessaire d'introduire des quantités permettant de décrire la statistique. Ce sont principalement les fonctions de corrélation, le facteur de forme, l'espacement moyen entre niveaux d'énergie consécutifs ou entre niveaux d'énergie séparés par un nombre donné de niveaux. De nombreuses études numériques ont montré que ces fonctions qui décrivent la statistique quantique des niveaux d'énergie se comportent de façon très différente selon que

le système classique correspondant est intégrable ou chaotique: nous rappelons au chapitre 2 les conjectures existantes, relatives aux systèmes intégrables (conjecture de Berry-Tabor) et chaotiques (conjecture de Bohigas-Giannoni-Schmit).

Les caractéristiques quantiques des systèmes non-intégrables et non-chaotiques sont différentes à la fois des caractéristiques des systèmes intégrables et de celles des systèmes chaotiques, même si elles leur empruntent certains traits. Il serait intéressant de parvenir à décrire ces systèmes par un modèle présentant les caractéristiques des statistiques intermédiaires (répulsion de niveaux et décroissance exponentielle de la distribution des plus proches voisins). Les modèles tentant de décrire, ou de reproduire, ces caractéristiques (ou une partie d'entre elles) sont présentés au chapitre 3. Ces modèles sont en accord avec les données numériques connues. Mais en l'absence de résultats analytiques, on ne peut pas en tester de façon convaincante la validité.

Dans le but d'obtenir des résultats analytiques, on utilise la correspondance entre Mécanique classique et Mécanique quantique, qui repose sur une approximation de la fonction de Green permettant, à la limite semi-classique, d'exprimer la densité des niveaux d'énergie d'un système quantique en fonction des trajectoires du système classique. Cette correspondance, appelée "formule de trace", est présentée au chapitre 4: on rappelle les principes de bases permettant la dérivation de la formule de trace de Gutzwiller, que l'on applique dans le cas de systèmes chaotiques ou intégrables (formule de trace de Berry), ce qui permet d'obtenir une formulation semi-classique de la densité de niveaux d'énergie lorsqu'on connaît les trajectoires périodiques du système classique et leurs caractéristiques.

Dans le cas des systèmes diffractifs, qui sont ceux que nous allons étudier, il convient de modifier cette formule de trace. Les systèmes diffractifs sont des systèmes dans lesquels la présence d'une singularité affecte la dynamique classique en ceci qu'il n'y a pas une manière unique de prolonger une trajectoire qui atteint la singularité. C'est le cas des billards polygonaux dont un des angles au sommet n'est pas un sous-multiple de π , de billards comportant une impureté ponctuelle, ou de billards traversés par une ligne de flux Aharonov-Bohm. L'intérêt de tels systèmes est que l'utilisation des formules de trace semi-classiques est encore possible, moyennant la prise en compte des trajectoires diffractives. La modification des formules de trace nécessaire pour tenir compte de la diffraction est présentée au chapitre 5. On obtient ainsi la densité de niveaux d'énergie comme une somme sur toutes les orbites périodiques et diffractives du système.

Les techniques nécessaires à l'utilisation de ces formules de trace dans le calcul des quantités quantiques qui nous intéressent (distribution des plus proches voisins, facteur de forme) sont développées au chapitre 6 (calcul des interactions entre trajectoires classiques dans l'approximation diagonale ou au-delà). Nous généralisons ces méthodes à des systèmes classiquement intégrables en présence de perturbation.

La partie centrale de la thèse est la deuxième partie, qui est consacrée à l'étude approfondie de systèmes diffractifs. On considère des systèmes particuliers dont la statistique apparaît numériquement comme intermédiaire, et on cherche à établir analytiquement l'existence de cette statistique intermédiaire. L'approximation semi-classique présentée au chapitre 4 permet d'aborder la description quantique des systèmes dont on sait décrire le comportement classique. Afin de profiter de cette correspondance, nous étudions soit des systèmes dont les trajectoires classiques sont connues (billard rectangulaire ou circulaire) et soumis à une perturbation, soit des systèmes pour lesquels l'existence d'une structure mathématique sous-jacente permet d'accéder

à la connaissance des trajectoires classiques et de leurs caractéristiques.

L'objectif est de montrer qu'il existe des systèmes où coexistent, pour la distribution des plus proches voisins, les deux caractéristiques de répulsion de niveaux et de décroissance exponentielle, et de mettre en évidence l'existence de systèmes pour lesquels le facteur de forme, fonction permettant de décrire la statistique des niveaux d'énergie, prend des valeurs différentes de celles obtenues pour les systèmes intégrables et chaotiques.

On considère au chapitre 7 des systèmes classiquement intégrables munis d'un centre diffracteur (dont le modèle le plus simple est le billard de Šeba). Ces systèmes sont affectés par une perturbation ponctuelle qui, classiquement, ne modifie pas leurs trajectoires (ou plus exactement n'en modifie qu'un ensemble de mesure nulle); ils voient en revanche se modifier leurs caractéristiques quantiques. Le billard de Šeba, s'il est chaotique en l'absence de perturbation, reste chaotique lorsque l'on ajoute une impureté; toutefois, si le système est intégrable en l'absence de perturbation, la statistique de ses niveaux d'énergie n'est plus celle des systèmes intégrables en présence de l'impureté. Il a été montré que le comportement asymptotique de la fonction de corrélation à deux points de la densité de niveaux d'énergie s'annule en zéro pour le billard de Šeba, ce qui implique une répulsion des niveaux; il est prouvé dans cette thèse que ce système présente également une décroissance exponentielle en l'infini de la distribution des plus proches voisins, ce qui met en évidence analytiquement l'existence d'un système dont la statistique présente les caractéristiques des statistiques intermédiaires.

On s'intéresse ensuite au calcul du facteur de forme. Pour les systèmes intégrables, on sait montrer (le calcul est fait en annexe dans le cas général, dans le cadre de l'approximation semi-classique) que la valeur du facteur de forme correspond à celle prévue par la conjecture de Berry-Tabor. Dans le cas des systèmes chaotiques, le calcul est beaucoup plus délicat et se borne aux premiers ordres du développement asymptotique du facteur de forme. Les systèmes diffractifs, quant à eux, offrent l'opportunité d'un calcul à tout ordre du facteur de forme: en développant une méthode permettant de resommer les contributions diagonales et hors-diagonales des interactions entre orbites périodiques et diffractives, il a été possible d'obtenir à tout ordre le développement en série du facteur de forme pour un système diffractif.

Du calcul du facteur de forme pour des billards classiquement intégrables perturbés par la présence d'une singularité dont le coefficient de diffraction reste fini, on déduit que sa valeur à l'origine est la même que pour les systèmes intégrables. Il reste donc à mettre en évidence des systèmes pour lesquels la valeur du facteur de forme à l'origine diffère à la fois de celle obtenue pour les systèmes intégrables et de celle correspondant aux systèmes chaotiques. C'est l'objet du chapitre 8, où l'on considère d'une part des systèmes classiquement intégrables perturbés par une ligne de flux Aharonov-Bohm, d'autre part des systèmes pseudo-intégrables, qui classiquement sont non-intégrables et non-chaotiques. Tous ces systèmes présentent numériquement des statistiques intermédiaires. Analytiquement, le calcul du facteur de forme à l'origine est rendu possible grâce à l'existence de structures mathématiques sous-jacentes qui permettent de décrire les orbites périodiques du système. Les divers cas envisagés (rectangle ou disque traversé par une ligne de flux, billards triangulaires, billards avec barrière) montrent que ces systèmes ont un facteur de forme à l'origine dont la valeur correspond à celles d'une statistique intermédiaire.

Les trois articles présentés à la fin de la deuxième partie contiennent la démonstration détaillée des résultats analytiques obtenus. L'article 1 présente le calcul semi-classique du facteur

de forme à l'origine pour un certain type de billards triangulaires, ainsi que pour un billard rectangulaire traversé par une ligne de flux. Ces calculs ne font intervenir que les orbites périodiques du système, et mettent en évidence le fait que la valeur du facteur de forme à l'origine, pour ces systèmes qui ne sont ni intégrables ni chaotiques, diffère des valeurs conjecturées pour les systèmes intégrables et les systèmes chaotiques. Les deux articles suivants étudient les propriétés statistiques des niveaux d'énergie d'un billard bidimensionnel rectangulaire contenant un centre diffracteur ponctuel. Dans l'article 2, on calcule la distribution des plus proches voisins, et notamment son comportement asymptotique à grande distance, qui révèle une décroissance exponentielle. L'article 3 présente le calcul semi-classique du facteur de forme, dont on obtient le développement à tout ordre en τ en prenant en compte toutes les contributions dues aux orbites périodiques et aux orbites diffractives.

On a adjoint à ces articles, en troisième partie, des travaux en préparation qui donnent plus de détails sur les résultats obtenus: calcul du facteur de forme à l'origine pour un billard circulaire traversé par une ligne de flux (annexe C), calcul du facteur de forme à l'origine pour un billard avec barrière (annexe D), et étude de la diffusion d'une particule à travers une jonction (annexe E). Ce dernier problème est relié à ceux évoqués ci-dessus dans la mesure où la conductance de la jonction présente expérimentalement des fluctuations qui proviennent des interactions entre trajectoires classiques à l'intérieur de la jonction.

L'ensemble des résultats analytiques obtenus tendent à appuyer l'existence d'une classe de systèmes qui ont un comportement classique qui n'est ni intégrable ni chaotique, et un comportement quantique qui suit une statistique "intermédiaire". La signature de cette statistique serait, entre autres, une répulsion des niveaux d'énergie (c'est-à-dire une probabilité nulle d'avoir deux niveaux d'énergie infiniment proches l'un de l'autre), une décroissance exponentielle de la distribution des plus proches voisins, et un facteur de forme à l'origine compris entre 0 et 1, c'est-à-dire intermédiaire entre les valeurs attendues pour le spectre des systèmes chaotiques et pour celui des systèmes intégrables.

L'article 2, avec les résultats de [1], en décrivant la distribution des plus proches voisins pour un billard rectangulaire perturbé par un centre diffracteur ponctuel, confirme analytiquement l'existence de systèmes présentant à la fois une répulsion de niveaux et une décroissance exponentielle de la distribution des plus proches voisins.

L'article 1 et les annexes C et D montrent que des systèmes très divers peuvent présenter une valeur du facteur de forme à l'origine comprise entre 0 et 1.

Afin de pouvoir examiner plus en détail les propriétés quantiques des systèmes diffractifs, l'expression complète du facteur de forme est souhaitable. Lorsque le coefficient de diffraction reste fini dans toutes les directions, les contributions des orbites diffractives donnent le développement à tout ordre du facteur de forme. La valeur à l'origine de ce facteur de forme correspond à la contribution des trajectoires périodiques, et est donc égale à ce que l'on obtient en l'absence de perturbation. Les corrections diffractives, aux ordres suivants, montrent que, même lorsque seul un ensemble de mesure nulle parmi les trajectoires classiques est perturbé, le facteur de forme est affecté par la perturbation. Par ailleurs, les méthodes semi-classiques développées pour ce calcul donnent un résultat semblable à celui obtenu par l'approximation de calculs exacts

dans un cas particulier, confirmant la pertinence de l'approche semi-classique pour l'étude de tels problèmes. La prise en compte des interactions diagonales et non-diagonales entre orbites périodiques et diffractives permet d'obtenir un développement à tout ordre du facteur de forme pour un système diffractif générique dont le coefficient de diffraction reste fini dans toutes les directions.

Les méthodes développées ne sont pas applicables si le coefficient de diffraction diverge dans certaines directions. C'est le cas pour les billards triangulaires étudiés, ou pour les billards avec ligne de flux. Cette divergence nécessite une resommation plus subtile de toutes les contributions diffractives. La résolution de ce problème fait appel à des techniques différentes de celles utilisées ici et n'entre pas dans le cadre de cette étude.

Première partie

Rappel du cadre théorique

Chapitre 1

Mécanique classique

1.1 Mécanique lagrangienne

La mécanique classique moderne trouve une formulation naturelle dans la mécanique lagrangienne. Celle-ci suppose que le mouvement d'une particule dans un espace à N dimensions est caractérisé par le vecteur position q et sa dérivée $\dot{q}$ par rapport au temps; leur évolution au cours du temps est déterminée par la donnée d'un Lagrangien $\mathcal{L}(q(t), \dot{q}(t), t)$. Pour une trajectoire donnée dans l'espace des phases commençant au point q_i au temps t_i et finissant en q_f à t_f , on définit l'action par

$$R(q_f, t_f; q_i, t_i) = \int_{t_i}^{t_f} \mathcal{L}(q(t), \dot{q}(t), t) dt. \quad (1.1)$$

Le mouvement classique est régi par le Principe de moindre action, spécifiant que la trajectoire de l'espace des phases effectivement suivie par la particule est celle dont l'action (1.1) est extrémale. Cette condition implique que les points de l'espace des phases effectivement parcourus vérifient à chaque instant

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = 0. \quad (1.2)$$

Ce sont les équation d'Euler-Lagrange. Pour les trajectoires vérifiant ces équations, on a $R[q(t)] = R(q_i, q_f)$: l'action (1.1) associée à une trajectoire ne dépend pas du chemin suivi. On définit alors la variable p , variable conjuguée de q , par

$$p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \quad (1.3)$$

et on appelle Hamiltonien la transformée de Legendre du Lagrangien:

$$\mathcal{H} = p\dot{q} - \mathcal{L}. \quad (1.4)$$

C'est une fonction de q , p et t . Si le Lagrangien ne dépend pas du temps, $\mathcal{H}$ ne dépend que de q et p . Les théories que l'on envisagera ici décrivent le mouvement d'une particule dans un potentiel: la forme générale du Hamiltonien sera

$$\mathcal{H}(q, p) = \frac{p^2}{2} + V(q), \quad (1.5)$$

p étant éventuellement remplacé par $p - qA$ en présence d'un champ magnétique de potentiel vecteur A .

Le long des trajectoires classiques, qui vérifient donc les équations de Lagrange (1.2), le Hamiltonien reste constant: $d\mathcal{H}/dt = 0$. De plus les trajectoires classiques vérifient les équations de Hamilton, provenant de (1.2) et (1.5):

$$\begin{cases} \dot{q} &= \partial\mathcal{H}/\partial p \\ \dot{p} &= -\partial\mathcal{H}/\partial q. \end{cases} \quad (1.6)$$

Par conséquent une fonction $f(q,p,t)$ est indépendante du temps le long d'une trajectoire classique si

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \{\mathcal{H}, f\}_{p,q} = 0 \quad (1.7)$$

où on a introduit les crochets de Poisson

$$\{f, g\}_{p,q} = \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} - \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} \right). \quad (1.8)$$

Les quantités indépendantes du temps au cours du mouvement sont appelées intégrales premières.

1.2 Description des trajectoires classiques

Un système dynamique dont l'évolution est décrite par un Hamiltonien sera caractérisé par la donnée des solutions $(q(t), p(t))$ des équations de Hamilton (1.6) avec conditions initiales (q_0, p_0) données. Ces solutions définissent des trajectoires dans l'espace des phases, dont les caractéristiques peuvent être décrites à l'aide des grandeurs suivantes.

1.2.1 Exposant de Lyapunov

Pour caractériser dans un système dynamique la sensibilité des trajectoires aux conditions initiales, ou plus précisément la propension qu'ont des trajectoires avec conditions initiales voisines à diverger, on définit l'exposant de Lyapunov pour une trajectoire classique partant d'un point q_0 par

$$\lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \lim_{\|\delta q_0\| \rightarrow 0} \ln \frac{\|\delta q_t\|}{\|\delta q_0\|}. \quad (1.9)$$

(A priori, λ dépend du point initial q_0). En d'autres termes, deux trajectoires distantes initialement de $\|\delta q_0\|$ et évoluant pendant un temps t seront séparées (asymptotiquement, i.e. pour des temps assez longs) par une distance $\|\delta q_0\|e^{\lambda t}$.

1.2.2 Ergodicité

La quantité (1.4) est une intégrale première. Lorsqu'elle est la seule, le mouvement se fait, dans l'espace des phases, sur l'hypersurface de dimension $2N - 1$ d'énergie constante. Lorsque presque toutes les trajectoires classiques couvrent toute cette surface d'énergie constante (c'est-à-dire passent infiniment près de chacun de ses points) le mouvement est dit ergodique. On peut alors montrer que pour presque toutes les conditions initiales du mouvement (c'est-à-dire pour presque tous les points de départ dans l'espace des phases), la moyenne d'une fonction sur la trajectoire est égale à la moyenne sur la surface d'énergie constante. Mathématiquement, cela s'exprime grâce à l'équation

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(q(t), p(t)) dt = \int d\mu f(q, p) \quad (1.10)$$

où $d\mu$ est la mesure de Liouville

$$d\mu = \frac{dqdp \delta(E - H(q,p))}{\int dqdp \delta(E - H(q,p))}. \quad (1.11)$$

Il peut cependant exister des familles d'orbites périodiques neutres, ainsi que des orbites périodiques isolées instables.

1.2.3 Entropie topologique

On définit [2] l'entropie topologique d'un système dynamique comme la constante κ telle que le nombre d'orbites périodiques de période inférieure à T est

$$N(T_p < T) \sim \frac{e^{\kappa T}}{\kappa T}. \quad (1.12)$$

Cette constante caractérise la prolifération des orbites périodiques.

1.2.4 Propriété de “mélange”

Un système dynamique $T^t : x_0 \mapsto x(t) = (q(t), p(t))$ défini sur l'espace des phases $\mathcal{M}$ muni de la métrique μ est dit mélangeant si, pour tout couple (f, g) de fonctions L^2 de l'espace des phases, on a la propriété

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left[\int_{\mathcal{M}} d\mu(x) f(T^t x) g(x) - \int_{\mathcal{M}} d\mu(x) f(x) \int_{\mathcal{M}} d\mu(x) g(x) \right] = 0, \quad (1.13)$$

c'est-à-dire si la fonction de corrélation connexe temporelle s'annule aux temps longs. Il est dit “faiblement mélangeant” si, pour tout couple (f, g) de fonctions L^2 , on a

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t d\tau \left[\int_{\mathcal{M}} d\mu(x) f(T^\tau x) g(x) - \int_{\mathcal{M}} d\mu(x) f(x) \int_{\mathcal{M}} d\mu(x) g(x) \right]^2 = 0 \quad (1.14)$$

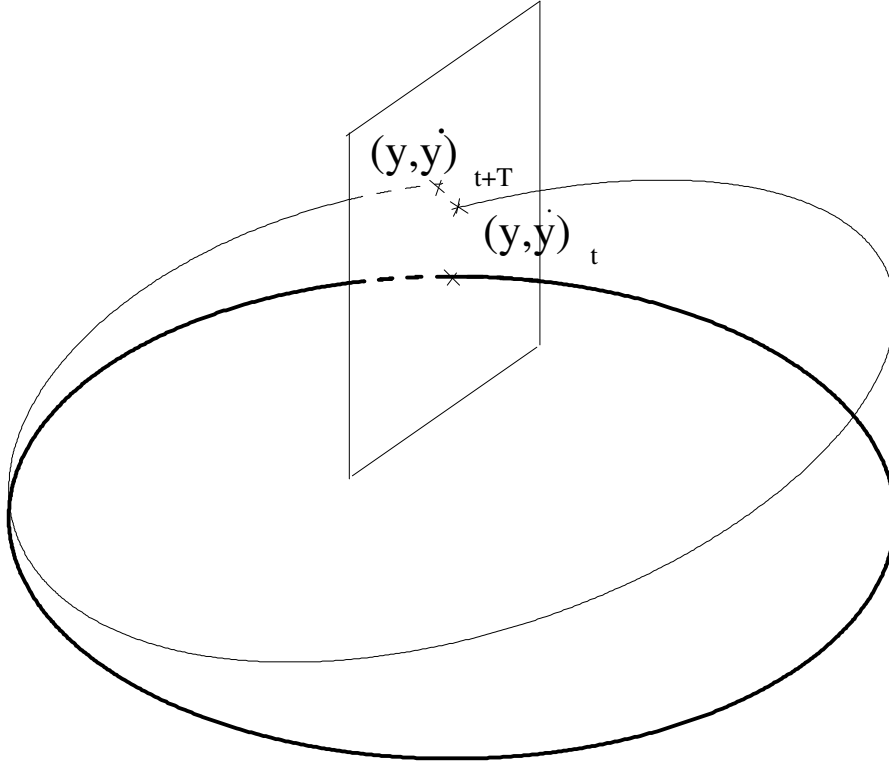
(voir [3] pour plus de détail sur ces notions).

1.3 Matrice de monodromie

La matrice de monodromie est la matrice exprimant la solution des équations classiques du mouvement au voisinage d'une trajectoire classique. Si $(\bar{q}_\perp(t), \bar{p}_\perp(t))$ sont les coordonnées comptées le long d'une trajectoire classique dans le plan transverse à la trajectoire, on considère la trajectoire classique ayant pour origine le point $(q_{i\perp}, p_{i\perp}) = (\bar{q}_\perp(0) + \delta q_\perp, \bar{p}_\perp(0) + \delta p_\perp)$. La solution $(q_\perp(t), p_\perp(t))$ des équations du mouvement peut être développée au premier ordre sous la forme $(\bar{q}_\perp(t) + \delta q'_\perp(t), \bar{p}_\perp(t) + \delta p'_\perp(t))$. On note $M(t)$ la matrice $\{m_{ij}, 1 \leq i, j \leq 2N - 2\}$ vérifiant

$$\begin{pmatrix} \delta q'_\perp(t) \\ \delta p'_\perp(t) \end{pmatrix} = M(t) \begin{pmatrix} \delta q_\perp \\ \delta p_\perp \end{pmatrix} \quad (1.15)$$

La matrice de monodromie $M = M(T)$ est la matrice reliant aux conditions initiales les solutions au premier ordre des équations du mouvement au voisinage d'une orbite périodique, après une période. En dimension 2 par exemple, si on note x la coordonnée le long de l'orbite et y la

FIG. 1.1 – *Orbite au voisinage d'une trajectoire périodique*

coordonnée transverse, la période est définie par $x(t+T) = x(t)$, et la matrice de monodromie relie $(y(t+T), \dot{y}(t+T))$ à $(y(t), \dot{y}(t))$ (voir Figure 1.1):

$$\begin{pmatrix} y \\ \dot{y} \end{pmatrix}_{t+T} = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ \dot{y} \end{pmatrix}_t. \quad (1.16)$$

Les équations de Hamilton imposent que l'on ait toujours $\det M = 1$. Il y a, selon les valeurs propres λ_1 et λ_2 de la matrice de monodromie, trois types de trajectoires périodiques:

- trajectoires neutres, pour lesquelles $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ ou $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$
- trajectoires stables (ou elliptiques), pour lesquelles $\lambda_1 = e^{i\theta}, \lambda_2 = e^{-i\theta}$ avec θ réel différent de 0 ou π
- trajectoires instables (ou hyperboliques), pour lesquelles $\lambda_1 = \pm e^u, \lambda_2 = \pm e^{-u}$.

Deux exemples de calcul de matrices de monodromie sont donnés dans la section C.2.2 de l'annexe C. La matrice de monodromie correspondant à un mouvement libre est la matrice correspondant à un trajet rectiligne de longueur l parcouru avec l'énergie k^2 . On obtient, d'après l'équation (C.8),

$$M = \begin{pmatrix} 1 & l/k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.17)$$

Dans le cas de la matrice associée au mouvement libre dans un billard circulaire, le calcul est plus complexe, et le résultat est donné par l'équation (C.13).

1.4 Systèmes intégrables, chaotiques, intermédiaires

1.4.1 Systèmes intégrables

Un système intégrable en dimension N est un système tel qu'il existe N intégrales premières $\{I_1, \dots, I_N\}$ (fonctions telles que $\forall i, \{I_i, H\} = 0$, c'est-à-dire indépendantes du temps) indépendantes et en involution (c'est-à-dire telles que $\forall i, j, \{I_i, I_j\} = 0$). Alors le Hamiltonien H n'est fonction que des I_i . On appelle transformation canonique une transformation des variables (p_i, q_i) en des variables (P_i, Q_i) , qui laisse invariantes les équations de Hamilton et vérifie les trois conditions

$$\begin{aligned}\{Q_i, Q_j\}_{p,q} &= 0 \\ \{P_i, P_j\}_{p,q} &= 0 \\ \{P_i, Q_j\}_{p,q} &= \delta_{ij},\end{aligned}\tag{1.18}$$

où $\{, \}$ est le crochet de Poisson (1.8).

Le théorème de Liouville [4] montre qu'un système est intégrable si et seulement s'il existe un changement de coordonnées de $\{q_1, \dots, q_N, p_1, \dots, p_N\}$ à $\{I_1, \dots, I_N, \varphi_1, \dots, \varphi_N\}$ tel que:

- le changement de coordonnées de (q, p) à (I, φ) est canonique
- $\mathcal{H}$ ne dépend que de $I_1, \dots, I_N$.

Puisque (I, φ) vérifie les équations de Hamilton (1.6), les I_i et $\dot{\varphi}_i$ sont constants au cours du mouvement: le système comporte donc N intégrales premières. Le mouvement peut alors être "intégré" [4], c'est-à-dire que l'on peut déterminer les trajectoires $(q(t), p(t))$. De plus ce mouvement, lorsqu'il est borné, a lieu dans l'espace des phases sur des surfaces $I_1 = \text{cst}, \dots, I_N = \text{cst}$, qui ont la topologie de tores N -dimensionnels (voir la Figure 1.2); les φ_i peuvent alors être interprétés comme des angles décrivant le mouvement sur le tore. Si on note $\mathcal{C}_i$ les N circuits irréductibles sur le tore, on a

$$I_i = \frac{1}{2\pi} \oint_{\mathcal{C}_i} p \, dq.\tag{1.19}$$

Le mouvement est alors caractérisé par

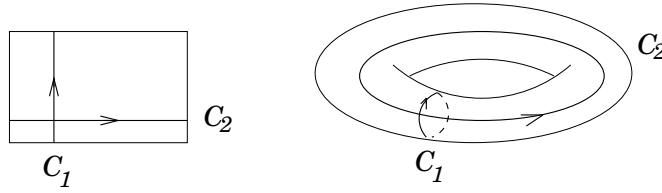
$$\varphi_i = \omega_i t + \varphi_{i0}, \quad 1 \leq i \leq N,\tag{1.20}$$

où $(\omega_1, \dots, \omega_N)$ sont N pulsations définies, d'après les équations de Hamilton, par $\omega_i(I) = \nabla_i \mathcal{H}(I)$. Chaque trajectoire est confinée à un tore $\mathcal{T}$. Si les ω_i sont incommensurables, la trajectoire va recouvrir $\mathcal{T}$ uniformément. Si en revanche les ω_i sont commensurables, i.e. $\omega_i = \lambda N_i$, N_i entier, les trajectoires sont fermées après N_i tours du lacet $\mathcal{C}_i$. Dans ce cas, elles apparaissent sous forme de familles de trajectoires parallèles.

Les systèmes intégrables forment une classe assez peu représentée de problèmes: la plupart des systèmes sont non-intégrables.

Exemples de systèmes intégrables

Le système intégrable le plus simple est celui constitué d'une particule classique dont le mouvement est confiné à un rectangle en dimension 2. Plus généralement, en dimension 2, tous les polygones qui pavent le plan par réflexions successives le long de l'une de leurs arêtes sont des

FIG. 1.2 – *Tores à 2 dimensions*

systèmes intégrables. Par exemple pour le billard rectangulaire, une trajectoire classique peut être dépliée en une ligne droite par ces mêmes réflexions successives. Les intégrales du mouvement sont les I_i données par (1.19) avec les contours $\mathcal{C}_i$ de la figure 1.2. Dans le cas du rectangle $a \times b$, on a $I_1 = ap_x/2\pi$ et $I_2 = bp_y/2\pi$: le Hamiltonien s'écrit donc $\mathcal{H}(I) = (2\pi I_1)^2/a^2 + (2\pi I_2)^2/b^2$. Le billard circulaire est également un système intégrable.

1.4.2 Systèmes chaotiques

Un système chaotique est un système pour lequel l'exposant de Lyapunov (1.9) est strictement positif pour presque toutes les trajectoires, c'est-à-dire dans lequel presque toutes les trajectoires divergent exponentiellement. Une de ses caractérisations est que le nombre d'orbites périodiques de période inférieure à T croît exponentiellement [5]: les systèmes chaotiques ont donc une entropie topologique strictement positive.

Exemples de systèmes chaotiques

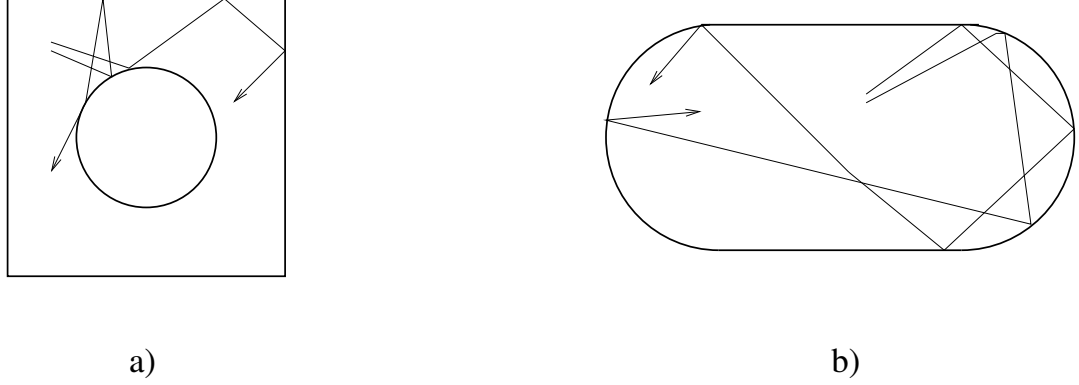
Le billard de Sinai [6] consiste en un carré à l'intérieur duquel se trouve un disque impénétrable (Figure 1.3.a). On montre que ce système est chaotique: deux trajectoires initialement voisines divergent, avec un exposant de Lyapunov moyen donné, pour les petites valeurs de R , par [7]

$$\lambda = -2 \ln(R) + C + \mathcal{O}(R \ln^2 R), \quad C = 1 - 4 \ln 2 + \frac{27}{2\pi^2} \zeta(3), \quad (1.21)$$

R étant le rayon du disque (pour un carré de côté 1). Le billard de Bunimovich (voir le billard de stade, Figure 1.3.b, qui en est un cas particulier) est un autre exemple de système chaotique très étudié.

1.4.3 Systèmes pseudo-intégrables

Il existe un cas de figure où un système à N degrés de liberté possède N intégrales du mouvement, telles qu'en certains points singuliers ces intégrales ne sont plus indépendantes. Dans ce cas le mouvement dans l'espace des phases a lieu sur une surface de genre $g \geq 2$, c'est-à-dire une sphère à g trous. Il y a alors $2g$ circuits irréductibles permettant de construire $2g$ actions de type (1.19). Le Hamiltonien peut alors être exprimé en fonction de l'un ou l'autre des

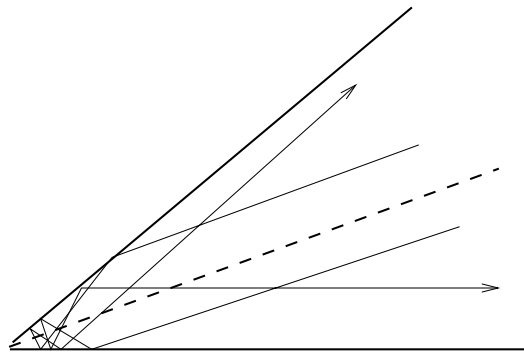
FIG. 1.3 – *Billard de Sinai et billard de Bunimovich*

N -uplets d'actions I_i . Ces systèmes ont été appelés systèmes pseudo-intégrables par Berry (voir [8] pour des exemples), ou presque-intégrables par Zemlyakov et Katok [9].

Caractérisation des systèmes pseudo-intégrables

Les systèmes pseudo-intégrables présentent avec les systèmes intégrables la caractéristique commune que les trajectoires périodiques y apparaissent sous forme de faisceaux d'orbites périodiques. Mais ils présentent comme point commun avec les systèmes chaotiques l'existence d'un certain type de "chaos". Bien que ces systèmes soient non-chaotiques au sens de la définition donnée à la section 1.4.2, la présence dans ces systèmes de singularités engendre une indétermination des trajectoires atteignant ces singularités: les faisceaux atteignant ces singularités sont divisés (voir Figure 1.4).

On peut caractériser les systèmes pseudo-intégrables par le fait qu'une trajectoire atteignant la

FIG. 1.4 – *Séparation des faisceaux d'orbites périodiques*

singularité ne peut pas être continuée de façon unique [10]. Cela est dû à la nature topologique de l'espace des phases, qui est une variété riemannienne à plusieurs feuillets.

Exemples de systèmes pseudo-intégrables

L'exemple le plus étudié est celui de billards polygonaux à deux dimensions tels que tous les angles sont de la forme $\pi m_i/n_i$. Dans le cas où le billard est simplement connexe, les trajectoires sont confinées [8] à une surface de genre

$$g = 1 + \frac{\mathcal{N}}{2} \sum_i \frac{m_i - 1}{n_i}, \quad (1.22)$$

où $\mathcal{N}$ est le plus petit multiple commun aux n_i . En général, on aura donc $g \geq 2$. L'indétermination des trajectoires provient des angles pour lesquels $m_i \neq 1$, c'est-à-dire ceux pour lesquels le dépliage de la trajectoire par réflexion le long des parois du polygone forme plusieurs feuillets.

La discussion détaillée de systèmes de ce type sera faite au chapitre 8. Nous y renvoyons le lecteur.

1.4.4 Systèmes mixtes

Mentionnons pour finir les systèmes mixtes: pour ceux-ci, une partie de l'espace des phases est chaotique, mais il existe des tores dans une autre partie de l'espace des phases. L'étude de leurs propriétés ne sera pas faite ici.

1.5 Conclusion

Il existe donc une grande variété de systèmes dynamiques classiques. Les mieux connus sont les systèmes intégrables ainsi que les systèmes chaotiques. Les systèmes ne rentrant ni dans l'une ni dans l'autre de ces deux catégories sont évidemment les plus nombreux.

La mécanique classique de ces systèmes dépend directement de leur forme; en particulier, pour les billards, la nature des trajectoires périodiques est une conséquence de la forme de la frontière. Or, en mécanique quantique, ce sont précisément les conditions aux limites qui imposent la quantification des niveaux d'énergie. On peut donc penser que la forme des systèmes va directement influencer la répartition de leurs niveaux d'énergie. L'étude de ces niveaux d'énergie fait l'objet du chapitre suivant.

Chapitre 2

Mécanique quantique

2.1 Les problèmes quantiques

On considère à présent le problème quantique associé aux systèmes évoqués précédemment. La connaissance de l'évolution du système quantique passe par la connaissance des solutions de l'équation de Schrödinger stationnaire

$$(-H + E)\psi = 0, \quad (2.1)$$

où le Hamiltonien H est obtenu à partir de $\mathcal{H}$ par le principe de correspondance. Pour une particule de masse m et de charge q dans un champ magnétique de potentiel vecteur A_μ et plongée dans un potentiel scalaire V , le Hamiltonien est

$$H = \frac{(p - qA)^2}{2m} + V(q). \quad (2.2)$$

On considérera notamment le cas important des “billards bidimensionnels”, définis par un contour fermé ∂B dans le plan, et dont le Hamiltonien est

$$H = \begin{cases} p^2/2m & \text{à l'intérieur de } \partial B \\ \infty & \text{à l'extérieur.} \end{cases} \quad (2.3)$$

L'étude de ces systèmes consiste à chercher les solutions de l'équation (2.1) pour le mouvement libre d'une particule à l'intérieur de ∂B , en imposant des conditions aux limites sur ∂B . On utilisera en particulier

- les conditions aux limites de Dirichlet: $\psi|_{\partial B} = 0$
- les conditions aux limites de Neumann; $\nabla\psi|_{\partial B} = 0$.

Dans toute la suite (sauf mention explicite), on utilisera les unités dans lesquelles $m = 1/2$ et $\hbar = 1$.

La résolution de l'équation (2.1) donne, pour le système, les fonctions propres ψ_n et les valeurs propres E_n , qui sont quantifiées dès lors que l'on impose certaines conditions aux limites. Sauf certains cas particuliers (par exemple celui du billard rectangulaire, voir Equations (4.49) et (4.50)), le calcul des énergies propres E_n est inaccessible analytiquement. Il est possible en revanche d'étudier la distribution statistique de ces énergies. En effet on peut voir (Figure 2.1) que la distribution des énergies propres n'est pas la même pour un système intégrable, chaotique ou intermédiaire. L'étude numérique de ces données révèle plus précisément les différences entre ces trois types de systèmes.

2.2 Les outils statistiques

L'étude analytique ou numérique de la répartition statistique d'une suite de nombres nécessite l'introduction d'un certain nombre de quantités, que nous allons définir ici.

2.2.1 Définitions

Fonctions de corrélation

On cherche à décrire la statistique des niveaux d'énergie de systèmes quantiques d'énergies propres $\{E_1, E_2, \dots, E_N, \dots\}$. Pour cela on utilise diverses grandeurs. La première d'entre elles est la densité de niveaux d'énergie

$$d(E) = \sum_{n=1}^{\infty} \delta(E - E_n), \quad (2.4)$$

où l'on somme sur tous les niveaux d'énergie du système. La fonction de comptage en est la version intégrée:

$$N(E) = \sum_{n=1}^{\infty} \Theta(E - E_n) = \sum_{E_i < E} 1. \quad (2.5)$$

Ces grandeurs ne permettent pas de faire des comparaisons numériques entre différents spectres. On utilisera plutôt pour cela les fonctions de corrélation à n points,

$$R_n(\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n) = \langle d(E + \epsilon_1) d(E + \epsilon_2) \dots d(E + \epsilon_n) \rangle, \quad (2.6)$$

qui représentent la probabilité d'avoir n niveaux d'énergie à des positions spécifiées. La moyenne sur E est définie pour une fonction f quelconque par sa convolution avec une fonction-test ξ :

$$\langle f(E) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} de f(e) \xi(E - e). \quad (2.7)$$

La fonction-test ξ est supposée être centrée en 0, être normalisée à 1 et n'avoir un poids important qu'autour de l'origine, avec une largeur ΔE grande devant l'espacement moyen des niveaux d'énergie ($1/\bar{d}$ où $\bar{d}$ est la densité moyenne), et petite devant l'échelle de grandeur pour laquelle la dynamique classique change de façon significative: $1/\bar{d} \ll \Delta E \ll E$. (La notation $\langle f(E) \rangle$ est quelque peu abusive, puisque elle représente la moyenne piquée autour d'une valeur particulière E de l'énergie. Il serait donc plus correct d'écrire $\langle f \rangle(E)$. On conservera néanmoins la notation (2.7), ou on lui préférera la notation $\bar{f}(E)$.)

Facteur de forme

Le facteur de forme est défini comme la transformée de Fourier

$$K(\tau) = \frac{1}{\bar{d}} \int_{-\infty}^{\infty} d\epsilon R_2^c(\epsilon) e^{2i\pi\epsilon\bar{d}\tau} \quad (2.8)$$

de la fonction de corrélation connexe à deux points de la densité de niveaux d'énergie définie par

$$R_2^c(\epsilon) = \langle d(E - \epsilon/2) d(E + \epsilon/2) \rangle - \bar{d}^2. \quad (2.9)$$

Les facteurs dans (2.8) sont choisis pour avoir un facteur de forme adimensionné et tel que le temps τ soit mesuré dans les unités du temps de Heisenberg

$$t_H = 2\pi\hbar\bar{d}. \quad (2.10)$$

Il arrive que d'autres définitions soient adoptées pour $R_2^c(\epsilon)$ et donc pour $K(\tau)$: on utilise parfois la fonction de corrélation $R_2(\epsilon)$ au lieu de $R_2^c(\epsilon)$, ou bien on soustrait de $R_2(\epsilon)$ l'autocorrélation $\bar{d}\delta(\epsilon)$. Les expressions que nous donnons pour le facteur de forme ne coïncideront donc pas toujours avec celles rencontrées dans la littérature.

Avec notre choix, la limite pour $\epsilon \rightarrow 0$ de la fonction de corrélation connexe est $g\bar{d}\delta(\epsilon)$, où g est la dégénérescence moyenne des niveaux d'énergie. Sa présence implique que

$$K(\tau) \xrightarrow{\tau \rightarrow \infty} g. \quad (2.11)$$

L'allure numérique du facteur de forme est donnée à la figure 2.1 respectivement pour un billard rectangulaire (système intégrable), pour un billard de Bunimovich (système chaotique) et pour un billard triangulaire ($\pi/2, \pi/n, \pi/2 - \pi/n$), ici avec $n = 8$ (système intermédiaire). Les lignes continues pour le billard rectangulaire et le billard de Bunimovich correspondent aux résultats théoriques proposés par les conjectures décrites à la section 2.3, équations (2.24) et (2.36). Pour le billard triangulaire, les courbes correspondent à deux interpolations possibles des données numériques, détaillées dans l'article 1.

Espacement moyen $P(s)$

Une des grandeurs caractérisant le mieux la position relative des niveaux d'énergie au voisinage d'une énergie E est la distribution des distances entre premiers voisins. Si l'on pose $s_i = E_{i+1} - E_i$, la densité de probabilité des s_i est donnée par $P(s) ds = \frac{1}{N} \sharp\{i; s \leq s_i \leq s + ds\}$. Afin de pouvoir comparer entre elles les différentes répartitions statistiques, on prendra pour convention de toujours imposer les conditions de normalisation

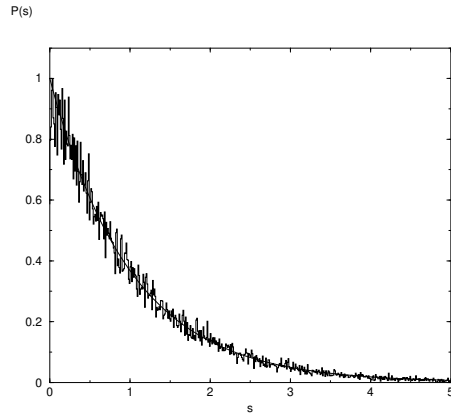
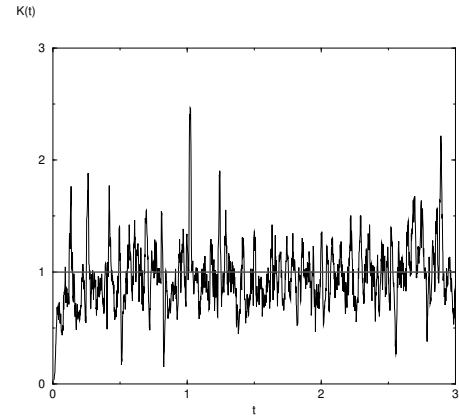
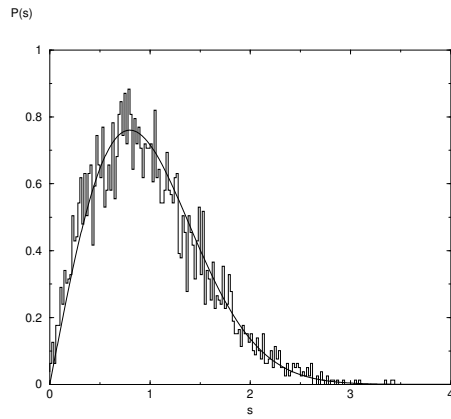
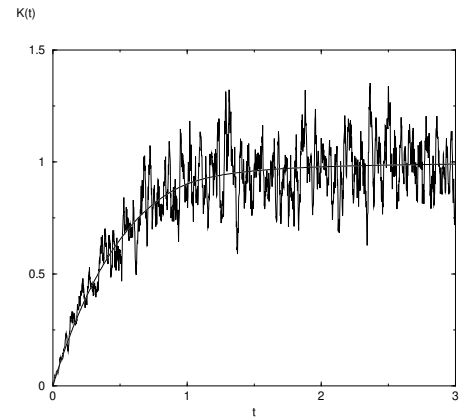
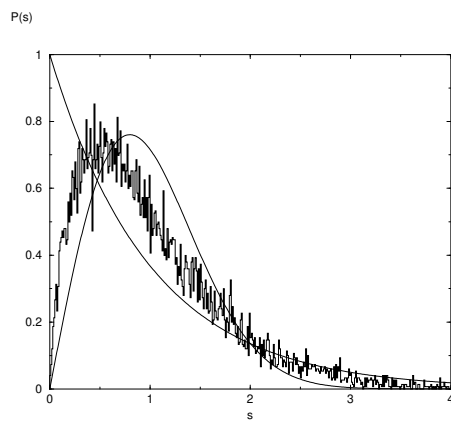
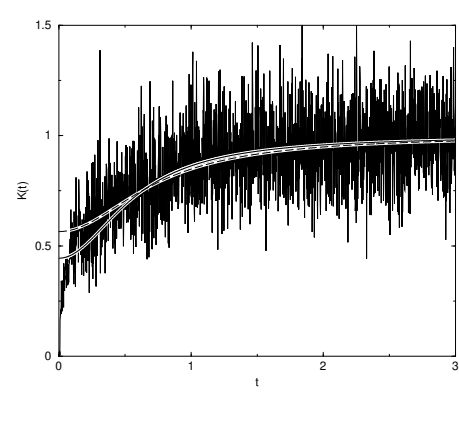
$$\int_0^\infty P(s)ds = 1 \quad \text{et} \quad \int_0^\infty sP(s)ds = 1. \quad (2.12)$$

De la même façon, on définit la probabilité $P_n(s)$ de trouver dans le spectre deux niveaux d'énergie séparés par n autres niveaux, et distants de s . En particulier, $P(s) = P_0(s)$. On a naturellement

$$R_2(s) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(s). \quad (2.13)$$

La quantité $P(0)$ est la probabilité que deux niveaux voisins soient infiniment proches l'un de l'autre. $P(0) = 0$ implique donc que deux niveaux voisins ne seront jamais infiniment proches. On parle alors de "répulsion de niveaux".

La figure 2.1 donne l'allure numérique de $P(s)$ pour un système intégrable, un système chaotique et un système intermédiaire. Encore une fois, les lignes continues correspondent aux résultats théoriques proposés à la section 2.3, équations (2.26) et (2.38).

 $P(s)$ pour un billard rectangulaire $K(\tau)$ pour un billard rectangulaire $P(s)$ pour un billard de Bunimovich $K(\tau)$ pour un billard de Bunimovich $P(s)$ pour un billard triangulaire $K(\tau)$ pour un billard triangulaireFIG. 2.1 – $P(s)$ et $K(\tau)$ pour trois types de dynamiques classiques

Variance du nombre de niveaux $\Sigma^2(L)$

Il est parfois utile également de considérer le nombre de niveaux d'énergie contenus dans un intervalle de longueur L , $n(L)$, ainsi que sa variance $\Sigma^2(L)$, que nous appellerons “variance du nombre de niveaux”. Elle est donnée par

$$\Sigma^2(L) = \left\langle (n(L) - \langle n(L) \rangle)^2 \right\rangle, \quad (2.14)$$

où la moyenne est prise sur toutes les positions possibles de la fenêtre d'énergie de largeur L . On peut exprimer cette variance en fonction de la fonction de corrélation $R_2^c(\epsilon)$ donnée par (2.9): si l'écart moyen entre les niveaux est pris égal à 1, alors $\langle n(L) \rangle = L$ et

$$\Sigma^2(L) = L - 2 \int_0^L (L - u)(1 - R_2^c(u)) du. \quad (2.15)$$

On en déduit que pour $K(0) \neq 0$ on doit avoir $\Sigma^2(L) \sim_0 K(0)L$: le facteur de forme à l'origine caractérise donc le comportement local de la variance.

Rigidité spectrale $\bar{\Delta}_3(L)$

La rigidité spectrale $\bar{\Delta}_3(L)$ a été définie par Mehta [11] par

$$\bar{\Delta}_3(L) = \left\langle \min_{A,B} \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} (N(E + \epsilon) - A - B\epsilon)^2 d\epsilon \right\rangle. \quad (2.16)$$

Elle mesure la déviation de la densité d'états intégrée par rapport à une droite, sur un intervalle $[E - L/2, E + L/2]$. On peut également l'exprimer en fonction de Σ^2 ou R_2^c (voir [12]).

2.2.2 Terme “lisse” de la densité d'états

Il est intéressant de déterminer la valeur moyenne (au sens de (2.7)) de la fonction de comptage $N(E)$. Supposons que le Hamiltonien soit de la forme $H(q,p) = p^2/2m + V(q)$. L'approximation de Thomas-Fermi consiste à postuler que chaque état quantique est associé à un volume $(2\pi\hbar)^N$ dans l'espace des phases. On a donc

$$\begin{aligned} \bar{N}(E) &\simeq \int \frac{d^N p d^N q}{(2\pi\hbar)^N} \Theta(E - H(q,p)) \\ &\simeq \frac{1}{\Gamma(N/2 + 1)} \left(\frac{m}{2\pi\hbar^2} \right)^{N/2} \int_{V(q) < E} [E - V(q)]^{N/2} dq \end{aligned} \quad (2.17)$$

après avoir intégré sur p . Dans le cas où l'on décrit le mouvement dans une boîte (Equation (2.3)), on obtient

$$\bar{N}(E) \simeq \frac{\mathcal{V}}{\Gamma(N/2 + 1)} \left(\frac{m}{2\pi\hbar^2} \right)^{N/2} E^{N/2}, \quad (2.18)$$

qui est le premier terme du développement en série de $\bar{N}(E)$, que l'on appelle développement de Weyl. $\mathcal{V}$ est le volume de la boîte. Pour $m = 1/2$, $\hbar = 1$, ce terme donne, à deux dimensions,

$$\bar{N}(E) \simeq \frac{\mathcal{A}}{4\pi} E, \quad (2.19)$$

où $\mathcal{A}$ est l'aire du billard bidimensionnel. La suite du développement de Weyl s'écrit [13]

$$\bar{N}(E) \simeq \frac{1}{4\pi} \left(\mathcal{A}E \mp \mathcal{L}\sqrt{E} + \mathcal{K} \right), \quad (2.20)$$

où $\mathcal{L}$ est le périmètre du billard et $\mathcal{K}$ une constante dépendant de la géométrie de la frontière. Le signe devant $\mathcal{L}$ est $(-)$ pour des conditions aux limites de Dirichlet, $(+)$ pour celles de Neumann.

Le terme de Thomas-Fermi pour la densité d'états est

$$\bar{d}(E) = \int \frac{d^N p d^N q}{(2\pi\hbar)^N} \delta(E - H(q, p)). \quad (2.21)$$

Pour les billards bidimensionnels, le premier terme du développement de Weyl (2.20) pour la densité donne donc la valeur moyenne

$$\bar{d} = \frac{\mathcal{A}}{4\pi}. \quad (2.22)$$

2.2.3 Échelles d'énergie et de temps

Comme on l'a vu, les quantités statistiques étudiées sont moyennées par la convolution (2.7) avec une fonction ξ centrée sur l'énergie E et de largeur ΔE . On étudie donc une statistique locale des niveaux d'énergie.

Par ailleurs, on définit des échelles de temps caractéristiques. Le temps d'Ehrenfest est le temps au-delà duquel l'approximation classique de la mécanique quantique n'est plus valable. Pour les systèmes chaotiques,

$$t_E \sim \frac{1}{\lambda} \ln \frac{1}{\hbar} \quad (2.23)$$

pour $\hbar \rightarrow 0$; λ est l'exposant de Lyapunov. Au bout d'un temps t_E , l'erreur sur la position initiale d'une trajectoire a été multipliée par $1/\hbar$.

Rappelons ici que le temps de Heisenberg, qui nous sera utile par la suite, est défini par (2.10): $t_H = 2\pi\hbar\bar{d}$. Puisque, d'après (2.21), $\bar{d} \sim \hbar^{-N}$, le temps de Heisenberg varie en $\hbar^{1-N}$.

2.3 Les conjectures

Pour chacune des classes de systèmes classiques évoquées au chapitre 1, diverses conjectures décrivant la statistique des niveaux d'énergie des systèmes quantiques correspondants ont été proposées. Ces conjectures sont basées sur des modèles ainsi que sur de nombreuses simulations numériques concordantes. A priori, la distribution des E_n n'est pas uniforme; localement, la densité moyenne des niveaux d'énergie n'est pas constante. On utilise souvent une procédure de "régularisation" (unfolding) du spectre, en posant $e_n = \bar{N}(E_n)$ [14]. L'espacement moyen de ces nouveaux niveaux est alors 1. En outre on étudie seulement la statistique des niveaux d'énergie associés aux éléments des représentations irréductibles des groupes de symétrie du système étudié.

2.3.1 Conjecture de Berry-Tabor pour les systèmes intégrables

La distribution des niveaux d'énergie des systèmes intégrables est celle de variables aléatoires indépendantes, c'est-à-dire une distribution de Poisson (Conjecture de Berry-Tabor [15])

$$P(s) = e^{-s}. \quad (2.24)$$

La fonction de corrélation à deux points pour une séquence poissonnienne est donnée par

$$R_2(s) = \delta(s) + 1; \quad (2.25)$$

le facteur de forme est alors

$$K(\tau) = 1, \quad (2.26)$$

et la variance du nombre de niveaux est

$$\Sigma^2(L) = L. \quad (2.27)$$

Berry a montré en outre [16] que pour un système intégrable générique,

$$\bar{\Delta}_3(L) = L/15, \quad L \ll L_{\max} \quad (2.28)$$

(avec $L_{\max} = kt_H/T_{\min}$, $T_{\min}$ étant la période de l'orbite la plus courte), et saturation non-universelle pour $L \gg L_{\max}$.

Une revue des éléments analytiques venant à l'appui de la conjecture ou l'infirmant est donnée par Marklof [17]. Les principaux résultats sont les suivants.

Dans le cas le plus simple de l'approximation semi-classique (voir le chapitre 4), on peut montrer que pour les systèmes intégrables, $R_2^c(\epsilon) = g\delta(\epsilon)$, g étant la dégénérescence des niveaux d'énergie. Par conséquent $K(0) = g$. Cela est illustré pour le rectangle (section 6.2.1) et pour le cercle (annexe C).

Pour ce qui est des résultats analytiques exacts, il a été démontré que presque tous les tores bidimensionnels de courbure nulle $\mathbb{R}^2/\mathcal{L}$, où $\mathcal{L}$ est un réseau sur $\mathbb{R}^2$ vérifient l'équation (2.25) (Sarnak [18]). Plus précisément les valeurs propres du Hamiltonien sont de la forme $\alpha m^2 + \beta mn + \gamma n^2$, $m, n \in \mathbb{Z}$, et Eskin *et al* ont donné des conditions sur les coefficients α, β et γ pour que (2.25) soit vérifiée. Ainsi les valeurs propres $m^2 + \gamma n^2$ avec γ diophantien¹ vérifient cette équation [19]. C'est en particulier le cas du billard rectangulaire $a \times b$ avec a^2/b^2 diophantien. VanderKam [20] a étendu ces résultats aux tores quadridimensionnels.

Dans le cas d'un tore carré (de côté 1) avec des conditions aux limites particulières où l'on impose des phases telle que les niveaux d'énergie sont donnés par $(m + \alpha)^2 + (n + \beta)^2$, $m, n \in \mathbb{Z}$, la conjecture est vérifiée pour $R_2(s)$, à condition que α ou β soit diophantien [21].

D'après la conjecture de Berry et Tabor, seuls les systèmes "génériques" dont la dynamique classique est intégrable présentent une statistique poissonnienne. De nombreux cas de systèmes intégrables ne vérifiant pas la conjecture de Berry-Tabor sont connus: ce sont par exemple les oscillateurs harmoniques (Berry-Tabor [15], Pandey *et al* [22], Bleher [23, 24], Greenman [25]), les surfaces de Zoll (surfaces dont les géodésiques sont fermées et de même longueur): ainsi pour la sphère on a $P(s) = \delta(s)$ (voir Duistermaat et Guillemin [26], Weinstein [27] ou Colin de Verdière [28]). Il a été également montré (Marklof [29]), dans le cas d'un billard rectangulaire, que, bien que dans le cas $m^2 + \gamma n^2$ avec γ diophantien, la fonction de corrélation à deux points soit poissonnienne, la distribution des plus proches voisins a une décroissance à très grande distance en loi de puissance, et non une décroissance exponentielle.

Mentionnons également que l'on peut construire artificiellement des systèmes intégrables unidimensionnels présentant une statistique de niveaux de type GOE (on construit un potentiel pour lequel les niveaux d'énergie ont une statistique GOE [30]).

1. $\gamma \in \mathbb{R}$ est *diophantien* s'il existe un entier $n \geq 2$ et une constante C tels que $|\gamma - \frac{p}{q}| > Cq^{-n}$ pour tous p, q entiers.

2.3.2 Conjectures BGS pour les systèmes chaotiques

La complexité des systèmes chaotiques est telle qu'il a paru raisonnable de la modéliser par une distribution aléatoire des paramètres et des variables intervenant dans la description du système. L'idée de base est de remplacer le Hamiltonien décrivant le système, que l'on ignore en raison de sa trop grande complexité, par une matrice hermitienne $N \times N$ dont les coefficients sont distribués aléatoirement. Cette Théorie des matrices aléatoires (RMT) a été introduite par Wigner et Dyson (voir [31] pour une revue des articles fondateurs, et [32] pour une synthèse récente sur la Théorie des matrices aléatoires). On définit trois types d'ensembles de matrices $(H_{ij})_{1 \leq i, j \leq N}$:

- l'Ensemble Gaussien Orthogonal (GOE) est l'ensemble des matrices réelles symétriques (${}^t H = H$) munies de la mesure

$$P(H)dH = \prod_i P_{ii}(H_{ii}) \prod_{i < j} P_{ij}(H_{ij}) \prod_i dH_{ii} \prod_{i < j} dH_{ij}, \quad (2.29)$$

telles que $P(H)$ et dH sont invariantes par une transformation orthogonale $H' = {}^t O H O$, et telles que les éléments de matrice $H_{ij}, i \leq j$ sont des variables aléatoires indépendantes.

- l'Ensemble Gaussien Unitaire (GUE) est l'ensemble des matrices complexes hermitiennes (${}^t \bar{H} = H$) munies de la mesure

$$P(H)dH = \prod_i P_{ii}(H_{ii}) \prod_{i < j} P_{ij}(H_{ij}, H_{ij}^*) \prod_i dH_{ii} \prod_{i < j} d(\operatorname{Re} H_{ij}) d(\operatorname{Im} H_{ij}), \quad (2.30)$$

telles que $P(H)$ et dH sont invariantes par une transformation unitaire $H' = {}^t \bar{U} H U$, et telles que les éléments de matrice indépendants de H sont des variables aléatoires indépendantes.

- l'Ensemble Gaussien Symplectique (GSE) est l'ensemble des matrices $2N \times 2N$ quaternion-réelles ($H = H^\mu \sigma_\mu$ où σ_μ sont les matrices de Pauli, H^0 une matrice $N \times N$ réelle symétrique et $H^i, 1 \leq i \leq 3$ des matrices réelles antisymétriques), munies de la mesure produit des mesures sur les matrices symétriques et antisymétriques, telles que $P(H)$ et dH sont invariantes par une transformation symplectique (matrice $2N \times 2N$ unitaire vérifiant $Z = BZ^t B$ avec $Z = H^2 \sigma_2, H^2 = I_N$), et telles que les éléments de matrice indépendants de H sont des variables aléatoires indépendantes.

Les conditions d'invariance de $P(H)$ et dH et d'indépendance des variables aléatoires imposent à la distribution $P(H)$ la forme

$$P(H) = \exp(-atrH^2), \quad (2.31)$$

avec a réel positif [11]. Selon les symétries et les invariances du système, le Hamiltonien qui le modélise doit être invariant par une transformation orthogonale, unitaire ou symplectique [12]. On choisit donc de modéliser le Hamiltonien d'un système classiquement chaotique par une matrice de l'un ou l'autre de ces trois ensembles.

Choix de l'ensemble gaussien Le choix de l'ensemble gaussien décrivant la statistique dépend des propriétés de symétrie et d'invariance du système. Les systèmes ayant une invariance par renversement du temps ont une statistique GOE (conjecture de Bohigas-Giannoni-Schmit [33]) (ou symplectique si le moment angulaire est demi-entier et qu'il n'y a pas invariance par rotation). Les systèmes n'ayant pas cette invariance ont en général une statistique GUE [33]-[34].

Distribution des valeurs propres La distribution des valeurs propres d'un système modélisable par l'un des trois ensembles gaussiens s'obtient en moyennant sur les réalisations possibles. La distribution jointe est calculable exactement; dans le cas où les éléments de matrice indépendants sont des variables gaussiennes centrées de variance σ^2 , la probabilité jointe est

$$P(E_1, E_2, \dots, E_n) = C \prod_{i < j} |E_i - E_j|^\beta \exp \left(-\frac{1}{4\sigma^2} \sum_i E_i^2 \right) \quad (2.32)$$

où

$$\begin{aligned} \beta = 1 & \quad \text{GOE} \\ \beta = 2 & \quad \text{GUE} \\ \beta = 4 & \quad \text{GSE.} \end{aligned} \quad (2.33)$$

Les constantes C et σ sont imposées par les conditions de normalisation.

Le calcul de $P(s)$ à partir de cette expression est possible, mais donne des résultats compliqués. Wigner a proposé une valeur approchée à la distribution des écarts entre niveaux pour les trois ensembles gaussiens, qui, numériquement, correspond remarquablement bien: c'est la distribution des écarts entre les valeurs propres de matrices 2×2 à coefficients distribués selon une loi gaussienne. Cette distribution est aisément calculable analytiquement [32]. La forme générale de cette distribution est

$$P(s) = a_\beta s^\beta e^{-b_\beta s^2}, \quad (2.34)$$

β étant donné par (2.33). Les constantes a_β et b_β sont déduites des conditions de normalisation (2.12):

$$a_\beta = 2 \frac{\Gamma^{\beta+1}((\beta+2)/2)}{\Gamma^{\beta+2}((\beta+1)/2)}, \quad b_\beta = \frac{\Gamma^2((\beta+2)/2)}{\Gamma^2((\beta+1)/2)}. \quad (2.35)$$

Explicitement, pour $\beta = 1, 2, 4$, on obtient les distributions de Wigner-Dyson

$$\begin{aligned} \text{*GOE:} \quad P(s) &= \frac{\pi}{2} s \exp \left(-\frac{\pi}{4} s^2 \right) \\ \text{*GUE:} \quad P(s) &= \frac{32}{\pi^2} s^2 \exp \left(-\frac{4}{\pi} s^2 \right) \\ \text{*GSE:} \quad P(s) &= \frac{2^{18}}{3^6 \pi^3} s^4 \exp \left(-\frac{64}{9\pi} s^2 \right). \end{aligned} \quad (2.36)$$

On peut également, pour chacun de ces modèles, calculer la fonction de corrélation connexe à deux points:

$$\begin{aligned} \text{*GOE:} \quad R_2^c(x) &= \delta(x) - \left(\frac{\sin \pi x}{\pi x} \right)^2 \\ &+ \left(\int_0^{\pi x} \frac{\sin y}{y} dy - \frac{\pi}{2} \text{sgn}(x) \right) \left(\frac{\cos \pi x}{\pi x} - \frac{\sin \pi x}{(\pi x)^2} \right) \\ \text{*GUE:} \quad R_2^c(x) &= \delta(x) - \left(\frac{\sin \pi x}{\pi x} \right)^2 \\ \text{*GSE:} \quad R_2^c(x) &= \delta(x) - \left(\frac{\sin 2\pi x}{2\pi x} \right)^2 + \int_0^{2\pi x} \frac{\sin y}{y} dy \left(\frac{\cos 2\pi x}{2\pi x} - \frac{\sin 2\pi x}{(2\pi x)^2} \right). \end{aligned} \quad (2.37)$$

Le calcul du facteur de forme pour ces ensembles gaussiens donne alors, à partir de l'équation (2.8),

$$\begin{aligned}
 \text{*GOE: } K(\tau) &= \begin{cases} 2\tau - \tau \ln(1 + 2\tau) & 0 < \tau < 1 \\ 2 - \tau \ln\left(\frac{2\tau+1}{2\tau-1}\right) & \tau > 1 \end{cases} \\
 \text{*GUE: } K(\tau) &= \begin{cases} \tau & 0 < \tau < 1 \\ 1 & \tau > 1 \end{cases} \\
 \text{*GSE: } K(\tau) &= \begin{cases} \frac{1}{2}\tau - \frac{1}{4}\tau \ln|1 - \tau| & 0 < \tau < 2 \\ 1 & \tau > 2. \end{cases}
 \end{aligned} \tag{2.38}$$

La variance du nombre de niveaux est asymptotiquement, pour les ensembles de la RMT,

$$\Sigma^2(L) \simeq \frac{2}{\beta\pi^2} \ln(L), \quad L \gg 1. \tag{2.39}$$

Berry a montré [16] que pour un système invariant par renversement du temps avec des orbites périodiques instables, on a

$$\bar{\Delta}_3(L) \simeq (\ln L)/\pi^2 - 0.00695, \quad L \ll L_{\max} \tag{2.40}$$

(avec toujours $L_{\max} = kt_H/T_{\min}$, $T_{\min}$ étant la période de l'orbite la plus courte), et saturation non-universelle pour $L \gg L_{\max}$.

Des simulations numériques viennent à l'appui de cette modélisation des systèmes chaotiques par des ensembles de matrices aléatoires, dont le choix dépend des propriétés de symétrie et d'invariance du système. En fait il existe également [35] des systèmes sans invariance par renversement du temps ni symétrie spatiale, qui suivent une distribution GOE. Cela survient pour des systèmes invariants sous une combinaison {renversement du temps+symétrie}, qui donnent lieu à des Hamiltoniens réels, ce qui est par exemple le cas du billard d'Aharonov-Bohm lorsque la ligne de flux se trouve sur un axe de symétrie (pas d'invariance par renversement du temps mais statistique GOE).

On trouve aussi des systèmes pour lesquels, bien que la mécanique classique soit complètement chaotique, la distribution des niveaux d'énergie est poissonienne. C'est le cas en particulier du "chaos arithmétique" [36], du mouvement sur des surfaces à courbure négative constante généré par des groupes arithmétiques [37]. L'existence d'une structure arithmétique pour les applications d'Arnol'd rend aussi leur statistique particulière [38].

Par ailleurs il existe aussi des systèmes chaotiques ne suivant pas la distribution GOE, malgré leur invariance par renversement du temps, lorsque on étudie la statistique d'un sous-ensemble des niveaux d'énergie associés à une représentation d'un groupe de symétrie non-trivial du système [39].

2.3.3 Conjectures pour les systèmes intermédiaires

Il existe une vaste classe de systèmes dont la dynamique classique n'est ni chaotique ni intégrable, et dont la statistique spectrale ne correspond ni à une distribution poissonienne, ni à une distribution de Wigner-Dyson. On qualifie ces systèmes d'intermédiaires.

Traits généraux des systèmes intermédiaires

Il s'avère numériquement que certains systèmes classiquement intermédiaires présentent à la fois une répulsion de niveaux en 0, comme pour la distribution de Wigner-Dyson (2.36)

$$P(s) \sim_{s \rightarrow 0} s^\alpha, \quad \alpha > 0, \quad (2.41)$$

et une décroissance exponentielle en l'infini, comme pour la distribution de Poisson (2.24)

$$P(s) \sim_{s \rightarrow \infty} \exp(-as). \quad (2.42)$$

Numériquement, le facteur de forme pour $\tau \sim 0$ semble prendre des valeurs comprises entre 0 et 1, c'est-à-dire, là encore, intermédiaires entre le résultat poissonien $K(0) = 1$ et le résultat des matrices aléatoires $K(0) = 0$. La variance du nombre de niveaux est linéaire en L :

$$\Sigma^2(L) \sim_{L \rightarrow \infty} K(0)L. \quad (2.43)$$

Exemples de systèmes intermédiaires

- Certains systèmes hamiltoniens à deux dimensions présentent une transition entre le comportement intégrable et chaotique lorsqu'on fait varier un paramètre. Seligman *et al* [40] considèrent un Hamiltonien décrivant deux particules dans un potentiel:

$$H = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) + V_1(x_1) + V_2(x_2) + V_3(x_1 - x_2) \quad (2.44)$$

avec un potentiel $V_i = \lambda_i(\alpha_i x^2 + \beta_i x^4 + \gamma_i x^6)$; les α_i, β_i et γ_i ($i = 1, 2, 3$), ainsi que λ_1 et λ_2 sont choisis de sorte que, lorsque le paramètre variable λ_3 augmente, le système passe d'un comportement chaotique avec presque aucun îlot de stabilité, à un système où les zones stables sont prépondérantes. La statistique des niveaux d'énergie subit dans le même temps une transition de GOE à Poisson, en passant par une statistique intermédiaire (mais ici avec $P(0) > 0$) qui peut être interprétée comme le mélange d'une statistique poissonienne (niveaux d'énergie correspondant aux zones stables) et d'une statistique GOE (niveaux d'énergie correspondant aux zones chaotiques) [41, 42].

- La distribution des énergies propres du Hamiltonien (3.5), la distribution des niveaux d'énergie des billards polygonaux décrits dans la section 1.4.3 ne suivent ni la répartition poissonienne (2.24) ni celles (2.34) données par la RMT, mais ont les caractéristiques mixtes (2.41)-(2.42).
- Un électron dans un atome non-hydrogénoïde, en présence d'un champ magnétique externe, a une distribution de niveaux d'énergie intermédiaire entre la distribution de Poisson et celle de la RMT, le noyau ionique agissant comme un centre diffracteur [43].
- Le billard de Kepler [44] (billard rectangulaire avec un potentiel du type $V(r) = \lambda e^{-\kappa r}/r$ centré en un point du rectangle) présente numériquement [45] à basse énergie une distribution voisine de la distribution intermédiaire $P(s) = 4se^{-s}$. Lorsque l'énergie croît, cette distribution tend vers une distribution poissonienne.
- Un billard rectangulaire avec au centre un potentiel répulsif de la forme $V(r) = \lambda r^{-\alpha}$ [46] présente une statistique qui tend aux limites de grande énergie vers une distribution poissonienne pour $\alpha < 2$ et vers une distribution de Wigner-Dyson pour $\alpha > 2$. Pour $\alpha = 2$, la statistique ne dépend plus de l'énergie mais de λ .

- Le billard rugueux [47, 48, 45] est une déformation du billard circulaire dont le contour est donné en coordonnées polaires par

$$r(\theta) = r_0 \left(1 + \sum_{n=2}^N [a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta)] \right), \quad (2.45)$$

avec a_n, b_n des variables aléatoires uniformément distribuées dans un intervalle $[-c, c]$. La statistique des niveaux d'énergie, moyennée sur les configurations, présente, quand on augmente l'énergie, une transition de la distribution de Poisson à une distribution GOE, en passant par une distribution intermédiaire.

2.4 Conclusion

La nature classique d'un système dynamique semble donc se manifester au niveau quantique par le type de répartition statistique des niveaux d'énergie d'une particule dans le système. Les systèmes classiquement intégrables présentent une distribution statistique poissonnienne; les systèmes classiquement chaotiques ont une distribution semblable à celles des valeurs propres de matrices à coefficients aléatoires. Quant aux systèmes intermédiaires, ils semblent présenter une grande variété de distributions qui, elles aussi, sont intermédiaires par leurs caractéristiques mixtes.

Divers modèles visant à reproduire ces caractéristiques ont été proposés: le chapitre suivant en propose quelques uns.

Chapitre 3

Modèles pour les systèmes intermédiaires

Les modèles permettant de décrire le comportement statistique des niveaux d'énergie des systèmes qui classiquement sont soit intégrables soit chaotiques ont été développés relativement tôt et sont bien connus. Ils sont présentés au chapitre précédent. Pour les systèmes intégrables, le modèle est celui de variables aléatoires indépendantes (voir section 2.3.1). Pour les systèmes chaotiques, il s'agit de la théorie des matrices aléatoires (voir section 2.3.2).

Divers modèles tentent de rendre compte des caractéristiques “mixtes” que présente la statistique spectrale des systèmes qui, classiquement, ne sont ni intégrables ni chaotiques, notamment la répulsion de niveaux à l'origine et la décroissance exponentielle en l'infini. Ce chapitre en propose quelques-uns.

3.1 Modèle semi-poissonien

La manière la plus simple d'obtenir une suite de variables aléatoires dont la distribution vérifie les caractéristiques (2.41)-(2.43) est de considérer une suite ordonnée $x_1 \leq x_2 \leq \dots$ de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées, et de construire la suite $y_n = x_{2n}$ [49]. La suite (x_n) suit bien sûr une distribution de Poisson; la suite des (y_n) a une distribution (appelée “semi-poissonienne” en raison de son mode de construction)

$$P(s) = 4se^{-2s}, \quad (3.1)$$

qui vérifie à la fois la répulsion de niveaux à l'origine (2.41) avec $\alpha = 1$ et la décroissance exponentielle en l'infini (2.42) avec $a = 2$. La fonction de corrélation est

$$R_2(s) = 1 - e^{-4s} \quad (3.2)$$

et la variance du nombre de niveaux est

$$\Sigma^2(L) = \frac{L}{2} + \frac{1 - e^{-4L}}{8}; \quad (3.3)$$

elle vérifie bien (2.43) avec $\chi = 1/2$. Enfin, le calcul de la transformée de Fourier de la fonction de corrélation donne

$$K(\tau) = \frac{8 + 4\pi^2\tau^2}{16 + 4\pi^2\tau^2}. \quad (3.4)$$

Comme pour les modèles de Poisson et de Wigner, on a $K(\tau) \rightarrow 1$ en l'infini. Mais alors que $K(0) = 0$ pour une distribution de Wigner et 1 pour une distribution poissonnienne, on a $K(0) = \frac{1}{2}$ pour une distribution semi-poissonnienne.

Le modèle semi-poissonien a été généralisé [49]: en enlevant non plus un niveau sur 2 mais un sur $(r+1)$, on obtient un modèle ayant les mêmes propriétés statistiques que le modèle SRPM correspondant aux paramètres $h=1, \beta=r$ (voir la section 3.4).

Remarquons que la suite (z_n) définie par $z_n = (x_n + x_{n+1})/2$ [45] a exactement la même distribution $P(s)$ que la suite (y_n) , mais les fonctions de corrélations sont différentes (on a par exemple, pour la fonction de corrélation à deux points, $R_2(s) = 1 + (2s-1)e^{-2s}$).

3.2 Modèle d'Anderson

Numériquement, il a été observé que la statistique des systèmes intermédiaires est proche de celle du modèle d'Anderson à trois dimensions à la transition métal-isolant. Rappelons-en les principales caractéristiques.

On considère le Hamiltonien [50]

$$H = \sum_i \epsilon_i a_i^\dagger a_i - \sum_{\langle i,j \rangle} a_j^\dagger a_i \quad (3.5)$$

où $\langle i,j \rangle$ désignent les plus proches voisins d'un réseau tridimensionnel. Les énergies ϵ_i sont des variables aléatoires uniformément distribuées entre $-E/2$ et $E/2$. Il y a transition pour une valeur critique de E égale à $E_c = 16 \pm 0.5$. En effet, pour $E < E_c$ les fonctions d'onde sont localisées, ce qui induit un comportement isolant de l'échantillon. Puisque les fonctions d'onde sont décorréliées, les niveaux d'énergie du système sont indépendants et suivent une distribution poissonnienne. Pour $E > E_c$, les fonctions d'onde sont délocalisées, elles se recouvrent donc fortement. Le comportement de l'échantillon est alors celui d'un conducteur, et la distribution des valeurs propres suit celle des matrices aléatoires.

Pour $E = E_c$, c'est-à-dire au point de transition métal-isolant, la distribution des niveaux d'énergie suit une statistique intermédiaire. D'après [50], le comportement de l'échantillon à ce point de transition est universel, en ceci qu'il ne dépend pas de sa structure microscopique. La distribution des écarts entre niveaux est linéaire en s pour $s \ll 1$, et a une décroissance exponentielle en l'infini. La statistique intermédiaire serait donc une statistique de transition entre la distribution de Wigner-Dyson et celle de Poisson.

On passe ainsi, dans la transition du métal à l'isolant, de fonctions d'onde délocalisées à des fonctions d'onde fortement localisées. Mais au point de transition $E = E_c$, les fonctions d'onde ont une nature multifractale [51]-[52]. Qu'en est-il de leur recouvrement? Fyodorov et Mirlin [53] ont étudié le recouvrement des fonctions d'onde au point critique, en définissant

$$\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{E}) = \left\langle \sum_{\mathbf{i}} |\Psi_{\mathbf{i}}(\mathbf{r})|^4 \delta(\mathbf{E} - \mathbf{E}_{\mathbf{i}}) \right\rangle \quad (3.6)$$

et

$$\beta(\mathbf{r}, \mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2) = \frac{\left\langle \sum_{\mathbf{i}, \mathbf{j}} |\Psi_{\mathbf{i}}(\mathbf{r})|^2 |\Psi_{\mathbf{j}}(\mathbf{r})|^2 \delta(\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_{\mathbf{i}}) \delta(\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_{\mathbf{j}}) \right\rangle}{\left\langle \sum_{\mathbf{i}, \mathbf{j}} \delta(\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_{\mathbf{i}}) \delta(\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_{\mathbf{j}}) \right\rangle}, \quad (3.7)$$

la moyenne étant effectuée sur le désordre. Pour des fonctions d'onde ayant un fort recouvrement, on s'attend à $\beta(\mathbf{r}, \mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2)/\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{E}) \sim 1$. C'est le cas, quelque soit la valeur de $|E_2 - E_1|$ pour les systèmes ayant une distribution de Wigner-Dyson. Pour le modèle d'Anderson au point critique, on a

$$\beta(\mathbf{r}, \mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2)/\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{E}) \sim 1 \quad (3.8)$$

pour $|E_2 - E_1|$ inférieur à l'espacement moyen $1/\bar{d} = 1$ entre les niveaux, mais on a

$$\beta(\mathbf{r}, \mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2)/\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{E}) \sim |\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1|^{-\eta/d} \quad (3.9)$$

pour $|E_2 - E_1| > 1$. On a noté d la dimension d'espace, et $\eta > 0$ la quantité telle que

$$\int d\mathbf{r} \alpha(\mathbf{r}, \mathbf{E}) \sim \mathbf{L}^{-d+\eta} \quad (3.10)$$

au point critique. Cela signifie que, dans ce cas, seules les fonctions d'onde correspondant à des niveaux d'énergie distants tout au plus de quelques unités ont un recouvrement non négligeable et sont susceptibles d'interagir.

La variance $\Sigma^2(L)$, pour ce système, est [54]

$$\Sigma^2(L) \sim \chi L, \quad \chi = \frac{\eta}{2d} \quad (L \gg 1), \quad (3.11)$$

et elle vérifie donc les caractéristiques des systèmes intermédiaires. Il a été montré également [55] que le comportement universel de la statistique spectrale, notamment $P(s)$ et $\Sigma^2(L)$, dépend des conditions aux bords.

3.3 Interpolation entre Wigner-Dyson et Poisson

Pour l'ensemble GOE, la distribution de l'espacement entre niveaux est donnée par (2.36). Afin de rendre compte des résultats numériques, Brody [56] pose a priori la forme

$$p_\omega(s) = A s^\omega \exp(-C s^\alpha). \quad (3.12)$$

L'exposant $\omega > 0$ traduit la répulsion de niveaux en $s \rightarrow 0$, l'exposant α décrit la décroissance en l'infini. A et C sont des constantes déterminées par la normalisation (2.12).

La distribution de Poisson (2.24) correspond au cas $\omega = 0$ et $\alpha = 1$. La distribution de Wigner-Dyson (2.36) correspond au cas $\omega = 1$ et $\alpha = 2$. Brody choisit donc de poser $\alpha = \omega + 1$. Alors p_ω ne dépend plus que du paramètre ω , et la distribution est donnée par (3.12) avec

$$C = \left[\Gamma \left(\frac{\omega + 2}{\omega + 1} \right) \right]^{\omega+1}, \quad A = (\omega + 1)C. \quad (3.13)$$

Cependant on trouve numériquement que la répulsion de niveaux est linéaire ($\omega = 1$) et la décroissance en l'infini est exponentielle ($\alpha = 1$), ce qui semblerait infirmer l'hypothèse de Brody.

3.4 Modèle SRPM

On considère un gaz de N particules à une dimension qui chacune génère un potentiel répulsif $V(x)$. La distribution conjointe des N particules sera

$$P(x_1, \dots, x_N) = \frac{1}{Z_N} \exp \left(-\beta \left[\sum_{i < j} V(|x_i - x_j|) + \sum_i U(x_i) \right] \right), \quad (3.14)$$

où Z_N est la fonction de partition, β la température inverse et $U(x)$ un potentiel confinant. Pour le choix du potentiel $V(x) = -\log|x|$, la probabilité (3.14) est exactement celle obtenue pour les ensembles gaussiens des matrices aléatoires (Equation (2.32)), avec une température inverse β égale respectivement à 1, 2 ou 4 pour les ensembles gaussiens orthogonal, unitaire ou symplectique.

Si à présent on restreint l'interaction entre les particules aux $2h$ plus proches voisins, en considérant $N + 2$ particules confinées à l'intervalle $[0, L]$ (on rajoute deux particules en 0 et en L), la somme dans l'exponentielle de (3.14) est restreinte à i et j distants de h (c'est le "Short-Range Plasma Model ou SRPM). Quel que soit le choix du potentiel répulsif $V(x)$ et le choix du nombre h de premiers voisins sur lesquels ce potentiel est susceptible d'agir, les propriétés statistiques du modèle sont calculables [57], [58].

Le calcul a été effectué [59] dans le cas où le potentiel confinant $U(x)$ est remplacé par des conditions aux limites périodiques: les N niveaux d'énergie $x_1, x_2, \dots, x_N$ sont confinés à un cercle de circonférence L . Dans le cas où l'interaction est à courte portée et n'affecte que les voisins immédiats ($h = 1$), on obtient

$$P_n(s) = \frac{(\beta + 1)^{n(\beta+1)}}{\Gamma(n(\beta + 1))} s^{n(\beta+1)-1} e^{-s(\beta+1)}, \quad (3.15)$$

qui pour $\beta = 1$ donne le même résultat (3.1) que la statistique semi-poissonienne, et a bien les caractéristiques cherchées de répulsion de niveaux et de décroissance exponentielle en l'infini. Notons que la distribution (3.15) est également la distribution d'une suite construite en enlevant un niveau sur $\beta + 1$ dans une suite poissonnienne ordonnée (voir section 3.1).

La variance du nombre de niveaux pour le modèle SPRM avec $h = 1$ est bien linéaire en L pour $L \rightarrow 0$:

$$\Sigma^2(L) = \frac{1}{\beta + 1} L + \frac{\beta(\beta + 2)}{6(1 + \beta)^2} + O(L^{-1}). \quad (3.16)$$

Dans le cas général, où l'on restreint l'interaction coulombienne à un nombre quelconque h de premiers voisins, on obtient

$$\Sigma^2(L) \sim \chi L, \quad \chi = \frac{1}{h\beta + 1} \quad (3.17)$$

pour $L \gg 1$, et

$$P_n(s) = e^{-(h\beta+1)s} \sum_i c_i s^i, \quad (3.18)$$

où les $c_i, i \geq 1$ sont des coefficients (nuls sauf un nombre fini) connus de façon implicite et calculables numériquement [59]. Pour $n = 0$, la somme commence à $i = \beta$, donc

$$P(s) \sim_{s \rightarrow 0} s^\beta, \quad (3.19)$$

ce qui correspond à une répulsion de niveaux de type wignérien (2.34). Pour $s \rightarrow \infty$, la décroissance est exponentielle. Ce modèle décrit donc bien une distribution de variables aléatoires intermédiaire, vérifiant les critères (2.41) à (2.43).

3.5 Modèle de Gaudin

Le modèle de Gaudin [60, 61] correspond à un modèle SPRM dans lequel le potentiel V apparaissant dans (3.14) est donné par

$$V(x) = -\frac{1}{2} \log \frac{x^2}{\alpha^2 + x^2}. \quad (3.20)$$

On retrouve la statistique poissonnienne pour $\alpha \rightarrow \infty$ et la statistique de Wigner-Dyson pour $\alpha = 0$. Ce modèle n'est soluble analytiquement que pour une température inverse $\beta = 2$. Il donne pour L grand (en notant $\tilde{\alpha} = 2\pi\alpha\Delta$, Δ étant la densité moyenne de niveaux) $\Sigma^{(2)}(L) \sim \chi L$, avec

$$\chi = \frac{1 - e^{-\tilde{\alpha}}}{\tilde{\alpha}}, \quad (3.21)$$

et $P(s) \sim_{\infty} e^{-as}$ avec

$$a = \frac{1}{\tilde{\alpha}} \int_0^{e^{\tilde{\alpha}}-1} \frac{\ln(1+t)}{t} dt. \quad (3.22)$$

Enfin, il y a répulsion de niveaux quadratique avec $P(s) \sim_0 s^2$. Il s'agit donc bien d'un modèle décrivant les statistiques intermédiaires.

3.6 Conclusion

Tous les modèles présentés dans ce chapitre permettent de rendre compte des caractéristiques de la distribution des niveaux d'énergie de systèmes qui, classiquement, ne sont ni intégrables ni chaotiques: répulsion de niveaux, décroissance exponentielle de la distribution des plus proches voisins, et comportement linéaire de la variance du nombre de niveaux.

Pourtant ils ne permettent pas de déterminer analytiquement les caractéristiques de la statistique des niveaux d'énergie de systèmes réels comme les billards, qui numériquement présentent ces mêmes caractéristiques. L'approche semi-classique, par la connexion qu'elle réalise entre les propriétés classiques et les propriétés quantiques par l'intermédiaire des formules de trace, va le permettre.

Chapitre 4

Formules de trace

Les conjectures relatives aux systèmes intégrables, chaotiques ou intermédiaires, exposées aux chapitres précédents, montrent qu'il existe une connexion entre le comportement classique et le comportement quantique des systèmes. Le comportement classique étant caractérisé par les trajectoires classiques déterminées par les équations du mouvement, on peut supposer que ces trajectoires sont, d'une certaine façon, "codées" dans le spectre quantique. A l'inverse, les niveaux d'énergie peuvent être déduits de la connaissance des trajectoires classiques, et c'est l'objet des formules de trace que d'exprimer cette correspondance.

4.1 Fonction de Green quantique

La plupart des approches analytiques pour l'étude des statistiques spectrales sont basées sur l'utilisation de la fonction de Green. Nous définissons le propagateur du système comme l'amplitude de probabilité conditionnelle $K(q_f, t_f; q_i, t_i)$ d'être au point q_f à l'instant t_f sachant que l'on était au point q_i à l'instant t_i . Le propagateur est l'unique solution de l'équation de Schrödinger vérifiant la condition

$$\lim_{t_f \rightarrow t_i} K(q_f, t_f; q_i, t_i) = \delta(q_f - q_i). \quad (4.1)$$

On montre alors (voir [62] et les références incluses) que l'on peut écrire le propagateur sous forme d'une intégrale de Feynman

$$K(q_f, t_f; q_i, t_i) = \int \mathcal{D}q(t) e^{\frac{i}{\hbar} \int dt \mathcal{L}(\dot{q}, q, t)}, \quad (4.2)$$

où l'on somme sur toutes les trajectoires possibles allant de (q_i, t_i) à (q_f, t_f) . La notation (4.2) doit être comprise comme la limite lorsque n tend vers l'infini d'une somme discrète sur tous les chemins de n pas allant de (q_i, t_i) à (q_f, t_f) : la somme (4.2) porte sur tous les chemins continus, mais non nécessairement dérivables. On voit immédiatement sous cette forme que la limite classique de la Mécanique quantique revient à faire tendre $\hbar$ vers 0: les contributions dominantes à la probabilité K correspondent alors aux valeurs stationnaires de l'action telle qu'elle a été définie par (1.1) (voir [63]).

La fonction de Green avancée, transformée de Fourier du propagateur, est définie par

$$G(q_f, q_i; E) = \frac{1}{i\hbar} \int_0^\infty dt K(q_f, t; q_i, 0) e^{iEt/\hbar}. \quad (4.3)$$

Elle est solution de

$$(-H + E)G(q_f, q_i; E) = \delta(q_f - q_i). \quad (4.4)$$

L'action dépendant de l'énergie est définie comme la transformée de Legendre de l'action dépendant du temps donnée par (1.1):

$$S(q_f, q_i; E) = R(q_f, t; q_i, 0) + Et \quad (4.5)$$

où t est l'unique solution de

$$\frac{\partial R}{\partial t}(q_f, t; q_i, 0) + E = 0. \quad (4.6)$$

On peut alors exprimer cette action le long d'une trajectoire sous la forme

$$S(q_f, q_i; E) = \int_{q_i}^{q_f} p \, dq. \quad (4.7)$$

Le long d'une trajectoire classique, l'énergie est conservée et $H(q_i, p_i) = H(q_f, p_f) = E$. Alors

$$\frac{\partial H}{\partial E} = \frac{\partial H}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial E} + \frac{\partial H}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial E} = 1, \quad (4.8)$$

donc

$$\frac{\partial p}{\partial E} = \left(\frac{\partial H}{\partial p} \right)^{-1} = \frac{1}{\dot{q}}. \quad (4.9)$$

On a ainsi

$$\frac{\partial S}{\partial E}(q_f, q_i; E) = \int_{q_i}^{q_f} \frac{dq}{\dot{q}} = T(E), \quad (4.10)$$

où $T(E)$ est la période de l'orbite allant de q_i à q_f avec l'énergie E (c'est-à-dire à la vitesse $v = \sqrt{2mE}$). De plus on déduit de (4.2), (4.3) et (4.5) que

$$G(q_f, q_i; E) = \frac{1}{i\hbar} \int \mathcal{D}q(t) e^{\frac{i}{\hbar} S(q_f, q_i; E)}. \quad (4.11)$$

La fonction de Green est donc une somme sur tous les chemins continus de q_i à q_f .

Dans la pratique, la fonction de Green se calcule à partir de l'équation (4.4). Dans le cas du mouvement libre dans l'espace euclidien, le Hamiltonien est réduit à l'opposé de l'opérateur Laplacien, et la fonction de Green est solution de

$$(\Delta_{q_f} + E)G(q_f, q_i; E) = \delta(q_f - q_i), \quad (4.12)$$

où l'indice q_f rappelle que l'opérateur de dérivation agit sur la variable q_f . En dimension 2, la fonction de Green est

$$G(q_f, q_i; E) = \frac{1}{4i} H_0^{(1)}(k|q_f - q_i|) \quad (4.13)$$

avec $k = \sqrt{E}$; $H_0^{(1)}$ est la fonction de Hankel de première espèce. En dimension 3, on a

$$G(q_f, q_i; E) = \frac{e^{ik|q_f - q_i|}}{2ik}. \quad (4.14)$$

4.2 Fonction de Green semi-classique

Les méthodes semi-classiques sont fondées sur le fait que la limite classique de la mécanique quantique est obtenue pour $\hbar \rightarrow 0$ dans l'intégrale de chemins donnant le propagateur. Le développement de cette intégrale en puissances de $\hbar$ permet de calculer les corrections quantiques successives à la théorie classique, pour le propagateur de Feynman et pour les autres quantités physiques, qui s'en déduisent. L'approximation semi-classique consiste à ne retenir de ce développement que le terme d'ordre le plus bas en $\hbar$. On peut apporter les corrections à cette approximation en tenant compte des termes d'ordre supérieur. Cette approximation semi-classique n'est bien entendu valide que si le terme d'ordre suivant est négligeable, c'est-à-dire si $S/\hbar \gg 1$.

4.2.1 Développement en somme d'orbites périodiques

L'expression (4.11) pour la fonction de Green $G(q_f, q_i; E)$ est une somme sur tous les chemins continus joignant q_i à q_f avec une énergie E . L'approximation semi-classique consiste à ne retenir que le terme d'ordre le plus bas en $\hbar$. Ce terme est donnée par l'approximation de la phase stationnaire: ne contribuent à l'intégrale (4.11) que les chemins pour lesquels l'action S atteint une valeur stationnaire, c'est-à-dire, d'après (1.1)-(1.2), ceux qui correspondent à ce que nous avons défini comme étant les trajectoires classiques. La fonction de Green semi-classique s'exprime donc comme une somme, sur toutes les trajectoires classiques, d'exponentielles dont la phase est, à un multiple de $\pi/2$ près, l'action classique comptée le long de la trajectoire.

L'argument est bien entendu le même pour le propagateur de Feynman (4.2). L'intégration de (4.2) (ou, plus exactement, de sa version discrétisée) par la méthode de la phase stationnaire donne

$$\sum_{\text{traj. class.}} \frac{1}{(2i\pi\hbar)^{N/2}} \left[\det \left(-\frac{\partial^2 R}{\partial q_f \partial q_i} \right) \right]^{1/2} \exp \left(\frac{i}{\hbar} R(q_f, t_f; q_i, t_i) - i\kappa \frac{\pi}{2} \right), \quad (4.15)$$

où N est la dimension d'espace. Pour obtenir (4.15), on a développé l'action (1.1) autour des trajectoires classiques. Le second ordre de ce développement est une forme quadratique en la position q_f . On appelle point conjugué un point (de la trajectoire autour de laquelle on développe) pour lequel une des valeurs propres de cette forme quadratique devient négative (à proximité du point initial q_i de la trajectoire classique la forme quadratique est définie positive). Dans la formule (4.15), κ est le nombre de points conjugués. Physiquement un point conjugué correspond à un point de la trajectoire classique où se produit une "inversion" d'un faisceau de trajectoires voisines, soit sous forme d'une caustique, soit sous forme d'un point focal. C'est le cas en particulier lors de la réflexion sur une paroi à deux dimensions: $\kappa = 2$ pour des conditions aux limites de Dirichlet, et 0 pour des conditions aux limites de Neumann ou des conditions périodiques.

La formule (4.15) est due à Van Vleck. Sa transformée de Fourier (4.3) se calcule par la même méthode: les points stationnaires correspondent aux trajectoires classiques. En intégrant par rapport au temps puis en se plaçant dans un système de coordonnées $(q_{//}, q_{\perp})$ tel que $q_{//}$ est la coordonnée le long de la trajectoire et $q_{\perp}$ les coordonnées perpendiculairement à la trajectoire,

on obtient la fonction de Green semi-classique comme une somme sur les trajectoires classiques:

$$G^{\text{s.c.}}(q_f, q_i; E) = \sum_{\text{cl}} \frac{2\pi}{(2i\pi\hbar)^{(N+1)/2}} \left[\frac{1}{\dot{q}_{i\parallel} \dot{q}_{f\parallel}} \det \left(-\frac{\partial^2 S}{\partial q_{f\perp} \partial q_{i\perp}} \right) \right]^{1/2} \times \exp \left(\frac{i}{\hbar} S(q_f, q_i; E) - i\mu \frac{\pi}{2} \right). \quad (4.16)$$

L'indice μ dépend de la trajectoire classique considérée: il compte le nombre de points conjugués le long de la trajectoire classique d'énergie E reliant q_i à q_f .

On peut donner l'interprétation suivante au préfacteur apparaissant dans la formule (4.16). La fonction de Green $G(q_f, q_i; E)$ représente une amplitude de probabilité, c'est-à-dire que la probabilité pour une particule d'arriver dans un volume dq_f autour de q_f en partant d'un point initial donné q_i et à l'énergie E est $|G(q_f, q_i; E)|^2 dq_f$. Si $\mathcal{A}_p$ est le préfacteur dans (4.16), c'est-à-dire l'amplitude de probabilité associée au déplacement de la particule de q_i à q_f à l'énergie E , on a une probabilité $|\mathcal{A}_p|^2 dq_f$ pour cette trajectoire. Par ailleurs, la probabilité d'arriver dans un volume dq_f autour de q_f en partant de q_i est la probabilité de partir avec une impulsion dp_i autour de l'impulsion initiale p_i . L'état (q_i, p_i) occupant un espace $(2\pi\hbar)^N$ dans l'espace des phases, la probabilité est $dp_i/(2\pi\hbar)^N$. On a donc

$$|\mathcal{A}_p|^2 dq_f \simeq \frac{dp_i}{(2\pi\hbar)^N} \quad (4.17)$$

soit, pour le carré de l'amplitude associée à la trajectoire,

$$|\mathcal{A}_p|^2 \simeq \frac{1}{(2\pi\hbar)^N} \left| \det \left(\frac{\partial p_i}{\partial q_f} \right) \right|, \quad (4.18)$$

ce qui, avec l'expression (4.7) de l'action S , donne bien le préfacteur de (4.16).

4.2.2 Matrice de monodromie

On peut exprimer le préfacteur de (4.16) en fonction de la matrice de monodromie (voir section (1.3)) associée à la trajectoire. On a d'après (4.7)

$$\begin{cases} \delta p_{f\perp} &= \frac{\partial^2 S}{\partial q_{i\perp} \partial q_{f\perp}} \delta q_{i\perp} + \frac{\partial^2 S}{\partial q_{f\perp}^2} \delta q_{f\perp} \\ \delta p_{i\perp} &= -\frac{\partial^2 S}{\partial q_{i\perp}^2} \delta q_{i\perp} - \frac{\partial^2 S}{\partial q_{i\perp} \partial q_{f\perp}} \delta q_{f\perp}. \end{cases} \quad (4.19)$$

La matrice de monodromie, qui est définie par (1.15), s'écrit donc

$$M = -\frac{1}{\frac{\partial^2 S}{\partial q_{i\perp} \partial q_{f\perp}}} \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 S}{\partial q_{i\perp}^2} & 1 \\ \left(\frac{\partial^2 S}{\partial q_{i\perp}^2} \right) \left(\frac{\partial^2 S}{\partial q_{f\perp}^2} \right) - \left(\frac{\partial^2 S}{\partial q_{i\perp} \partial q_{f\perp}} \right)^2 & \frac{\partial^2 S}{\partial q_{f\perp}^2} \end{pmatrix}. \quad (4.20)$$

En dimension 2, on a alors, en notant $M = (M_{ij})_{1 \leq i, j \leq 2}$,

$$\det \left(-\frac{\partial^2 S}{\partial q_{f\perp} \partial q_{i\perp}} \right) = \frac{1}{M_{12}} \quad (4.21)$$

et ainsi

$$G^{\text{s.c.}}(q_f, q_i; E) = \sum_{\text{cl}} \frac{2\pi}{(2i\pi\hbar)^{(N+1)/2}} \frac{1}{\sqrt{\dot{q}_{f//} \dot{q}_{i//}}} \frac{1}{\sqrt{M_{12}}} \times \exp\left(\frac{i}{\hbar} S(q_i, q_f; E) - i\mu \frac{\pi}{2}\right), \quad (4.22)$$

où M est ici la matrice de monodromie correspondant à une trajectoire voisine de la trajectoire classique reliant q_i à q_f . En général, on s'intéressera ici aux fonctions de Green décrivant la propagation d'un point q à lui-même en dimension 2. La fonction de Green semi-classique est alors une somme sur les orbites périodiques de longueur l_p :

$$G^{\text{s.c.}}(q, q; E) = \sum_p \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar^{3/2}}} \frac{1}{\dot{q}_{//}} \frac{1}{\sqrt{(M_p)_{12}}} e^{ikl_p} e^{-i\mu_p \frac{\pi}{2}}. \quad (4.23)$$

La vitesse de parcours de la trajectoire à l'énergie E est $v = \sqrt{2E/m} = 2k$ dans les unités choisies. Toute fonction de Green semi-classique à deux dimensions peut donc s'écrire sous la forme

$$G^{\text{s.c.}}(q, q; E) = \sum_{\vec{l}_p} \frac{e^{ikl_p - i\mu_p \frac{\pi}{2} - 3i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{8\pi k^2 M_{12}}}. \quad (4.24)$$

Dans le cas d'un billard polygonal bidimensionnel, la matrice de monodromie est donnée par (1.17) et la fonction de Green semi-classique s'écrit finalement

$$G^{\text{s.c.}}(q, q; E) = \sum_{\vec{l}_p} \frac{e^{ikl_p - i\mu_p \frac{\pi}{2} - 3i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{8\pi k l_p}}. \quad (4.25)$$

Un autre exemple de calcul de la fonction de Green semi-classique est donné dans l'annexe C pour la propagation libre dans un billard circulaire.

4.3 Densité de niveaux

La fonction de Green d'un système quantique est définie par (4.3). Il sera plus utile d'utiliser sa caractérisation (4.4), qui permet de l'exprimer comme une somme sur les fonctions propres et les valeurs propres du Hamiltonien: on peut vérifier que formellement

$$G(q_f, q_i; E) = \sum_n \frac{\bar{\Psi}_n(q_i) \Psi_n(q_f)}{E - E_n} \quad (4.26)$$

est bien solution de (4.4).

Pour donner un sens mathématiquement correct à cette expression, on utilisera pour les calculs la fonction de Green avancée

$$G_+(q_f, q_i; E) = G(q_f, q_i; E + i\epsilon). \quad (4.27)$$

Lorsque l'on fera référence à la fonction de Green, on sous-entendra qu'il s'agit de la limite, pour $\epsilon \rightarrow 0$, de la fonction de Green avancée (et on omettra le "+" en indice dans son écriture). On utilise alors le fait qu'à la limite pour $\epsilon \rightarrow 0$, on a

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{x + i\epsilon} = \text{vp} \frac{1}{x} - i\pi\delta(x) \quad (4.28)$$

et que, H étant hermitien, ses vecteurs propres vérifient $\int \bar{\psi}_m \psi_n = \delta_{mn}$. La densité de niveaux d'énergie (2.4) s'écrit alors

$$d(E) = -\frac{1}{\pi} \int \mathcal{I}m G(q, q; E) dq. \quad (4.29)$$

La fonction de Green $G(q', q; E)$ diverge pour $q' \rightarrow q$ mais pas sa partie imaginaire: il faut comprendre l'expression $\mathcal{I}m G(q, q; E)$ comme la partie imaginaire de $G(q', q)$ prise à la limite $q' \rightarrow q$. La densité d'états s'exprime grâce à cette relation comme la trace de la fonction de Green. C'est le point de départ des formules de trace. Notons encore que si l'on régularise la densité d'états (2.4) sous forme d'une somme de Lorentziennes

$$d_\epsilon(E) = \frac{\epsilon}{\pi} \sum_n \frac{1}{(E - E_n)^2 + \epsilon^2}, \quad (4.30)$$

on a

$$d_\epsilon(E) = -\frac{1}{\pi} \int \mathcal{I}m G(q, q; E + i\epsilon) dq. \quad (4.31)$$

L'équation (4.29) doit donc être entendue comme la limite pour $\epsilon \rightarrow 0$ de chacun des membres de l'équation (4.31). Cependant on calcule usuellement la densité d'états à partir de la fonction de Green en évaluant d'abord l'intégrale pour $q = q'$ (la "trace" de la fonction de Green) puis en prenant la partie imaginaire. Cette façon de procéder peut être rendue rigoureuse: il faut pour cela recourir à un artifice, en multipliant la fonction de Green par un facteur permettant la convergence de l'intégrale dans la limite $q = q'$ [64].

4.4 Formules de traces

Nous voilà prêts à dériver les relations reliant la densité des niveaux d'énergie quantiques à une somme sur les trajectoires classiques du système. L'expression semi-classique (4.16) pour la fonction de Green permet, à l'aide de l'expression (4.29), d'exprimer la densité d'énergie $d(E)$ comme une somme sur les trajectoires classiques reliant un point q à lui-même. C'est le principe général d'une formule de trace semi-classique.

4.4.1 Formule de trace de Balian et Bloch

Balian et Bloch ont les premiers expliqué la présence d'oscillations dans la densité des niveaux d'énergie en utilisant la méthode de la phase stationnaire pour évaluer la fonction de Green dans le cas d'un parallélépipède et d'une sphère, montrant que les contributions dominantes provenaient des orbites périodiques fermées [65]. Ils ont utilisé par la suite une autre approche pour montrer [64], en calculant la transformée de Laplace inverse de la fonction de Green par rapport à $\hbar$, que la densité d'états $d_\epsilon(E) = d(E + i\epsilon)$ peut se mettre sous la forme

$$d_\epsilon(E) \simeq \bar{d} + \frac{1}{\pi \hbar^2} \sum_p \mathcal{I}m \mathcal{A}_p e^{iS_p/\hbar}, \quad (4.32)$$

où la somme porte sur toutes les trajectoires fermées.

4.4.2 Formule de trace de Gutzwiller

La formule de trace de Gutzwiller [62] est valable pour les systèmes chaotiques. Elle utilise l'expression (4.22) de la fonction de Green pour calculer l'intégrale (4.29). À $q_i = q_f = q$ fixé, la somme (4.22) porte sur toutes les trajectoires classiques ayant pour point de départ et pour point d'origine q , c'est-à-dire tous les moments initiaux p_i et tous les moments finaux p_f . Dans l'approximation semi-classique, on calcule l'intégrale sur q de nouveau par la méthode de la phase stationnaire. Les trajectoires pour lesquelles l'action classique associée, $S(q, q; E)$, est extrémale sont telles que

$$\left. \frac{\partial S}{\partial q_f} + \frac{\partial S}{\partial q_i} \right|_{q_i = q_f = q} = 0. \quad (4.33)$$

Ce sont d'après (4.7) les trajectoires vérifiant $p_i = p_f$, c'est-à-dire les orbites périodiques. Le développement de l'action au second ordre autour de ces orbites périodiques fait intervenir les dérivées secondes de l'action par rapport aux composantes de $q_{i\perp}$ et $q_{f\perp}$, que l'on peut exprimer en fonction de la matrice de monodromie M_p associée à l'orbite primitive p . L'intégration de $1/\dot{q}_{//}$ donne la période de l'orbite primitive. La matrice de monodromie associée à une orbite primitive p parcourue n fois est M_p^n ; finalement on obtient

$$\int dq G^{\text{s.c.}}(q, q; E) = \sum_{\text{ppo}, n} \frac{2\pi}{(2i\pi\hbar)^{(N+1)/2}} \frac{T_p}{|\det(M_p^n - I)|^{1/2}} e^{in\left(\frac{S_p}{\hbar} - \mu_p \frac{\pi}{2}\right)}, \quad (4.34)$$

où l'on somme à présent sur les orbites périodiques primitives (ppo) et sur le nombre n de répétitions de ces orbites. S_p est l'action classique comptée le long de l'orbite périodique primitive:

$$S_p = \oint pdq = kl_p, \quad (4.35)$$

l_p étant la longueur de l'orbite périodique primitive et μ_p son indice de Maslov. La densité d'états dans l'approximation semi-classique est alors la somme d'une partie "lisse" et d'une partie oscillante, superposition d'ondes planes:

$$d(E) = \bar{d}(E) + d^{\text{osc}}(E), \quad (4.36)$$

où $\bar{d}$ est le terme de Thomas-Fermi (2.22), et

$$d^{\text{osc}}(E) \simeq \frac{i}{(2i\pi\hbar)^{(N+1)/2}} \sum_{\text{ppo}, n} \frac{T_p}{|\det(M_p^n - I)|^{1/2}} e^{in\left(\frac{S_p}{\hbar} - \nu_p \frac{\pi}{2}\right)} + \text{c.c.}, \quad (4.37)$$

l'indice ν tenant compte des phases supplémentaires dues à l'intégration. La somme (4.37) est une somme formelle: elle n'est pas convergente; mais pour reproduire la densité d'états, il n'est nécessaire de conserver dans la somme que les contributions telles que $T_p \ll t_H$, où t_H est le temps de Heisenberg (2.10). En effet, $S/\hbar = kl_p = 2k^2 T_p = 2ET_p/\hbar$. On aura donc une même valeur de $\exp(iS/\hbar)$ si E est changée en $E + \epsilon_p$, où $\epsilon_p = h/2T_p$. Le terme $\exp(iS/\hbar)$ "verra" la structure discrète des niveaux d'énergie lorsque ϵ_p est grande devant l'espacement moyen $1/\bar{d}$ des niveaux, ce qui implique $T_p \ll h\bar{d} = t_H$. Le temps de Heisenberg (2.10) varie en $t_H \sim 1/\hbar^{N-1}$, il diverge donc à la limite classique pour $N \geq 2$. Il convient donc, dans l'approximation semi-classique pour les systèmes bidimensionnels, de prendre en compte les orbites longues.

4.4.3 Formule de trace de Berry

Dans le cas où les orbites périodiques apparaissent sous forme de faisceaux, la matrice de monodromie vérifie $\text{tr}M = 2$ et le raisonnement précédent ne s'applique plus. Dans [66], Berry et Tabor dérivent une formule de trace pour les systèmes intégrables multidimensionnels. Dans le cas bidimensionnel, on doit revenir à l'expression générale (4.22): l'intégrale sur q est une intégrale sur $q_{//}$ et sur $q_{\perp}$. L'intégrale sur $q_{\perp}$ fait apparaître la largeur du faisceau d'orbites périodiques. On obtient, en utilisant (4.35) et posant $\hbar = 1$,

$$\int dq G^{\text{s.c.}}(q, q; E) = \frac{2\pi}{(2i\pi)^{3/2}} \sum_{\text{op}} \frac{dq_{//}}{\dot{q}_{//}} dq_{\perp} \frac{1}{\sqrt{M_{12}}} \exp\left(ikl_p - i\mu_p \frac{\pi}{2}\right). \quad (4.38)$$

Dans le cas d'un billard polygonal bidimensionnel, la matrice de monodromie est donnée par (1.17) et la formule de trace (4.38) devient alors

$$\int dq G^{\text{s.c.}}(q, q; E) = \sum_{\text{pp}} \frac{\mathcal{A}_p}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{iknl_{pp} - 3i\pi/4 - in\nu_{pp}\pi/2}}{\sqrt{8\pi knl_{pp}}}, \quad (4.39)$$

$\mathcal{A}_p$ étant la surface occupée par un faisceau d'orbites périodiques primitives. La densité d'états semi-classique est

$$d(E) \simeq \bar{d} + \sum_{\text{pp}} \frac{\mathcal{A}_p}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{iknl_{pp} - i\pi/4 - in\nu_{pp}\pi/2}}{\sqrt{8\pi knl_{pp}}} + \text{c.c.} \quad (4.40)$$

4.4.4 Formule de trace pour les systèmes intégrables

On peut dériver directement une formule de trace générale pour les systèmes intégrables f -dimensionnels en partant de la définition de tels systèmes (voir section 1.4.1). Le calcul est donné en annexe A. On obtient, pour un Hamiltonien donné dans les variables actions-angles par $H(I_1, \dots, I_f)$,

$$d^{\text{osc}}(E) \simeq \sum_{N_i} \left(\frac{2\pi}{T}\right)^{\frac{f-3}{2}} \frac{1}{\sqrt{|NQN|}} e^{2i\pi \vec{N} \cdot \vec{I} - i\frac{\pi}{2} \vec{N} \cdot \vec{\mu} - i\frac{\pi}{4} \beta}, \quad (4.41)$$

pour $\vec{N} \in \mathbb{Z}^f$ fixé, $\vec{I}$ est le vecteur tel que $(2\pi N_i)_i$ et $(\partial_i H(\vec{I}))_i$ sont colinéaires, T est le coefficient de proportionnalité entre ces deux vecteurs, Q est la comatrice de la matrice $(\partial_{ij}^2 H)_{i,j}$ et $\beta = -(p-1) - 2a$, avec $\text{sgn}(NQN) = (-1)^a$.

Ce résultat est à comparer à la formule de trace de Berry et Tabor [66], où le préfacteur est donné de façon implicite, en fonction de la courbure scalaire de la surface d'énergie constante.

4.4.5 Formule de trace de Selberg

Nous ne saurions être complets sans évoquer l'un des seuls cas où la correspondance entre le comportement classique et le comportement quantique d'un système peut être établie de façon exacte. Dans le cas du mouvement libre d'une particule sur une surface à courbure négative constante à deux dimensions, le problème quantique revient à déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de l'équation de Schrödinger stationnaire $(\Delta_{LB} + E)\Psi = 0$, avec

$$\Delta_{LB} = y^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \quad (4.42)$$

l'opérateur de Laplace-Beltrami. Il existe dans ce cas une formule de trace exacte, due à Selberg [67, 68], reliant les valeurs propres de l'opérateur de Laplace-Beltrami aux orbites périodiques classiques. On considère un sous-groupe discret Γ de $SL(2, \mathbb{R})$, et on utilise le fait que si G_0 est la fonction de Green libre, la fonction de Green peut se mettre sous la forme

$$G(q_f, q_i; E) = \sum_{g \in \Gamma} G_0(q_f, g \cdot q_i; E) \quad (4.43)$$

où $g \cdot q_i$ est l'image du point initial par un élément du sous-groupe. La densité d'états est alors [69]

$$d(E) = \frac{\mu(\mathcal{D})}{4\pi} \tanh(\pi k) + \sum_{pp} \frac{l_{pp}}{4\pi k} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(kn l_{pp})}{\sinh(n l_{pp}/2)}, \quad (4.44)$$

la première somme étant prise sur les orbites périodiques primitives et la seconde sur le nombre de répétitions de ces orbites primitives. On a posé $E = k^2 + \frac{1}{4}$ et

$$\mu(\mathcal{D}) = \int_{\mathcal{D}} \frac{dx \, dy}{y^2}, \quad (4.45)$$

$\mathcal{D}$ étant le domaine fondamental du sous-groupe Γ . La relation (4.44) est exacte et n'est pas une approximation semi-classique.

4.4.6 Autres formules “de trace”

Nous mentionnerons juste l'existence de formules de trace adaptées au cas particulier de l'existence de symétries continues du système [70] ou de symétries non-abéliennes [71]. Une formule mérite également d'être mentionnée pour son intérêt analytique: celle donnant la densité des zéros de la fonction Zeta de Riemann [72], définie par

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_p \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}} \quad (4.46)$$

et prolongeable analytiquement sur tout le plan complexe privé du point $s = 1$. La conjecture de Riemann stipule que tous les zéros non-triviaux de cette fonction sont de la forme $\frac{1}{2} + iE$ avec E réel; la densité des “niveaux d'énergie” E sur l'axe $\mathcal{R}e \, s = \frac{1}{2}$ est donnée par la formule $d(E) = \bar{d}(E) + d^{\text{osc}}(E)$ (dite “formule explicite”), avec

$$\bar{d} \simeq \frac{1}{2\pi} \log \frac{E}{2\pi} \quad (4.47)$$

et

$$d^{\text{osc}}(E) \simeq -\frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{\sqrt{n}} e^{iE \ln n} + \text{c.c.}, \quad \Lambda(n) = \begin{cases} \ln p & \text{si } n = p^k \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (4.48)$$

Il y a une correspondance formelle entre les nombres premiers et les orbites périodiques primitives, ainsi qu'entre $(\ln p)$ et la période de ces orbites [73].

4.5 Exemples d'application

4.5.1 Cas simple du rectangle

Dans le cas d'un rectangle de côtés a et b (on posera $\mathcal{A} = ab$ la surface du rectangle), les fonctions propres et les niveaux d'énergie du système quantique stationnaire sont connus exactement. Les solutions de $(\Delta + E)\Psi = 0$ dépendent bien entendu des conditions aux limites. Pour des conditions aux limites périodiques, les fonctions propres et les valeurs propres sont données par

$$\Psi_{mn}(x,y) = \frac{1}{\sqrt{ab}} \exp\left(2i\pi \frac{mx}{a} + 2i\pi \frac{ny}{b}\right), \quad E_{mn} = \left(\frac{2\pi}{a}\right)^2 m^2 + \left(\frac{2\pi}{b}\right)^2 n^2 \quad (4.49)$$

et pour des conditions aux limites de Dirichlet, elles sont données par

$$\Psi_{mn}(x,y) = \frac{2}{\sqrt{ab}} \sin\left(\pi \frac{mx}{a}\right) \sin\left(\pi \frac{ny}{b}\right), \quad E_{mn} = \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 m^2 + \left(\frac{\pi}{b}\right)^2 n^2. \quad (4.50)$$

La densité de niveaux d'énergie peut être déterminée par la formule de trace (4.40): pour des conditions aux limites périodiques, les faisceaux d'orbites occupent tous une surface $\mathcal{A}_p = \mathcal{A}$ et l'index de Maslov est nul. En outre, si l'on ne veut considérer que la densité d'états non-dégénérés, il convient de diviser par 4 (d'après (4.49), à une même valeur de l'énergie correspondent 4 fonctions propres). L'équation (4.40) donne alors

$$d^{\text{osc}}(E) \simeq \frac{1}{4} \sum_p \frac{\mathcal{A}}{2\pi} \frac{e^{ikl_p - i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{8\pi k l_p}} + \text{c.c.}, \quad (4.51)$$

la somme portant sur toutes les orbites périodiques p (répétées ou non).

On peut également déterminer la densité de niveaux directement à partir de la définition (2.4): on a (par exemple pour des conditions aux limites périodiques)

$$d(E) = \frac{1}{4} \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} \delta(E - E_{mn}), \quad (4.52)$$

le facteur $1/4$ venant du fait que l'on considère la densité de niveaux non dégénérés. En effectuant une transformation de Poisson, on obtient

$$d(E) = \frac{1}{4} \sum_{M,N=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dmdn e^{2i\pi(Mm+Nn)} \delta\left(E - \left(\frac{2\pi}{a}\right)^2 m^2 - \left(\frac{2\pi}{b}\right)^2 n^2\right) \quad (4.53)$$

et un changement de variables $m = ar \cos \varphi/2\pi$, $n = br \sin \varphi/2\pi$ donne, après intégration,

$$d^{\text{osc}}(E) = \frac{\mathcal{A}}{16\pi} \sum_{M,N=-\infty}^{\infty} 'J_0(kl_{MN}). \quad (4.54)$$

On a posé $k^2 = E$; J_0 est la fonction de Bessel de première espèce, et

$$l_{MN} = \sqrt{(Ma)^2 + (Nb)^2}. \quad (4.55)$$

On reconnaît dans l_{MN} la longueur d'une orbite périodique dans le rectangle. Dans ce cas précis, on voit que la densité de niveaux s'exprime comme une somme sur les orbites périodiques du

système sans que l'on ait à faire appel à l'approximation semi-classique. La somme $\sum'$ porte sur $(M, N) \neq (0, 0)$; le terme $M = N = 0$ vaut $ab/16\pi$ et correspond au terme de Weyl (2.22), divisé par 4 conformément à (4.52). Dans l'approximation $\hbar \rightarrow 0$ ($k \rightarrow \infty$), on utilise [72]

$$J_0(x) \simeq_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right), \quad (4.56)$$

et l'expression (4.54) devient ainsi

$$d^{\text{osc}}(E) \simeq \frac{1}{4} \sum_{l_p} \frac{\mathcal{A}}{2\pi} \frac{e^{ikl_p - i\pi/4}}{\sqrt{8\pi k l_p}} + \text{c.c.}, \quad (4.57)$$

où la somme porte sur toutes les orbites périodiques $(M, N \in \mathbb{Z}, (M, N) \neq (0, 0))$ du rectangle avec conditions aux limites périodiques. On retrouve bien l'équation (4.51). Le billard rectangulaire étant un système intégrable, on peut encore obtenir cette expression à partir de la formule de trace (4.41).

Pour le billard rectangulaire avec conditions aux limites de Dirichlet, les orbites périodiques sont de longueurs

$$l_{MN} = \sqrt{(2Ma)^2 + (2Nb)^2}, \quad (4.58)$$

et la densité de niveaux est donnée par

$$d^{\text{osc}}(E) \simeq \sum_{l_p} \frac{\mathcal{A}}{2\pi} \frac{e^{ikl_p - i\pi/4}}{\sqrt{8\pi k l_p}} + \text{c.c.} \quad (4.59)$$

4.5.2 Cas moins simple du disque

Le calcul de la fonction de Green semi-classique est donné dans l'annexe C pour la propagation libre dans un billard circulaire, par deux méthodes différentes: à partir de la matrice de monodromie (section C.1), ou à partir du calcul explicite des valeurs propres (section C.3). On obtient

$$d^{\text{osc}}(E) \simeq 8 \sum_{N, M} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathcal{A}_p}{2\pi} \frac{e^{ikl_p - 3iNn\pi/2 + i\pi/4}}{\sqrt{8\pi k l_p}} + \text{c.c.} \quad (4.60)$$

où la somme porte sur $N > 0$, $0 < M < N/2$ et $\text{pgcd}(M, N) = 1$.

4.6 Limitations des formules de trace

La première limitation à l'utilisation des formules de trace pour des calculs analytiques est l'ignorance que l'on a (en dehors des systèmes intégrables ou d'autres systèmes très simples comme le billard de barrière 8.5) des orbites périodiques du système. Les seuls calculs analytiques accessibles seront ceux concernant des systèmes dont les orbites périodiques et leurs contributions sont connues explicitement (comme par exemple un billard avec une ligne de flux Aharonov-Bohm) ou ceux dont on peut déduire toutes les orbites périodiques par un certain procédé (voir par exemple les billards de Veech 8.4).

Les problèmes d'ordre mathématique proviennent de la non-convergence de la série formelle de la formule de trace. Des techniques existent, permettant d'y remédier [65].

Chapitre 5

Diffraction

La diffusion d'une onde sur un obstacle a été étudiée dès l'avènement de la Mécanique ondulatoire. La présence d'un obstacle (impureté, barrière, centres diffracteurs) dans un système en affecte à la fois les propriétés classiques et quantiques. Le comportement classique est modifié en ceci qu'une trajectoire qui atteint une singularité peut être prolongée de plusieurs manières. Quantiquement, l'existence d'une singularité modifie les niveaux d'énergie et les fonctions propres du système.

Dans le cadre de notre étude, il importe de savoir dans quelle mesure les niveaux d'énergie des systèmes considérés sont perturbés en présence de diffraction. On s'intéressera notamment, au chapitre 7, à l'incidence de la diffraction sur le caractère – intégrable, chaotique, intermédiaire – du système. La modification à la fois du comportement classique et du comportement quantique en présence de diffraction entraîne une modification des deux membres des formules de trace: densité de niveaux d'énergie et somme sur les orbites périodiques. Nous allons voir ici comment la formule de trace en est affectée.

5.1 Modèle

On modélise en général l'obstacle par l'ajout d'un potentiel $V(q)$ au Hamiltonien libre H_0 . Le potentiel $V(q)$ décrit une perturbation locale: il doit donc en particulier décroître à l'infini, et on doit avoir asymptotiquement $\psi \simeq \psi_0$. On note G_0 la fonction de Green du problème libre. Si $\psi_0(q)$ est une fonction propre du Hamiltonien H_0 , d'énergie propre E , alors

$$\psi(q) = \psi_0(q) + \int G_0(q, q') V(q') \psi(q') dq' \quad (5.1)$$

est fonction propre du Hamiltonien $H = H_0 + V$ pour la même énergie. Les fonctions propres du Hamiltonien H vérifient donc l'équation intégrale de la diffusion (5.1). La solution itérative formelle à cette équation (5.1) est

$$\begin{aligned} \psi(q) &= \psi_0(q) + \int dq' G_0(q, q') V(q') \psi_0(q') \\ &+ \int \int dq' dq'' G_0(q, q') V(q') G_0(q', q'') V(q'') \psi_0(q'') + \dots \end{aligned} \quad (5.2)$$

On obtient ainsi un développement formel de la fonction de Green G du système perturbé. Cette fonction de Green doit vérifier l'équation

$$(H_0 + V - E)G(q_f, q_i) = \delta(q_f - q_i), \quad (5.3)$$

et donc l'équation intégrale

$$G(q, q') = G_0(q, q') + \int dq'' G_0(q, q'') V(q'') G(q'', q'). \quad (5.4)$$

5.2 Contributions diffractives à la formule des traces

La théorie géométrique de la diffraction (GTD), introduite par Keller [74], permet d'inclure dans la formule de trace les effets dus aux singularités. Elle est basée sur le principe de moindre action de Fermat: les trajectoires classiques reliant q_i à q_f sont [75] celles correspondant à une valeur stationnaire de l'action au sein de classes de courbes définies par le nombre r de portions de courbe "collées" à la surface, le nombre s de points de la trajectoire touchant un angle, et le nombre t de points touchant un vertex. La fonction de Green semi-classique (4.16) doit alors prendre en compte ces trajectoires.

Dans les cas qui nous intéressent, nous allons considérer une singularité localisée dans une région de l'espace à deux dimensions. Il faut rajouter à la somme (4.16) la contribution G_{1D} des trajectoires touchant une fois la singularité, puis la contribution G_{2D} des trajectoires touchant deux fois la singularité, etc. On peut mettre la contribution G_{1D} sous la forme

$$G_{1D}(q_f, q_i) = G_0(q_0, q_i) \mathcal{D}(\theta, \theta') G_0(q_f, q_0), \quad (5.5)$$

q_0 étant le point où se trouve la singularité. Cette relation définit le coefficient de diffraction $\mathcal{D}(\theta, \theta')$ correspondant à la diffusion d'une onde arrivant sur le centre diffracteur avec l'angle θ et en repartant avec l'angle θ' . Les contributions des trajectoires subissant m diffractions sur des singularités situées aux points $q_1, \dots, q_m$ peuvent se mettre sous la forme

$$G_{mD}(q_f, q_i) = G_0(q_1, q_i) \prod_{j=1}^{m-1} (\mathcal{D}_j G_0(q_{j+1}, q_j)) \mathcal{D}_m G_0(q_f, q_m). \quad (5.6)$$

Les $\mathcal{D}_i$ sont les coefficients de diffraction correspondant à chaque rencontre de la trajectoire avec la singularité, et les G_0 sont les fonctions de Green libres semi-classiques. On peut interpréter la relation (5.6) à partir de l'expression semi-classique (4.16) en observant que G_{mD} rend compte de tous les trajets possibles de q_i à q_f .

Les coefficients de diffraction $\mathcal{D}$ sont calculables dans certains cas:

- diffraction sur un angle de mesure γ (dans un billard polygonal par exemple) [74]:

$$\mathcal{D}(\theta, \theta') = -\frac{4}{N} \frac{\sin(\pi/N) \sin(\theta/N) \sin(\theta'/N)}{(\cos \frac{\pi}{N} - \cos \frac{\theta+\theta'}{N}) (\cos \frac{\pi}{N} - \cos \frac{\theta-\theta'}{N})}, \quad (5.7)$$

avec $N = \gamma/\pi$ et $\theta, \theta' \in [0, \gamma]$;

- diffraction sur une ligne de flux Aharonov-Bohm [76]:

$$\mathcal{D}(\theta, \theta') = \frac{2 \sin(\alpha\pi)}{\cos \frac{\theta-\theta'}{2}} \exp\left(i \frac{\theta - \theta'}{2}\right), \quad (5.8)$$

α étant le paramètre du flux (voir section 8.1);

– diffraction sur une singularité: à deux dimensions,

$$\mathcal{D} = \frac{\lambda}{1 + i\lambda/4}, \quad (5.9)$$

et à trois dimensions

$$\mathcal{D} = \frac{4\pi\lambda}{1 + ik\lambda}, \quad (5.10)$$

où λ est un paramètre caractérisant le potentiel [77, 78].

Plus généralement, il est nécessaire que le coefficient de diffraction respecte le “théorème optique”, qui en dimension 2 s’écrit

$$\mathcal{D}(\theta, \theta') - \bar{\mathcal{D}}(\theta', \theta) = -\frac{i}{4\pi} \int \mathcal{D}(\theta, \theta'') \bar{\mathcal{D}}(\theta', \theta'') d\theta'', \quad (5.11)$$

où $d\theta''$ est l’élément angulaire autour de la direction θ'' . Ce théorème optique est la conséquence de l’unitarité de la matrice S (voir [79] §124). La référence [80] en donne une généralisation à une dimension quelconque. Le théorème optique indique, dans le cas particulier où $\theta = \theta'$, que la partie imaginaire de l’amplitude de diffusion est proportionnelle à la section efficace totale.

A partir de l’expression (4.16) ou de l’expression (4.22) pour la fonction de Green semi-classique, on peut calculer la trace de la fonction (5.6) par la méthode de la phase stationnaire. Considérons par exemple le cas d’un billard contenant un centre diffracteur ponctuel situé au point q_0 . Les fonctions de Green semi-classiques intervenant dans (5.6) sont des sommes sur les orbites périodiques allant de q_0 à lui-même. La trace de G_{mD} est l’intégrale sur tous les points $q = q_i = q_f$. La période $T_p(E)$, qui est l’intégrale de $dq_{//}$ le long de la trajectoire p , apparaît d’après (4.10) comme la dérivée de l’action $S_p(E)$ par rapport à l’énergie. La trace de la fonction de Green en présence de diffraction a alors pour expression, en tenant compte des diffractions multiples,

$$\int dq G_D^{\text{s.c.}}(q, q; E) \simeq \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \frac{\partial}{\partial E} \prod_{j=1}^m \{G_0(q_0, q_0; E) \mathcal{D}_j\}, \quad (5.12)$$

la division par m permettant de prendre en compte le fait qu’une série de m diffractions successives peut avoir lieu en commençant par l’une ou l’autre des m orbites diffractives. Par conséquent, la densité d’états associée aux orbites diffractives est

$$\begin{aligned} d_d(E) &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\pi m} \frac{\partial}{\partial E} \text{Im} \sum_{\vec{n}_i, \vec{n}'_j} G_0(\vec{n}_1, \vec{n}'_1) \mathcal{D}(\vec{n}'_1, \vec{n}_2) \dots \\ &\times G_0(\vec{n}_m, \vec{n}'_m) \mathcal{D}(\vec{n}'_m, \vec{n}_1); \end{aligned} \quad (5.13)$$

$G_0(\vec{n}, \vec{n}')$ est la contribution à la fonction de Green libre des trajectoires classiques partant du point singulier avec un moment parallèle à $\vec{n}$ et y revenant avec un moment parallèle à $\vec{n}'$:

$$\sum_{\vec{n}, \vec{n}'} G_0(\vec{n}, \vec{n}') = \sum_p \frac{e^{ikl_p - 3i\pi/4}}{\sqrt{8\pi k l_p}}. \quad (5.14)$$

On peut réécrire cette densité sous la forme synthétique

$$d_{d.o.}(E) = -\frac{1}{\pi} \text{Im} \frac{\partial}{\partial E} \ln \det(1 - \hat{K}) \quad (5.15)$$

où $\hat{K}$ est l'opérateur défini par

$$(\hat{K}\phi)(\vec{n}) = \sum_{\vec{n}', \vec{n}''} G_0(\vec{n}, \vec{n}') \mathcal{D}(\vec{n}', \vec{n}'') \phi(\vec{n}''). \quad (5.16)$$

Dans le cas d'un mouvement bidimensionnel où la fonction de Green a la forme (4.25), on obtient avec l'équation (2.4), en ne retenant que les termes d'ordre dominant pour $k \rightarrow \infty$,

$$d_d(E) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\vec{l}_1, \dots, \vec{l}_m} \frac{L}{4\pi km} \prod_{j=1}^m \frac{\mathcal{D}_j}{\sqrt{8\pi k l_j}} e^{ikL - i\mu \frac{\pi}{2} - 3im \frac{\pi}{4}} + \text{c.c.}; \quad (5.17)$$

$L = l_1 + \dots + l_m$ est la longueur totale de la trajectoire diffractive et $\mu = \mu_1 + \dots + \mu_m$ est l'indice de Maslov total.

La dérivation par rapport à E fait ainsi apparaître un terme en L/k , donc d'ordre sous-dominant par rapport à la contribution des orbites périodiques.

5.3 Corrections diffractives près de la frontière optique

La théorie géométrique de la diffraction n'est plus valable lorsque le coefficient de diffraction $\mathcal{D}$ diverge. C'est le cas de la diffraction vers l'avant dans le cas de la diffraction sur une ligne de flux Aharonov-Bohm (5.8), ou au voisinage des frontières optiques dans le cas de la diffraction par un angle dans un billard polygonal. (On appelle "frontière optique" la limite séparant les zones où $\mathcal{D}$ est fini: elle correspond, dans le cas où l'onde est une onde lumineuse, à la ligne séparant la zone d'ombre de la zone éclairée. Elle est aussi la frontière séparant les faisceaux de trajectoires périodiques de natures différentes (voir les sections 8.1 pour le billard Aharonov-Bohm et 8.2 pour les billards polygonaux)).

La divergence du coefficient de diffraction à la frontière optique n'est bien entendu pas physique et n'est qu'une conséquence de l'approximation (5.5). Il faut donc remplacer cette approximation au voisinage de la frontière optique. La technique la plus utilisée est l'"approximation uniforme".

5.3.1 Approximation uniforme pour les centres diffractifs

Elle est due à Pauli [81], et est développée dans [82, 83, 84]. Dans le cas où le système est diffractif avec un coefficient de diffraction divergeant au voisinage de la frontière optique, on obtient une solution approximative en régularisant les parties divergentes du coefficient de diffraction autour de chaque pôle. Par exemple, pour une diffraction par un demi-plan (voir figure 5.3.2), la solution exacte peut être obtenue par une méthode due à Sommerfeld [85]. La fonction de Green totale se décompose en la somme d'une partie géométrique et une partie diffractive: $G = G_{\text{geo}} + G_d$. Dans le cadre de la Théorie Géométrique de la Diffraction, la partie diffractive de la fonction de Green au point q_f peut alors être mise sous la forme (5.5) avec $\mathcal{D}$ donné par (5.7). Pour pallier la divergence du coefficient $\mathcal{D}$ au voisinage de la frontière optique, on remplace les parties divergentes de $\mathcal{D}$ par des fonctions "lisses" au voisinage de chaque pôle [86].

5.3.2 Approximation de Kirchhoff

L'approximation de Kirchhoff est basée sur la formule intégrale de Helmholtz [85]: on peut exprimer la solution ψ de l'équation $(\nabla^2 + k^2)\psi = 0$ en tout point d'une région comprise à l'intérieur d'une surface Σ en fonction de sa valeur sur la surface, par

$$\psi(q) = \int_{\Sigma} (\psi(q') \nabla' G_0(q', q) - G_0(q', q) \nabla' \psi(q')) n' . dS(q'), \quad (5.18)$$

n' étant la normale pointant vers q , si l'on connaît la fonction de Green G_0 solution de

$$(\Delta' + k^2)G_0(q', q) = -\delta(q). \quad (5.19)$$

En présence d'un écran comportant des ouvertures, il y aura diffraction. L'approximation de Kirchhoff consiste à affirmer que la fonction d'onde en présence de cette perturbation s'obtient en remplaçant, dans le membre de droite de l'équation (5.18), ψ par ψ_0 (la fonction d'onde libre), et en utilisant pour G_0 la fonction de Green libre qui s'annule sur l'écran: si l'on éclaire l'écran par une source en q_0 , la solution de Kirchhoff est

$$\psi_K(q) = \int_{\text{ouvertures}} (\psi_0(q') \nabla' G_0(q', q) - G_0(q', q) \nabla' \psi_0(q')) n' . dS(q'). \quad (5.20)$$

La solution ψ_K satisfait bien l'équation $(\nabla^2 + k^2)\psi = 0$. (Notons que $\psi_K(q)$ n'est pas égal à 0 sur l'écran et $\psi_0(q)$ sur les ouvertures.)

Il est possible, dans le cadre de l'approximation semi-classique, de remplacer l'approximation uniforme par l'approximation de Kirchhoff (5.20). La fonction de Green au point q_f est alors donnée, d'après (5.20), par

$$\begin{aligned} G_d(q_f, q_i; E) &= \int_0^\infty [G_0(q, q_i) \nabla_q G_0(q, q_f) - G_0(q, q_f) \nabla_q G_0(q, q_i)] n . dS(q) \\ &= -2 \int_0^\infty G_0(q, q_f) \nabla_q G_0(q, q_i) n . dq \end{aligned} \quad (5.21)$$

après intégration par parties. La fonction (5.5) doit donc être remplacée par

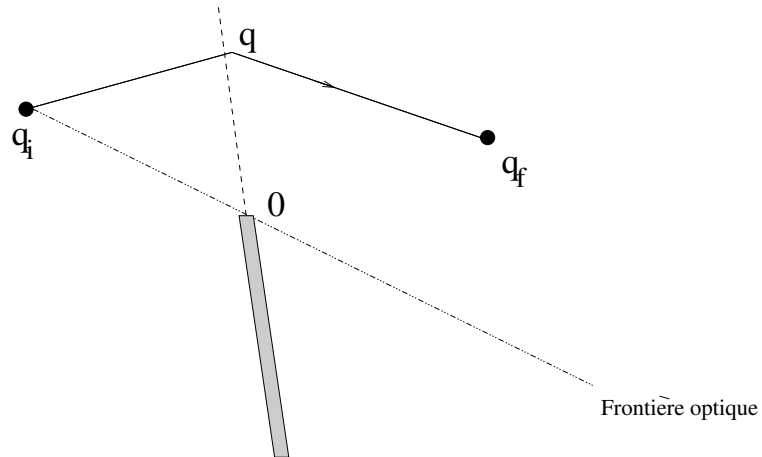


FIG. 5.1 – Diffraction par un plan demi-infini

$$G_{1D}(q_f, q_i) = G_d(q_f, q_i; E) + G_0(q_0, q_i) \mathcal{D}_{\text{reg}}(\theta, \theta') G_0(q_f, q_0). \quad (5.22)$$

où $\mathcal{D}_{\text{reg}}$ contient la partie non-divergente du coefficient de diffraction [84]. Cette méthode se généralise aux diffractions multiples; les différentes contributions possibles sont envisagées dans [84]: si on a un centre diffracteur ponctuel, l'intégrale sur $[0, \infty[$ dans (5.21) devient une intégrale de $-\infty$ à $+\infty$. Dans le cas d'une ligne de flux Aharonov-Bohm (voir section 8.1), c'est l'action $S(E)$ qui est modifiée: l'impulsion p_μ devenant $p_\mu - eA_\mu$ avec $A_\phi = \alpha/r$, l'action est

$$S(E) = \oint (p_\mu - eA_\mu) dq_\mu = kl_p - \alpha \oint d\phi. \quad (5.23)$$

La fonction de Green associée à une seule diffraction devient

$$G_d(q_f, q_i; E) = -2 \int_{-\infty}^{\infty} G_0(q, q_f) \nabla_q G_0(q, q_i) e^{i\alpha \Delta\Phi(q)} n \cdot dq \quad (5.24)$$

où $\Delta\Phi(q) = \oint d\phi$ correspond à la phase totale accumulée au cours du trajet de q_i à q_f passant par q .

5.4 Conclusion

Dans l'approche semi-classique de l'étude statistique de la distribution des niveaux d'énergie de systèmes quantiques, l'outil de base est la formule de trace, qui connecte la densité de niveaux aux orbites périodiques du système. Nous emploierons surtout la formule de trace (4.40). En présence de diffraction (angles dans un billard plan polygonal, ligne de flux Aharonov-Bohm, centre diffracteur), la dynamique classique est modifiée par la présence d'orbites diffractives, c'est-à-dire d'orbites partant de la singularité pour y revenir. Cette modification affecte également la formule de trace, en lui ajoutant une contribution donnée par l'équation (5.17). Dans les cas où le coefficient de diffraction $\mathcal{D}$, donné par (5.7-5.10), diverge, il convient de régulariser l'expression de la fonction de Green.

Chapitre 6

Interactions d'orbites périodiques

Les chapitres précédents nous ont montré comment on pouvait relier la densité de niveaux d'énergie d'un système à la distribution des trajectoires périodiques du système correspondant. L'étude des fonction de corrélation nécessite le calcul de la valeur moyenne de produits de densités d'états. Grâce à l'expression de la densité d'états comme une somme sur des orbites périodiques par l'intermédiaire des formules de trace, ces produits de densités d'états se ramènent à des calculs d'interactions entre orbites périodiques. Les différentes contributions, diagonales et non-diagonales, sont sommées en utilisant la méthode de la phase stationnaire.

6.1 Interactions de densités d'états ou de fonctions de Green

6.1.1 Interactions de densités de niveaux d'énergie

Nous avons vu que, dans l'approximation semi-classique, la densité des états d'un système dynamique quantique pouvait s'exprimer en fonction d'une somme sur les orbites périodiques classiques de ce système grâce aux formules de trace (4.37), (4.40), (4.32), (4.44), dont la forme générale est

$$d(E) = \bar{d} + \sum_{p,n} A_{n,p} e^{inS_p/\hbar} + \text{c.c.}, \quad (6.1)$$

la somme portant sur les orbites périodiques p et le nombre de répétitions n de ces orbites. La partie "lisse" $\bar{d}(E)$ est donnée par l'équation (2.21), ou (2.22) pour les systèmes bidimensionnels. L'action est $S_p = kl_p$ où l_p est la longueur d'une orbite primitive. Le préfacteur est, pour les systèmes dynamiques bidimensionnels (4.37),

$$A_{n,p} = \frac{T_p}{2\pi\hbar |\det(M_p^n - I)|^{1/2}} e^{-\frac{\pi}{2}in\nu_p}. \quad (6.2)$$

Pour les systèmes intégrables ou pseudo-intégrables bidimensionnels, présentant des orbites sous forme de faisceaux d'orbites périodiques (4.40),

$$A_{n,p} = \frac{A_p}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{8\pi k n l_p}} e^{-\frac{\pi}{2}in\nu_p}. \quad (6.3)$$

Dans le cas de systèmes intégrables f -dimensionnels dont le Hamiltonien est $H(I_1, \dots, I_f)$, on a (4.41)

$$A_{n,p} = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^{\frac{f-3}{2}} \frac{1}{\sqrt{|NQN|}} e^{-i\frac{\pi}{2}\vec{N} \cdot \vec{\mu} - i\frac{\pi}{4}\beta}, \quad (6.4)$$

pour $\vec{N} \in \mathbb{Z}^f$ fixé, $\vec{I}$ est le vecteur tel que $(2\pi N_i)_i$ et $(\partial_i H(\vec{I}))_i$ sont colinéaires, T est le coefficient de proportionnalité, Q est la comatrice de la matrice $(\partial_{ij}^2 H)_{i,j}$ et $\beta = -(p-1) - 2a$, $\text{sgn}(NQN) = (-1)^a$.

L'étude des fonctions de corrélation (2.6) nécessite le calcul de produits moyennés de densités d'états, de la forme

$$\langle d^{\text{osc}}(E_1) d^{\text{osc}}(E_2) \dots d^{\text{osc}}(E_n) \rangle. \quad (6.5)$$

D'après les expressions semi-classiques des densités d'états, il s'agit de calculer une moyenne de termes de la forme

$$\left\langle \prod_{i=1}^m A_{n_i, p_i} \prod_{j=1}^n \bar{A}_{n_j, p_j} \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \left(\sum_{i=1}^m n_i S_{p_i}(E) - \sum_{j=1}^n n_j S_{p_j}(E) \right) \right\} \right\rangle \quad (6.6)$$

où les termes correspondant à $1 \leq j \leq n$ proviennent du complexe conjugué dans l'équation (6.1).

Nous nous intéresserons ici au calcul de la fonction de corrélation à deux points (2.9). Lorsque l'on développe l'action sous la forme $S_p(E + \epsilon/2) \approx S_p(E) + \frac{1}{2}\epsilon T_p(E)$, les termes ayant en exposant une somme d'actions ont une moyenne nulle: ils disparaissent. La fonction de corrélation à deux points s'exprime alors dans l'approximation semi-classique par

$$R_2^c(\epsilon) = \langle \sum_{\substack{n_1, p_1 \\ n_2, p_2}} A_{n_1, p_1} \bar{A}_{n_2, p_2} e^{\frac{i}{\hbar} (n_1 S_{p_1}(E) - n_2 S_{p_2}(E)) + \frac{i\epsilon}{2\hbar} (n_1 T_{p_1}(E) + n_2 T_{p_2}(E))} + \text{c.c.} \rangle. \quad (6.7)$$

Le facteur de forme (2.8) s'exprime lui aussi par une somme double sur les orbites périodiques par

$$K_2(\tau) = \langle \frac{1}{d^2} \sum_{\substack{n_1, p_1 \\ n_2, p_2}} A_{n_1, p_1} \bar{A}_{n_2, p_2} e^{\frac{i}{\hbar} (n_1 S_{p_1}(E) - n_2 S_{p_2}(E))} \delta \left(\tau - \frac{n_1 T_{p_1}(E) + n_2 T_{p_2}(E)}{2t_H} \right) \rangle, \quad (6.8)$$

où t_H est le temps de Heisenberg (2.10).

6.1.2 Interaction de fonctions de Green

Dans les systèmes dynamiques considérés, l'action est $S_p = kl_p$ et la fonction de Green comme la densité s'expriment comme une somme sur les trajectoires classiques du système. On a donc formellement

$$G(q_f, q_i; E) = \sum_{\substack{\text{cl} \\ q_i \rightarrow q_f}} A_p e^{ikl_p}, \quad (6.9)$$

l_p étant ici la longueur d'une orbite, éventuellement répétée ($l_p = nl_{pp}$). En présence de diffraction au point q_0 , les formules de trace sont modifiées par l'ajout d'une contribution supplémentaire (5.13) qui fait intervenir des produits de fonctions $G(\vec{n}, \vec{n}')$ telles que

$$\sum_{\vec{n}, \vec{n}'} G(\vec{n}, \vec{n}') = \sum_{\substack{\text{cl} \\ q_0 \rightarrow q_0}} A_p e^{ikl_p}. \quad (6.10)$$

Le calcul de la contribution diffractive (5.13) à la formule de trace nécessite d'effectuer le produit de telles fonctions de Green et d'en calculer la valeur moyenne. On doit donc calculer des produits

moyennés du type $\langle G_+^m(E_1) \langle G_-^n(E_2) \rangle$, c'est-à-dire semi-classiquement de la forme

$$\left\langle \prod_{i=1}^m A_{p_i} \prod_{j=1}^n \overline{A_{p_j}} \exp [ik_+(l_{p_1} + l_{p_2} + \dots + l_{p_m}) - ik_-(l'_{p_1} - l'_{p_2} - \dots - l'_{p_n})] \right\rangle, \quad (6.11)$$

avec $k_{\pm} = \sqrt{E \pm \epsilon/2}$.

6.2 Approximation diagonale et hors-diagonale

6.2.1 Approximation diagonale

Dans le cas de la fonction de corrélation à deux points, Berry a montré [16] que, pour les systèmes intégrables, la moyenne $\langle d(E + \epsilon/2)d(E - \epsilon/2) \rangle$ pouvait être calculée semi-classiquement par la méthode de la phase stationnaire, en ne prenant en compte, dans (6.7) ou (6.8), que les orbites (p_1, p_2) ayant exactement la même action ($S_{p_1}(E) = S_{p_2}(E)$): les contributions des paires d'orbites périodiques dont les actions sont différentes se compensent lorsqu'on moyenne sur la fenêtre d'énergie et disparaissent. Le calcul de la fonction de corrélation à deux points se fait donc dans cette approximation en sommant sur toutes les orbites périodiques: (6.7) donne

$$R_2^c(\epsilon) = \sum_{n,p} |A_{n,p}|^2 e^{i\epsilon n T_p(E)/\hbar} + \text{c.c.} \quad (6.12)$$

La somme ainsi obtenue peut alors être calculée en utilisant la règle de sommation de Hannay-Ozorio de Almeida [87]: cette règle exprime le fait que dans les systèmes chaotiques, la prolifération exponentielle (1.12) des orbites périodiques est compensée par la décroissance du préfacteur $A_{n,p}$: on a ainsi

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_i |A_j|^2 \delta(T - T_i) = 1. \quad (6.13)$$

Cette méthode permet de calculer $K(\tau)$ dans l'approximation diagonale: d'après (6.8), on a

$$K^{\text{diag}}(\tau) = \frac{2\pi}{\bar{d}} \sum_{n,p} |A_p|^2 \delta \left(2\pi \bar{d} \tau - \frac{n T_p}{\hbar} \right). \quad (6.14)$$

Pour les systèmes intégrables sans dégénérescence des niveaux d'énergie, on arrive à $K^{\text{diag}}(\tau) = 1$, conformément à la conjecture de Berry-Tabor (le calcul est fait dans l'annexe A). Lorsque les niveaux ont une dégénérescence égale à g , on obtient $K^{\text{diag}}(\tau) = g$: le calcul est fait dans le cas du disque, où la dégénérescence est $g = 2$, à l'annexe C.

Pour les systèmes chaotiques, la densité locale d'orbites périodiques est [87]

$$\rho_p = \frac{\det(M_p - 1)}{T_p} \quad (6.15)$$

et le facteur de forme diagonal vaut

$$K^{\text{diag}}(\tau) = g\tau, \quad (6.16)$$

où g est la multiplicité moyenne des orbites périodiques ($g = 1$ pour les systèmes sans symétries ni invariance par renversement du temps, $g = 2$ pour les systèmes ayant une invariance par renversement du temps). Ces valeurs coïncident avec celles que donnent les résultats de la RMT pour des petites valeurs de τ (voir les Equations (2.38)). Mais le fait que $K^{\text{diag}}(\tau)$ croisse linéairement en τ dans (6.16) est incompatible avec la saturation (2.11) prévue pour le facteur de forme. Cela implique donc qu'il faut aller au-delà de l'approximation diagonale.

6.2.2 Validité de l'approximation diagonale

L'approximation diagonale consiste à ne prendre en compte que les termes provenant d'orbites périodiques le long desquelles l'action est égale. Il s'avère cependant qu'il existe en général des corrélations entre les actions des orbites périodiques, dont il est nécessaire de tenir compte [88]. Le critère de validité de l'approximation est donc que les contributions hors-diagonales soient négligeables lorsqu'on effectue la moyenne (2.7) sur la fenêtre d'énergie ΔE autour de E , c'est-à-dire que l'on doit avoir $\langle \exp[i(S_1(E') - S_2(E'))/\hbar] \rangle \ll 1$, la moyenne portant sur les énergies E' comprises entre $E - \Delta E/2$ et $E + \Delta E/2$. Si on effectue le développement $S(E') \simeq S(E) + (E' - E)T(E)$, la moyenne porte sur E' : il faut donc que l'on ait la majoration $\langle \exp[i(E' - E)(T_1(E') - T_2(E'))/\hbar] \rangle \ll 1$, soit

$$\frac{\Delta E(T_1 - T_2)}{\hbar} \gg 1. \quad (6.17)$$

Pour les billards, cette condition impose que l'on néglige les interactions entre deux orbites p_1 et p_2 dont les longueurs sont telles que $l_{p_1} - l_{p_2} \gg \hbar k / \Delta E = \sqrt{E} / \Delta E$ ($\hbar = 1$). Pour les systèmes chaotiques, à cause de la prolifération exponentielle (1.12) des orbites périodiques, il y a $(e^{\kappa L} / L) dL$ orbites entre L et $L + dL$; la distance moyenne entre deux orbites est donc $Le^{-\kappa L}$. La condition (6.17) est donc respectée si (asymptotiquement) $l_p < L_{\text{lim}} = \frac{1}{\kappa} \ln(\Delta E / \sqrt{E})$. On voit donc que l'approximation diagonale n'est plus valable pour les orbites longues, c'est-à-dire pour les grandes valeurs de $K(\tau)$. En revanche elle sera valable pour les petites valeurs de τ , ainsi que pour les systèmes non-intégrables dont la prolifération des orbites périodiques n'est pas trop grande.

Une première approche pour tenir compte des interactions non-diagonales a été faite dans [89], où il est montré que les interactions entre les orbites se bouclant sur elles-mêmes sont responsables du terme en τ^2 dans le développement en $\tau \sim 0$ du facteur de forme pour un système invariant par renversement du temps.

6.2.3 Au-delà de l'approximation diagonale

Les corrections à l'approximation diagonale correspondent à l'interaction entre des orbites dont les actions ne sont pas égales. Plaçons-nous dans le cas d'un produit de m fonctions de Green pour un système intégrable:

$$\sum_{\vec{l}_{p_1}, \dots, \vec{l}_{p_m}} \prod_{i=1}^m A_{p_i} e^{ik(l_{p_1} + l_{p_2} + \dots + l_{p_m})} \quad (6.18)$$

et supposons une densité d'orbites périodiques ρ constante. La fonction de Green est donnée par (4.24) (dans le cas général, il faut intégrer le préfacteur de (4.16) le long des orbites périodiques, voir par exemple le cas du billard circulaire à la section C.2.3). La somme (6.18) sur toutes les orbites périodiques peut être évaluée dans l'approximation de la phase stationnaire: les "points de col" sont caractérisés par la donnée d'un entier p , et de p vecteurs $(\vec{L}_1, \dots, \vec{L}_p)$.

On obtient la contribution $G_p^m(\vec{L}_1, \dots, \vec{L}_p)$ à (6.18) correspondant au point de col $(\vec{L}_1, \dots, \vec{L}_p)$ en sommant sur toutes les partitions possibles de $\{\vec{l}_i, 1 \leq i \leq m\}$ en p sous-ensembles de $m_k(m_1 + \dots + m_p = m)$ éléments [90] tels que $\vec{l}_1 + \vec{l}_2 + \dots + \vec{l}_{m_1} = \vec{L}_1$, $\vec{l}_{m_1+1} + \vec{l}_{m_1+2} + \dots + \vec{l}_{m_1+m_2} = \vec{L}_2$, etc... A p et $(\vec{L}_1, \dots, \vec{L}_p)$ fixés, les variétés sur lesquelles on intègre sont donc les configurations des

m vecteurs $(\vec{l}_{p_1}, \dots, \vec{l}_{p_m})$ pour lesquelles m_1 vecteurs sont presque alignés dans la direction $\vec{L}_1$, m_2 vecteurs sont presque alignés dans la direction $\vec{L}_2$, etc... Une partition donnée de m va apporter à $G_p^m(\vec{L}_1, \dots, \vec{L}_p)$ la même contribution quel que soient les m_i vecteurs choisis pour la direction $\vec{L}_i$. Pour chaque partition on aura donc $m!/(m_1! \dots m_p!)$ contributions identiques.

Le calcul de l'intégration sur les variétés de point de col est détaillé dans l'article 3 et donne

$$(G^{\text{s.c.}})^m = \sum_{\vec{l}_1, \dots, \vec{l}_m} A_1 A_2 \dots A_m e^{ik(l_1 + \dots + l_m)} = \frac{1}{(m-1)!} \sum_{\vec{L}_p} \left(\frac{\rho L}{2ik} \right)^{m-1} A_p e^{ikL_p}. \quad (6.19)$$

La contribution de $(\vec{L}_1, \dots, \vec{L}_p)$ est donc

$$G_p^m(\vec{L}_1, \dots, \vec{L}_p) = \sum_{\substack{m_1 + \dots + m_p = m \\ m_i \geq 1}} \frac{m!}{m_1! \dots m_p!} \prod_{i=1}^p \frac{1}{(m_i-1)!} \left(\frac{\rho L_i}{2ik} \right)^{m_i-1} A_{p_i} e^{ikL_i}. \quad (6.20)$$

On peut alors déterminer des produits du type (6.11) en effectuant l'approximation diagonale dans chaque direction $\vec{L}_1, \dots, \vec{L}_p$. Cette méthode sera détaillée et généralisée à des calculs plus divers dans un article prochain [91].

6.2.4 Exemple des systèmes intégrables

La méthode générale pour déterminer les contributions hors-diagonales aux interactions de fonctions de Green est exposée dans [90]. Le calcul explicite dans le cas général d'un système intégrable en dimension p est détaillé en annexe B. Il est basé sur la formule de trace pour les systèmes intégrables, dérivée dans l'annexe A.

6.3 Conclusion

Le calcul des fonctions de corrélation et du facteur de forme se fait, à l'ordre le plus bas, en ne tenant compte que de l'interaction entre les orbites ayant exactement la même longueur: c'est l'approximation diagonale. On peut déterminer les corrections à cette approximation en calculant, par la méthode de la phase stationnaire, les contributions dues aux interactions de trajectoires ayant des longueurs légèrement différentes. Pour cela, il est possible d'obtenir un produit de fonctions de Green comme une somme sur des familles d'orbites périodiques (Equation 6.20), avec un préfacteur tenant compte des contributions de toutes les orbites. On peut ainsi calculer les contributions diffractives à la formule de trace, à tout ordre en L/k , afin d'obtenir le développement asymptotique de $K(\tau)$.

Seconde partie

Etude détaillée de systèmes spécifiques

Introduction

Le moyen le plus naturel pour commencer l'étude de la distribution statistique des niveaux d'énergie d'un système quantique est bien entendu de rechercher les niveaux solutions de l'équation de Schrödinger stationnaire qui décrit le problème. Malheureusement, cette possibilité aboutit extrêmement rarement: en dehors des cas les plus simples, comme le rectangle, on est incapable de déterminer les niveaux d'énergie. Le calcul est néanmoins possible dans le cas où les niveaux d'énergie sont connus de façon implicite. C'est par exemple le cas du disque, qui est un système intégrable. Afin de pouvoir calculer la distribution des plus proches voisins d'un système qui ne soit pas intégrable, il faut donc connaître, au moins implicitement, les niveaux d'énergie. De façon assez remarquable, il est possible d'établir une équation donnant implicitement les niveaux d'énergie du système perturbé en fonction des niveaux d'énergie du système non-perturbé dans le cas du billard de Šeba, qui est un billard rectangulaire perturbé par un centre diffractif. Le chapitre 7 présente une étude de ce système, et à travers lui des systèmes diffractifs dont l'amplitude de diffraction ne diverge pas.

L'autre moyen d'investigation du comportement quantique des systèmes dynamiques est l'approche semi-classique, qui utilise les formules de trace semi-classiques connectant la distribution des niveaux d'énergie quantiques à celle des orbites périodiques classiques du système. Toute la difficulté consiste à connaître ces orbites périodiques. Pour utiliser la formule de trace, il faut en effet être capable d'énumérer les orbites périodiques et les orbites diffractives, et connaître en outre leurs caractéristiques: longueurs, surfaces occupées dans le billard, indices de Maslov. Dans certains cas très simples (rectangle, cercle), ces orbites sont connues, et leur modification en présence d'une perturbation l'est aussi. C'est le cas du billard rectangulaire avec centre diffracteur (billard de Šeba), qui fait l'objet du chapitre 7, ou du billard avec ligne de flux Aharonov-Bohm (chapitre 8, annexe C). Dans la majeure partie des cas, en revanche, on ne peut pas expliciter les orbites périodiques. Il existe de notables exceptions à cela parmi les billards pseudo-intégrables: il est possible, pour certains billards polygonaux appelés billards de Veech, d'énumérer les orbites périodiques grâce à la présence d'une structure mathématique sous-jacente; pour d'autres (billards avec barrière), les orbites périodiques se ramènent à la connaissance des orbites périodiques du rectangle. Ces billards sont l'objet du chapitre 8.

Chapitre 7

Systèmes intégrables perturbés

L’une des signatures quantiques de l’aspect classiquement intégrable ou chaotique d’un système est le comportement asymptotique de la distribution des plus proches voisins de son spectre d’énergie. Les systèmes intégrables présentent une distribution des plus proches voisins $P(s)$ qui vaut 1 à l’origine (absence de répulsion de niveaux) et qui décroît exponentiellement en l’infini, alors que pour les systèmes chaotiques $P(s)$ s’annule à l’origine (répulsion de niveaux) et a une décroissance plus rapide qu’exponentielle (en e^{-s^2} pour les ensembles gaussiens des matrices aléatoires).

Il existe toutefois des systèmes qui présentent numériquement une “statistique intermédiaire”, c’est-à-dire une répulsion de niveaux à l’origine et une décroissance exponentielle en l’infini. Ces résultats numériques reflètent-ils notre incapacité à accéder à un régime d’énergie suffisamment élevé, où les distributions observées tendraient vers l’une des deux distributions intégrable ou chaotique? Ou bien est-il possible de mettre en évidence analytiquement l’existence d’un tel système, dont les caractéristiques seraient mixtes?

L’objet du présent chapitre est de montrer qu’il existe un système, le billard de Šeba, dont la distribution des plus proches voisins réunit les deux caractéristiques. En outre, le billard de Šeba est un modèle de système diffractif pour lequel le coefficient de diffraction ne diverge pas. Dans le cadre de l’approximation semi-classique, nous développons une méthode permettant de prendre en compte à la fois les termes diagonaux et non-diagonaux correspondant à l’interaction des orbites périodiques et diffractives, et nous calculons le facteur de forme à tout ordre en τ .

7.1 Le modèle du billard de Šeba

L’un des exemples les plus classiques de système classiquement chaotique est celui du billard de Sinai [6], qui est un billard rectangulaire contenant un obstacle circulaire de rayon R (Figure 1.3.a). Il a été montré numériquement [33] que ce billard a une distribution de niveaux d’énergie coïncidant avec celle des ensembles GOE.

Cela a amené Šeba [92] à considérer la limite $R \rightarrow 0$ du billard de Sinai: on obtient un billard avec un centre diffracteur ponctuel, dont la particularité est que les trajectoires classiques ne sont pas modifiées par la présence de l’impureté (les trajectoires diffractives sont de mesure nulle). Ce système a été étudié dans [92] en utilisant le formalisme des extensions auto-adjointes [77], qui consiste à construire une famille à un paramètre de Hamiltoniens pour lesquels le problème

est résoluble (voir [77, 92] pour plus de détails). On peut ainsi montrer que les valeurs propres du système perturbé sont les zéros d'une fonction méromorphe dont les pôles sont des variables aléatoires suivant une distribution de Poisson. Šeba a en outre montré numériquement [92] que ce système présentait une répulsion de niveaux, ce qui signifie que, bien que le comportement classique ne soit pas affecté par la présence du centre diffracteur, le comportement quantique l'est. Ce système a été généralisé par la suite [93] à tous les systèmes intégrables perturbés par un centre diffracteur ponctuel.

Le modèle choisi pour traiter le problème dans notre étude est celui consistant à décrire le centre diffracteur par une fonction de Dirac avec une certaine amplitude λ . On rajoute donc au Hamiltonien libre H_0 un potentiel $V(r) = \lambda\delta(r - r_0)$, r_0 étant la position de l'impureté dans le rectangle. Le problème quantique revient donc à résoudre l'équation

$$(\Delta + E - \lambda\delta(r - r_0)) \Psi(r) = 0 \quad (7.1)$$

dans le rectangle. Si l'on décompose une solution quelconque Ψ de (7.1) sur la base $\{\varphi_n\}$ des fonctions propres de H_0 d'énergies propres $\{e_n\}$, on a, en posant $c_n = \langle \varphi_n | \Psi \rangle$,

$$\begin{aligned} 0 &= (\Delta + E - \lambda\delta(r - r_0)) \sum_n c_n \varphi_n(r) \\ &= \sum_n (E - e_n) c_n \varphi_n(r) - \lambda\delta(r - r_0) \sum_n c_n \varphi_n(r) \end{aligned} \quad (7.2)$$

et en faisant agir $\int dr \bar{\varphi}_m(r)$ sur chacun des membres, on obtient pour les c_n le système d'équations

$$\sum_n [(E - e_n)\delta_{mn} - \lambda\bar{\varphi}_m(r_0)\varphi_n(r_0)] c_n = 0. \quad (7.3)$$

La condition pour qu'il existe une solution non-nulle à ce système d'équations est que le déterminant de la matrice qui le caractérise soit nul, c'est-à-dire

$$\det \left[\delta_{mn} - \lambda \frac{\bar{\varphi}_m(r_0)\varphi_n(r_0)}{E - e_n} \right] = 0. \quad (7.4)$$

En utilisant la relation

$$\det(a_{ij} + xb_i b_j) = (\det a)(1 + x \operatorname{tr}(ba^{-1}b)), \quad (7.5)$$

on en déduit que les niveaux d'énergie du billard de Šeba sont solutions de l'équation

$$\lambda \sum_n \frac{|\varphi_n(r_0)|^2}{E - e_n} = 1. \quad (7.6)$$

7.2 Interprétation par les fonctions de Green

Il est instructif de retrouver le même résultat en calculant la fonction de Green du billard de Šeba. Notons $G_0(r', r)$ la fonction de Green du billard en l'absence de centre diffracteur. Elle est parfaitement connue: si a et b sont les côtés du rectangle,

$$G_0(r', r) = \frac{1}{4i} \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} H_0^{(1)} \left(k \sqrt{(x - x' - ma)^2 + (y - y' - nb)^2} \right) \quad (7.7)$$

(voir [69]), avec $r = (x, y)$ et $r' = (x', y')$. La fonction de Green du billard de Šeba est solution de l'équation

$$(E + \Delta - \lambda \delta(r - r_0)) G(r', r) = \delta(r - r'). \quad (7.8)$$

Cherchons la solution sous la forme $G(r', r) = G_0(r', r) + \mathcal{A} G_0(r_0, r) G_0(r', r_0)$. L'équation (7.8) donne une condition sur $\mathcal{A}$, qui est

$$\mathcal{A} = \frac{\lambda}{1 - \lambda G_0(r_0, r_0)}; \quad (7.9)$$

on obtient ainsi la solution

$$\begin{aligned} G(r', r) &= G_0(r', r) + G_0(r_0, r) \frac{\lambda}{1 - \lambda G_0(r_0, r_0)} G_0(r', r_0) \\ &= G_0(r', r) + G_0(r_0, r) \lambda G_0(r', r_0) \\ &+ G_0(r_0, r) \lambda G_0(r_0, r_0) \lambda G_0(r', r_0) + \dots \end{aligned} \quad (7.10)$$

Cette solution correspond donc à la sommation du développement en série de l'équation fonctionnelle habituelle $G = G_0 + G_0 V G$ de la fonction de Green en présence d'une perturbation (voir l'équation (5.4)). Chacun des termes de ce développement peut également être interprété de la façon suivante, en termes d'intégrale de chemins: $G_0(r', r)$ correspond à toutes les propagations possibles de r à r' ; $G_0(r_0, r) \lambda G_0(r', r_0)$ correspond à toutes les propagations possibles de r à r_0 puis de r_0 à r' , c'est-à-dire toutes les propagations possibles de r à r' diffractant une fois sur la singularité; et ainsi de suite.

La densité des niveaux d'énergie du billard perturbé peut alors s'exprimer à partir de la fonction de Green grâce à l'équation (4.29). On a, avec l'expression (4.26), la relation

$$\int dr G_0(r_0, r) G_0(r, r_0) = -\frac{\partial}{\partial E} G_0(r_0, r_0) \quad (7.11)$$

qui, appliquée à l'expression (7.10) donne

$$\int dr G(r, r) = \int dr G_0(r, r) + \frac{\partial}{\partial E} \ln(1 - \lambda G_0(r_0, r_0)) \quad (7.12)$$

et la densité de niveaux perturbés $\{E_n\}$ s'exprime donc en fonction de la densité de niveaux non perturbés $\{e_n\}$.

Les niveaux d'énergie du système perturbé sont, d'après (4.26), les pôles de la fonction de Green, et l'on a

$$\int dr G(r, r) = \sum_n \frac{1}{E - E_n + i\epsilon}, \quad \int dr G_0(r, r) = \sum_n \frac{1}{E - e_n + i\epsilon}. \quad (7.13)$$

Par ailleurs la quantité $1 - \lambda G_0(r_0, r_0)$ a pour pôles les pôles de G_0 : si on note $\{e_m^{(0)}\}$ ses zéros, on a

$$1 - \lambda G_0(r_0, r_0) \simeq \frac{\prod_m (E - e_m^{(0)})}{\prod_n (E - e_n)} \quad (7.14)$$

et ainsi

$$\int dr G(r, r) = \sum_n \frac{1}{E - e_n + i\epsilon} + \left(\sum_m \frac{1}{E - e_m^{(0)} + i\epsilon} - \sum_n \frac{1}{E - e_n + i\epsilon} \right); \quad (7.15)$$

après simplification, on voit que les pôles de G sont les $e_m^{(0)}$, c'est-à-dire les zéros de $1 - \lambda G_0(r_0, r_0)$. On retrouve ainsi le fait que les niveaux d'énergie du billard perturbé sont les solutions de (7.6).

Cette méthode se généralise au cas de plusieurs centres diffracteurs r_i : le Hamiltonien libre H_0 est modifié par un potentiel $V(r) = \sum_i \lambda_i \delta(r - r_i)$. En notant $G_{ij} = G(x_j, x_i)$ et $\Lambda_{ij} = \lambda_i \delta_{ij}$, on montre de la même façon que les pôles de $G(r', r)$ sont les solutions de $\det(I - \Lambda G) = 0$.

7.3 Problèmes de renormalisation

La modélisation de la singularité par une distribution de Dirac nécessite une renormalisation de la constante de couplage en dimension supérieure ou égale à 2 [77]. Physiquement, cette renormalisation correspond au fait que la perturbation dépend de la nature et des propriétés de l'impureté, et que ce qui est physiquement mesurable ne dépend que d'une constante λ' . La conséquence de la modélisation de l'impureté par une perturbation ponctuelle est la suivante: la fonction de Green libre G_0 donnée par (7.7) diverge logarithmiquement pour $r' \rightarrow r$ à cause du terme $m = n = 0$: si $\mu = r' - r \rightarrow 0$, le développement en 0 de la fonction de Hankel $H_0^{(1)}$ donne

$$H_0^{(1)}(k|\mu|) \simeq \frac{1}{2\pi} \ln |k\mu| + \gamma + \frac{i}{4} \quad (7.16)$$

(γ étant la constante d'Euler), et donc $1 - \lambda G_0(r_0, r_0)$ contient une partie divergente. Cette partie divergente doit être absorbée dans la constante de couplage renormalisée. Par ailleurs dans (7.6), il y a une régularisation de la somme, qui formellement diverge: elle est donc tronquée à N termes. Dans la limite $N \rightarrow \infty$, les grandeurs statistiques ne dépendent de N et de λ que dans une combinaison qui apparaît naturellement, et que l'on pose comme étant la constante de couplage renormalisée λ' (voir [1] et l'article 2).

7.4 Autres systèmes se modélisant de la même façon

Les systèmes dont les niveaux d'énergie sont donnés par une équation du type (7.6) sont multiples. Considérons par exemple un système de Hamiltonien H_0 dont les valeurs propres et les vecteurs propres sont donnés par e_i et φ_i , $1 \leq i \leq N$. On lui adjoint une perturbation de la forme $V \simeq \lambda |v\rangle\langle v|$, où $|v\rangle = (v_1, \dots, v_N)$. C'est une perturbation de rang 1. Les solutions de $(H_0 + \lambda |v\rangle\langle v|)\psi = E\psi$, cherchées sous la forme $\psi = \sum_n c_n \varphi_n$, vérifieront

$$(e_i \delta_{ij} + \lambda v_i v_j) c_j = E c_i, \quad (7.17)$$

soit encore

$$c_i = \lambda \frac{v_i}{E - e_i} \sum_j v_j c_j. \quad (7.18)$$

Les valeurs propres de H sont donc données (en multipliant la dernière équation par v_i et en sommant sur i) par la condition

$$\lambda \sum_{i=1}^N \frac{|v_i|^2}{E - e_i} = 1 \quad (7.19)$$

et l'on retrouve le problème (7.6). En fait, l'interaction δ dans (7.1) est elle-même une perturbation de rang 1 puisque les fonctions propres φ_n du système non-perturbé vérifient la condition de normalisation $\sum_n \bar{\varphi}_n(r_0) \varphi_n(r) = \delta(r - r_0)$.

Le modèle de Bohr-Mottelson [94] est défini par le Hamiltonien $H = H_0 + V$, avec $V_{0i} = V_{i0}$ et $V_{00} = V_{ij} = 0$ ($i, j \geq 1$), décrivant le couplage d'un niveau avec tous les autres. On peut montrer, comme précédemment, que les niveaux d'énergie vérifient l'équation

$$\sum_j \frac{|V_{0j}|^2}{E - e_j} = E - e_0, \quad (7.20)$$

ce qui est encore une équation du type (7.6) avec cette fois un terme polynômial.

7.5 Résultats numériques antérieurs

Šeba a montré que dans le cas d'un rectangle perturbé par un centre diffractif, bien que la dynamique classique ne soit pas affectée, on pouvait observer numériquement une répulsion de niveaux [92], toutefois le comportement asymptotique de $P(s)$ en l'infini ne suit pas les prédictions de l'ensemble gaussien orthogonal [95]. Il s'avère finalement que le rectangle perturbé par un centre diffractif suit, à la limite de fort couplage, une statistique intermédiaire, avec à la fois répulsion de niveaux et décroissance exponentielle [96].

Dans le cas de systèmes classiquement chaotiques perturbés par un centre diffracteur, la dynamique classique n'est pas non plus affectée puisque le mouvement reste chaotique. Mais il a été montré dans [80] que la statistique des niveaux d'énergie pour ces systèmes n'est pas modifiée: si les niveaux d'énergie du système non perturbé suivent une statistique de type RMT, les niveaux d'énergie solutions de (7.6) ont la même distribution. En outre, le calcul semi-classique du facteur de forme aux temps courts donne un résultat qui coïncide avec celui de la RMT.

7.6 Résultats analytiques

Les premiers calculs analytiques sont dus à Bogomolny, Gerland et Schmit [1]. Il s'agit de calculer analytiquement les fonctions de corrélation des niveaux d'énergie perturbés E_n solutions de

$$\phi(E) = \sum_n \frac{r_n}{E - e_n} - 1 = 0, \quad r_n > 0 \text{ fixés}, \quad (7.21)$$

en supposant que les niveaux d'énergie non perturbés e_n sont des variables aléatoires indépendantes uniformément distribuées entre $-W$ et W . Les fonctions de corrélation des niveaux d'énergie E_n sont obtenues analytiquement.

7.6.1 Fonction de corrélation à deux points

Pour obtenir la fonction de corrélation à deux points, on applique la relation

$$\delta(f(x)) = \sum_i \frac{\delta(x - x_i)}{|f'(x_i)|}, \quad (7.22)$$

les x_i étant les zéros de la fonction f , à la fonction donnée par (7.21). La densité de niveaux (2.4) peut alors être écrite

$$\begin{aligned} d(E) &= \sum_n \delta(E - E_n) \\ &= \delta \left(\sum_{j=1}^N \frac{r_j}{E - e_j} - 1 \right) \sum_{j=1}^N \frac{r_j}{(E - e_j)^2} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\alpha}{2\pi} e^{i\alpha \left(\sum_{j=1}^N \frac{r_j}{E - e_j} - 1 \right)} \sum_{j=1}^N \frac{r_j}{(E - e_j)^2} \end{aligned}$$

A partir de la densité, on obtient en particulier l'expression analytique de $R_2(s)$ [1], et on en déduit son comportement asymptotique, qui est donné (dans le cas le plus simple $r_j = 1$) par

$$R_2(s) \sim_{s \rightarrow 0} \frac{\pi\sqrt{3}}{2} s \quad (7.23)$$

et

$$R_2(s) \sim_{s \rightarrow \infty} 1 + \frac{2}{(\pi^2 + 1/\lambda'^2)s^2}. \quad (7.24)$$

λ' est ici la constante de couplage renormalisée

$$\frac{1}{\lambda'} = \frac{2W}{N\lambda} + \ln \frac{W - E}{W + E}, \quad (7.25)$$

qui absorbe la troncature de la somme (7.6) aux N premiers niveaux, et le fait que l'on s'intéresse à la densité d'états locale autour de l'énergie E .

L'équation (7.23) montre qu'il y a répulsion linéaire de niveaux; l'équation (7.24) montre qu'il n'y a pas le phénomène d'oscillations propre aux ensembles de matrices aléatoires pour s grand (comparer aux équations (2.37)).

7.6.2 Distribution des plus proches voisins

L'allure de la fonction $\phi(E)$ est donnée à la figure 7.1. La figure montre clairement que la probabilité d'avoir un niveau perturbé à la position E_1 , un autre à la position E_2 , et aucun niveau perturbé entre E_1 et E_2 , est la probabilité d'avoir un niveau en E_1 , un autre en E_2 , et un et un seul niveau non perturbé e_j entre E_1 et E_2 . Elle vaut donc

$$P(E_1, E_2) = \sum_{i=1}^N \int \prod_{j=1}^n \frac{de_j}{2W} d(E_1) d(E_2) \chi(e_i) \prod_{j \neq i} (1 - \chi(e_j)), \quad (7.26)$$

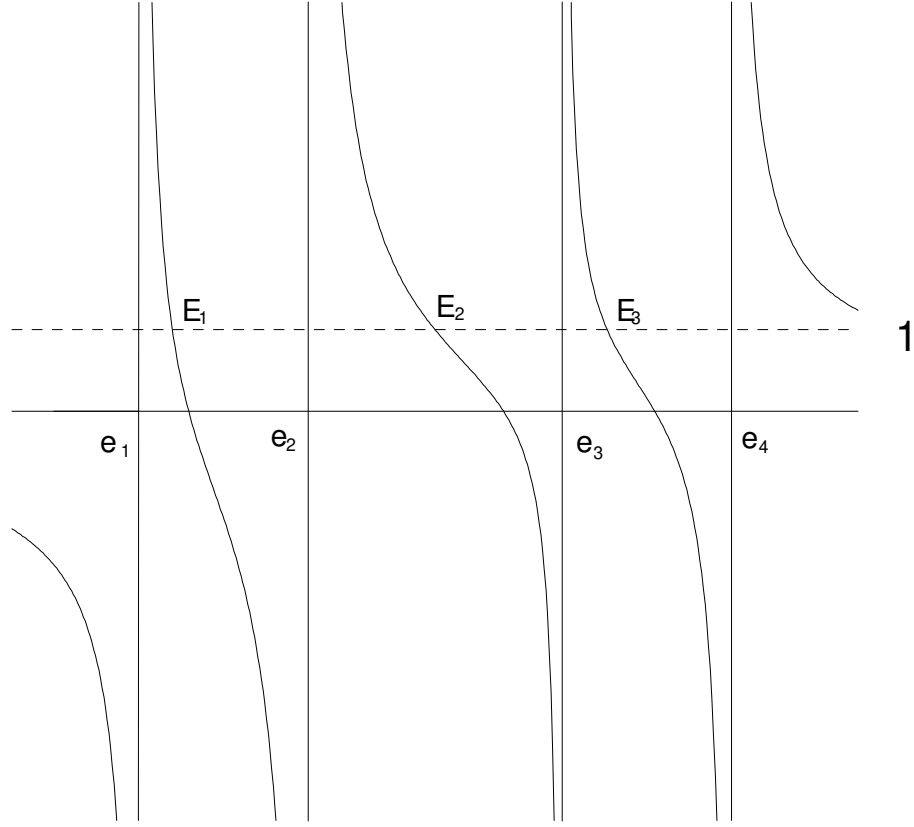
où $\chi(e)$ est la fonction indicatrice de l'intervalle $]E_1, E_2[$.

L'expression analytique exacte de $P(s)$ s'en déduit. Elle est donnée dans l'article 2. Pour les grandes valeurs de s , on obtient le comportement asymptotique

$$P(s) \simeq \frac{(< e^{rv_{sp}} >)^2}{\sqrt{2\pi} < r e^{rv_{sp}} > v_{sp}} \frac{e^{-s < e^{rv_{sp}} >}}{\sqrt{s}} [1 - f(\log s - g(v_{sp}))], \quad (7.27)$$

avec

$$\begin{aligned} f(y) &= \int_0^\infty e^{-\pi\alpha/2} \sin[\alpha(\log \alpha - y)] d\alpha \\ g(v) &= \log v - v + 2\gamma - 1 \end{aligned} \quad (7.28)$$

FIG. 7.1 – Allure de la fonction $\phi(E)$

et v_{sp} défini par

$$- \langle r \text{Ei}(rv_{sp}) \rangle = \frac{1}{|\lambda'|}, \quad \text{Ei}(v) = -\text{vp} \int_{-v}^{\infty} \frac{dt}{t} e^{-t}.$$

La fonction $f(y)$ se comporte en $1/y$: en l'infini, $P(s)$ a donc la forme

$$P(s) \sim \frac{(\langle e^{rv_{sp}} \rangle)^2}{\sqrt{2\pi \langle r e^{rv_{sp}} \rangle v_{sp}}} \frac{e^{-s \langle e^{rv_{sp}} \rangle}}{\sqrt{s}}. \quad (7.29)$$

Cela prouve que la distribution des plus proches voisins suit une statistique intermédiaire de type (2.42).

L'article 2 donne également l'expression, puis le comportement asymptotique, de la distribution des $n^{\text{ièmes}}$ plus proches voisins: la probabilité que deux niveaux d'énergie perturbés soient séparés par n autres niveaux est

$$P_n(s) \sim \frac{s^{n-1}}{(n-1)!} e^{-s}, \quad (7.30)$$

ce qui correspond à la valeur de $P_{n-1}(s)$ pour une séquence poissonnienne. Un argument heuristique explicatif est donné dans l'article 2.

7.7 Facteur de forme

On sait que le facteur de forme est une des signatures de la statistique spectrale, en ceci que notamment $K(0) = 1$ pour les systèmes intégrables, 0 pour les systèmes chaotiques, et $\frac{1}{2}$

pour les systèmes suivant une statistique semi-poissonienne. Il est donc intéressant de calculer le facteur de forme du billard de Šeba. Le calcul a été fait dans l'approximation semi-classique, en utilisant la formule de trace incluant les contributions des orbites périodiques (4.40) et des orbites diffractives (5.13). On a supposé dans un premier temps le coefficient de diffraction $\mathcal{D}$ constant, puis dépendant des angles d'incidence et de départ de la singularité.

Puisque l'on tient compte à la fois des contributions non-diffractives et diffractives, la méthode exposée à la section 6.2.3 permet d'obtenir le développement à tout ordre en τ du facteur de forme, incluant les contributions diagonales et hors-diagonales. Dans le cas d'un coefficient de diffraction constant, on peut obtenir ce développement à tout ordre en τ par un développement en série des résultats exacts obtenus dans [1]. Dans le cas le plus général où le coefficient de diffraction varie, le calcul exact devient inaccessible, mais la méthode précédente peut être appliquée. Le résultat final est

$$K(\tau) = \langle\langle \left| \exp \left(-i \frac{S(\varphi, \varphi)}{8} \tau \right) \right|^2 \rangle\rangle + \sum_{p=2}^{\infty} \frac{1}{p!} \sum_{m, n \geq p} A_{mnp} \tau^{m+n-p+1}, \quad (7.31)$$

avec

$$\begin{aligned} A_{mnp} &= \frac{(-i/8)^m (i/8)^n}{mn(m+n-p-1)!} \sum_{\substack{\sum m_i = m \\ m_i \geq 1}} \sum_{\substack{\sum n_j = n \\ n_j \geq 1}} \prod_{i=1}^p \left[\frac{(m_i + n_i - 2)!}{(m_i - 1)! (n_i - 1)!} \right] \\ &\times \langle\langle R((m_1, \varphi_1), \dots, (m_p, \varphi_p)) \bar{R}((n_1, \varphi_1), \dots, (n_p, \varphi_p)) \rangle\rangle. \end{aligned} \quad (7.32)$$

Le symbole $\langle\langle \dots \rangle\rangle$ signifie qu'il faut effectuer la moyenne à la fois sur les angles ϕ_i et sur les angles φ_j . De plus,

$$R((m_1, \varphi_1), \dots, (m_p, \varphi_p)) = \sum_{perm} S(\varphi_{i_1}, \varphi_{i_2}) \dots S(\varphi_{i_m}, \varphi_{i_1}), \quad (7.33)$$

S étant une matrice 4×4 décrivant toutes les possibilités possibles de diffraction sur l'impureté.

Ce calcul concerne un système dont le coefficient de diffraction ne diverge pas le long d'une frontière optique (voir section 5.3). D'autres méthodes sont à mettre en oeuvre dans le cas où le coefficient de diffraction diverge.

7.8 Conclusion

Le billard de Šeba présente donc à la fois des caractéristiques des systèmes intégrables et des caractéristiques des systèmes chaotiques: répulsion de niveaux à l'origine et décroissance exponentielle en l'infini de la distribution des plus proches voisins. Ces deux traits des statistiques intermédiaires sont mis en évidence pour la première fois dans un même système, prouvant ainsi l'existence de systèmes ayant une statistique intermédiaire.

En outre, le facteur de forme pour les systèmes intégrables est, pour τ petit, $K(\tau) = 1$. Il vaut $K(\tau) \simeq 2\tau$ ou $K(\tau) \simeq \tau$ pour les ensembles GOE ou GUE des matrices aléatoires. En obtenant le développement semi-classique à tout ordre du facteur de forme pour le billard de Šeba, on peut voir en particulier que ses premiers termes sont donnés (par exemple dans le cas d'un coefficient de diffraction constant, avec un couplage tendant vers l'infini) par $K(\tau) \simeq 1 - 4\tau$, ce qui révèle une fois de plus un comportement intermédiaire.

Chapitre 8

Quelques systèmes pseudo-intégrables

Le chapitre précédent nous a enseigné qu’il existait des systèmes dont la distribution des plus proches voisins présente un comportement intermédiaire. Pourtant on a encore une valeur à l’origine du facteur de forme qui est donnée par $K(0) = 1$, comme pour les systèmes intégrables. Nous désirons donc rechercher des systèmes tels que l’on ait $K(0) < 1$ strictement, ce qui semble être une autre caractéristique des statistiques intermédiaires. Nous envisagerons tout d’abord le cas de systèmes traversés par une ligne de flux Aharnov-Bohm (section 8.1) puis celui de systèmes pseudo-intégrables.

L’étude des billards pseudo-intégrables a été développée en tant qu’approche élémentaire des systèmes présentant une statistique intermédiaire. Ces systèmes, par leur proximité avec les systèmes intégrables, présentent en effet une certaine simplicité de description, tout en fournissant des comportements très variés. Rappelons que les systèmes pseudo-intégrables sont les systèmes pour lesquels le mouvement classique dans l’espace des phases a lieu sur une surface de genre $g \geq 2$ (à cause de la séparation des faisceaux d’orbites classiques au niveau des singularités (voir par exemple la figure 1.4)). Notons que les systèmes intégrables correspondent au mouvement sur un tore, c’est-à-dire une surface de genre 1. L’étude portera principalement ici sur les billards polygonaux (section 8.2), et particulièrement les billards triangulaires (section 8.3). Parmi ceux-ci, les billards de Veech, qui sont les seuls pour lesquels on dispose de résultats analytiques, feront l’objet d’une attention particulière (section 8.4): on calculera analytiquement leur facteur de forme. Ce même calcul a été possible pour une autre classe de systèmes pseudo-intégrables: les billards avec barrière (section 8.5).

8.1 Lignes de flux Aharonov-Bohm

8.1.1 Le modèle

L’observation de l’effet, purement quantique, de l’influence du potentiel associé à un champ électromagnétique sur une particule chargée, remonte à Aharonov et Bohm [97]: en présence d’un tube de flux de diamètre nul, une particule chargée n’est soumise à aucun champ de force. Elle est en revanche sensible à la présence du potentiel électromagnétique associé au champ. L’interprétation en termes d’intégrale de Feynman est que, le groupe d’homotopie du système étant non-trivial, les “chemins” pour aller d’un point à un autre sont sensibles au nombre de tours qu’ils effectuent autour de la singularité [98]. La généralisation à plusieurs lignes de flux,

en augmentant la complexité du “groupe fondamental” (le groupe des classes d’homotopie) du système, rend le problème plus complexe.

Dans le cas d’une ligne de flux traversant un plan bidimensionnel en un point r_0 , le champ magnétique est donné par

$$\vec{B} = \delta(r - r_0)\phi\hat{z}, \quad (8.1)$$

ϕ étant le flux, supposé constant, du champ, et $\hat{z}$ le vecteur unitaire normal au plan. Le seul paramètre qui intervient, dans la résolution du problème, est la combinaison

$$\alpha = \frac{-e\phi}{2\pi\hbar c}. \quad (8.2)$$

Un choix du potentiel vecteur associé à ce champ magnétique est alors

$$\begin{cases} A_r &= 0 \\ A_\varphi &= \frac{\phi}{2\pi r} \end{cases}, \quad (8.3)$$

ce que l’on écrit, en posant $\hbar = c = -e = 1$, $A_\varphi = \alpha/r$. L’équation de Schrödinger stationnaire devient donc

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial}{\partial \varphi} + i\alpha \right)^2 + E \right] \Psi(r, \varphi) = 0. \quad (8.4)$$

Lorsque l’on impose une condition d’impénétrabilité ($\Psi(0) = 0$), la solution générale de cette équation est une combinaison linéaire de fonctions de Bessel $\sqrt{k/2\pi} J_{|m+\alpha|}(kr) e^{im\varphi}$ pour $m \in \mathbb{Z}$. Aharonov et Bohm ont montré [97] que la section différentielle de diffusion d’un électron sur une ligne de flux de diamètre tendant vers 0 était

$$\frac{d\sigma}{d\theta} = \frac{\sin^2 \pi \alpha}{2\pi} \frac{1}{\cos^2 \theta/2}, \quad (8.5)$$

α étant la force du flux de champ magnétique et θ la direction de diffusion ($\theta \neq \pi$). On peut obtenir plus généralement l’amplitude de diffusion en cherchant une combinaison linéaire des fonctions propres qui, asymptotiquement, peut s’écrire comme la superposition d’une onde plane $e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}}$ et d’une onde sphérique émergente $\mathcal{D}(\theta, \theta') e^{ikr} / \sqrt{r}$ [99].

8.1.2 Résultats connus

Les résultats connus sont essentiellement numériques ou qualitatifs. Ils concernent la modification, par la présence d’une ligne de flux Aharonov-Bohm, de la statistique des niveaux d’énergie d’un système chaotique ou d’un système intégrable.

Systèmes intégrables.

L’étude numérique du spectre d’un rectangle perturbé par une ligne de flux Aharonov-Bohm a montré qu’il pouvait y avoir une transition entre une distribution de Poisson et une distribution intermédiaire lorsque le paramètre α varie. Si $\bar{\alpha}$ est la distance (positive) de α à l’entier le plus proche, $\bar{\alpha} = 0$ correspond à une densité d’états poissonienne. Les valeurs $0 < \bar{\alpha} \leq 1/2$ conduisent à des statistiques intermédiaires [100].

Reimann *et al.* ont étudié un billard circulaire avec une ligne de flux Aharonov-Bohm en son centre [101], et montré que l’effet Aharonov-Bohm, en modifiant la phase de la contribution de chaque orbite périodique à la formule de trace, affecte la densité d’états.

Systèmes chaotiques.

Les billards Aharonov-Bohm dans le cas où le système non-perturbé est classiquement chaotique, et en particulier le rôle des symétries dans la statistique spectrale, ont été étudiés par Berry et Robnik [102, 35]: les résultats numériques montrent une transition de GOE à GUE en présence d'une ligne de flux.

8.1.3 Résultats analytiques semi-classiques

La présence d'une ligne de flux de diamètre nul à l'intérieur d'un billard ne modifie pas les trajectoires périodiques classiques (à part un ensemble de mesure nulle, celui des trajectoires diffractives, qui, on va le voir, jouent un rôle important dans la statistique quantique). Toutefois elle modifie l'action calculée le long de ces trajectoires. En présence du potentiel vecteur (8.3), p_φ est remplacé par $p_\varphi - \alpha/r$, et donc l'action devient

$$S_p = \oint (p - eA)_\mu dq^\mu = kl_p - \alpha \oint d\varphi. \quad (8.6)$$

Dans la formule de trace, la phase associée à l'orbite p est donc augmentée de $-\alpha\Delta\Phi$, où $\Delta\Phi$ représente l'angle total (en coordonnées polaires) parcouru par la trajectoire. Ainsi, une trajectoire périodique effectuant n tours dans le sens horaire autour de la ligne de flux acquerra une phase $e^{2i\pi n\alpha}$. C'est cette modification de la phase dans la formule de trace qui est responsable de la modification du facteur de forme pour les petites valeurs de τ .

Le coefficient de diffraction (5.8) obtenu diverge, de même que la section efficace de diffusion (8.5), pour une diffraction vers l'avant: le calcul à tout ordre du facteur de forme nécessiterait une régularisation de cette divergence afin d'inclure la contribution des orbites diffractives. Dans l'approche de l'article 1, on s'en tient à l'approximation diagonale de la section 6.2.1, en utilisant la formule de trace (4.40). On obtient ainsi le facteur de forme à l'origine. Il a ainsi pu être montré que:

- Le facteur de forme en $\tau = 0$ pour un billard rectangulaire avec une ligne de flux en un point quelconque à l'intérieur est

$$K(0) = 1 - 3\bar{\alpha} + 4\bar{\alpha}^2 \quad (8.7)$$

pour une ligne de flux située à des coordonnées irrationnelles par rapport aux dimensions du rectangle (voir article 1). Rappelons que $\bar{\alpha}$ est la distance (positive) de α à l'entier le plus proche. Dans le cas où l'une ou l'autre des coordonnées est rationnelle, le calcul peut être fait également; les coefficients devant $\bar{\alpha}$ et $\bar{\alpha}^2$ dépendent alors des coordonnées de la singularité.

- Le facteur de forme en $\tau = 0$ pour un billard circulaire de rayon R avec une ligne de flux située en un point quelconque à une distance $d = \chi R$ du centre ($0 < \chi < 1$) est (voir l'annexe C)

$$K(0) = 1 - \frac{4\lambda}{\pi}\bar{\alpha} + \frac{4\lambda}{\pi}\bar{\alpha}^2, \quad (8.8)$$

avec $\lambda = \arcsin \chi + \chi\sqrt{1 - \chi^2}$.

Pour $\bar{\alpha} = 0$ (absence de ligne de flux), on retrouve le résultat poissonien $K(0) = 1$. Notons que pour le billard circulaire (voir annexe C), on a $K(0) = 2$ à cause de la dégénérescence d'ordre 2

des niveaux d'énergie: il y a donc discontinuité du facteur de forme à l'origine lorsque l'on fait tendre le paramètre $\bar{\alpha}$ vers 0. On retrouve cette discontinuité pour le billard carré, pour lequel une dégénérescence des niveaux apparaît lorsque le champ magnétique s'annule. Pour $\bar{\alpha} \neq 0$, les valeurs du facteur de forme à l'origine sont comprises entre $1/2$ et 1 lorsque d ou $\bar{\alpha}$ varient pour le billard circulaire, et entre $3/8$ et 1 pour le billard rectangulaire.

8.2 Billards polygonaux

Les billards polygonaux bidimensionnels sont des billards plans dont le bord est formé d'un nombre fini de segments de droites. Ils forment une large classe de systèmes présentant une grande variété de comportements classiques, d'intégrable à ergodique.

Dans les cas où les angles α_i du billards sont dans un rapport rationnel avec π , c'est-à-dire $\alpha_i = \pi m_i/n_i$, m_i, n_i premiers entre eux (on désignera ces billards sous le terme de "billards rationnels"), le mouvement est non-chaotique et se fait sur une surface de genre g donné par (1.22) pour les billards simplement connexes [8]. Cependant, un théorème de Kerckhoff, Masur et Smillie [103] montre que le mouvement est ergodique dans presque toutes les directions. Les billards polygonaux intégrables sont ceux pour lesquels $g = 1$. Ce sont les rectangles, et trois triangles: le triangle équilatéral, le triangle isocèle rectangle et le triangle $(\pi/2, \pi/3, \pi/6)$. Pour tous les autres, le mouvement a lieu sur des surfaces de genre $g \geq 2$.

Il existe un grand nombre de travaux portant sur les billards polygonaux. On sait ainsi [104] que leur entropie topologique (1.12) est nulle, c'est-à-dire que le nombre de faisceaux d'orbites périodiques de longueur inférieure à L , $N(L)$, croît plus lentement que $e^{\kappa L}$ pour tout $\kappa > 0$. Pour les billards rationnels, on sait plus précisément [105, 106] que $N(L)$ est bornée quadratiquement: $c_1 L^2 \leq N(L) < c_2 L^2$, c_1 et c_2 étant des constantes. Pour la classe plus restrictive des polygones de Veech (voir section 8.4), on a plus précisément $N(L) \sim cL^2$.

8.3 Billards triangulaires

Les billards triangulaires, à eux seuls, permettent d'observer tous les types de comportements:

- Le triangle isocèle rectangle est un exemple de triangle intégrable.
- Les triangles dont les angles sont dans un rapport rationnel avec π (sauf les trois types de triangles intégrables mentionnés plus haut) sont pseudo-intégrables, (c'est-à-dire en particulier non-chaotiques); le mouvement est confiné à une surface bidimensionnelle de genre supérieur ou égal à 2. Il a été démontré [107] que sur cette surface le mouvement est ergodique (pour presque toutes les directions), mais non-mélangeant (voir section 1.2.4). On peut observer toutefois un comportement "faiblement mélangeant" [108].
- Les triangles rectangles dont au moins un angle est dans un rapport irrationnel avec π révèlent (numériquement) un comportement ergodique (les trajectoires recouvrent la surface tridimensionnelle d'énergie constante dans l'espace des phases), et faiblement mélangeant (voir [109] pour les calculs numériques), alors que leur entropie de Kolmogorov-Sinai est nulle [2]. Numériquement, les triangles dont tous les angles sont dans un rapport irrationnel avec π semblent être mélangeants [110]. Toutefois les billards polygonaux ne sont jamais chaotiques (leur entropie de Kolmogorov-Sinai est nulle).

Numériquement, les billards triangulaires $(\pi/2, \pi/n, \pi/2 - \pi/n)$ ont été étudiés dans [45] et [59]. Il a par ailleurs été observé numériquement que les triangles $(\pi/2, \pi/n, \pi/2 - \pi/n)$ présentent les traits suivants, caractéristiques des systèmes intermédiaires:

- répulsion linéaire des niveaux ($R_2(\epsilon) \sim_{\epsilon \rightarrow 0} A\epsilon$)
- décroissance exponentielle en l’infini de la distribution des plus proches voisins ($P(s) \sim_{s \rightarrow \infty} e^{-\Lambda s}$)
- variance linéaire ($\Sigma^2(L) \sim_{L \rightarrow \infty} \chi L$).

L’étude analytique des billards triangulaires nécessite un formalisme que nous allons détailler dans la section suivante: celui des billards de Veech.

8.4 Billards de Veech

La difficulté technique majeure faisant obstacle à l’étude analytique des systèmes quantiques par la méthode semi-classique de la formule de trace est le fait que la description des orbites périodiques est en général difficile, voire impossible, dès que l’on s’intéresse à des systèmes moins simples que le billard rectangulaire ou circulaire. Veech a développé [111, 112] une théorie permettant de traiter le cas des “structures planaires” (appelées aussi surfaces de translation [113]). La définition mathématique précise est donnée dans [114], nous en retiendrons qu’il s’agit de variétés riemanniennes de courbure nulle (c’est-à-dire qu’il existe au voisinage de chaque point un homéomorphisme de ce voisinage dans $\mathbb{R}^2$ définissant un système de coordonnées locales), avec un nombre fini de points singuliers.

Une construction due à Zemlyakov et Katok [9] permet de mettre en évidence une structure planaire ω sur les billards polygonaux rationnels. On obtient cette structure planaire en “dépliant” le polygone, c’est-à-dire en collant au polygone initial ses images par réflexion par rapport à chacun de ses côtés, et en répétant l’opération sur les copies. Les angles étant rationnels, cette procédure est finie (si N est le plus petit commun multiple des n_i , $\alpha_i = \pi m_i/n_i$ étant les angles du polygone, alors la structure est formée de $2N$ copies du polygone) et on obtient, en identifiant les bords parallèles, une structure de genre en général supérieur à 1. Cette structure comporte des points singuliers, correspondant à ceux des vertex du polygone initial dont l’angle n’est pas de la forme π/n , $n \geq 2$. La mesure de l’angle sur la structure à chaque singularité est un multiple de 2π ; s’il est égal à $2\pi(k+1)$, alors la singularité apporte la contribution k à la quantité $2g-2$, où g est le genre de la surface. Cette surface est donc un tore si et seulement si le polygone initial pave le plan par réflexions.

A titre d’exemple, la structure planaire obtenue en dépliant le triangle d’angles $(\pi/3, \pi/5, 7\pi/15)$ est représentée à la figure 8.3.a; le triangle de base est en traits pointillés, et les bords ayant la même pente sont identifiés.

8.4.1 Définitions

Rappelons tout d’abord quelques notions mathématiques. On désignera, dans ce qui suit, par ω la structure planaire associée à un billard polygonal rationnel.

On appelle demi-plan de Poincaré $\mathbb{H}$ le demi-plan $\{z \in \mathbb{C}; \text{Im } z > 0\}$ muni de la métrique

$$ds^2 = \frac{1}{y^2}(dx^2 + dy^2). \quad (8.9)$$

Le groupe des matrices réelles 2×2 de déterminant 1, $SL(2, \mathbb{R})$, dont les éléments sont de la forme

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad (8.10)$$

agit sur $\mathbb{H}$ par l'application

$$\mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H} : \quad z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}. \quad (8.11)$$

Il agit sur la structure ω associée au billard rationnel par son action naturelle sur $\mathbb{R}^2$:

$$\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 : \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix} \quad (8.12)$$

L'action (8.11) étant inchangée par une inversion globale du signe des coefficients de g , on travaillera en fait avec $PSL(2, \mathbb{R}) = SL(2, \mathbb{R}) / \{-1, 1\}$. $PSL(2, \mathbb{R})$ peut donc être vu comme le groupe des isométries orientées du plan hyperbolique.

On appelle stabilisateur de ω le sous-groupe $\Gamma(\omega)$ de $SL(2, \mathbb{R})$ tel que $\forall g \in \Gamma(\omega)$, $g\omega$ est isomorphe à ω (les singularités sont envoyées sur les singularités). Lorsque le stabilisateur est un sous-groupe discret, on appelle domaine fondamental $\mathcal{D}$ de $\Gamma(\omega)$ le quotient $\mathbb{H}/\Gamma(\omega)$. C'est le plus petit ensemble de points (x, y) de $\mathbb{H}$ sur lequel l'action de $\Gamma(\omega)$ donne $\mathbb{H}$. Par exemple, le sous-groupe $SL(2, \mathbb{Z})$ des matrices de $SL(2, \mathbb{R})$ à coefficients entiers, appelé groupe modulaire, est un sous-groupe discret de $SL(2, \mathbb{R})$, engendré par les matrices S et T définies par

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (8.13)$$

L'action répétée (8.11) de S et T sur le domaine $\mathcal{D}$ grisé dans la Figure 8.1 couvre $\mathbb{H}$; $\mathcal{D}$ est

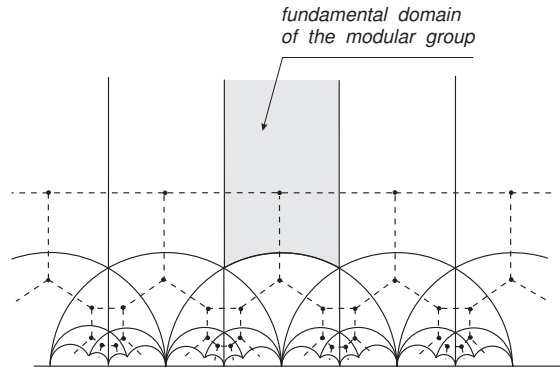


FIG. 8.1 – *Domaine fondamental du groupe modulaire*

donc le domaine fondamental du groupe modulaire.

On dit que le stabilisateur de ω est cofini si son domaine fondamental est de volume fini, c'est-à-dire si $\mu(\mathbb{H}/\Gamma(\omega)) < \infty$ (μ étant la mesure associée à la métrique (8.9)) (on dit aussi que $\Gamma(\omega)$ est de covolume fini dans $PSL(2, \mathbb{R})$). Un tel sous-groupe est appelé un réseau.

Afin de décrire les stabilisateurs des groupes de Veech que nous allons rencontrer, nous avons encore besoin de la notion suivante. Soit $G(p,q,r)$ le groupe d'isométries du plan hyperbolique engendré par les réflexions selon les côtés d'un triangle hyperbolique d'angles $(\pi/p, \pi/q, \pi/r)$, avec p, q, r entiers. Si l'on note σ_i , $i = 1, 2, 3$ ces réflexions, alors le sous-groupe formé des éléments de longueur paire en les σ_i est noté $\Delta(p,q,r)$ et appelé groupe (p,q,r) -triangulaire. (Par exemple, le groupe $PSL(2, \mathbb{Z})$ est le groupe $\Delta(2, 3, \infty)$.) Son domaine fondamental est formé de deux copies du triangle initial. Par exemple, le groupe $G(m, n, \infty)$ est engendré par les réflexions par rapport aux côtés du triangle hyperbolique $A_1 i \infty$ de la figure 8.2; le groupe fondamental de $\Delta(m, n, \infty)$ est formé de deux copies de ce triangle: c'est la zone hachurée de la figure 8.2.

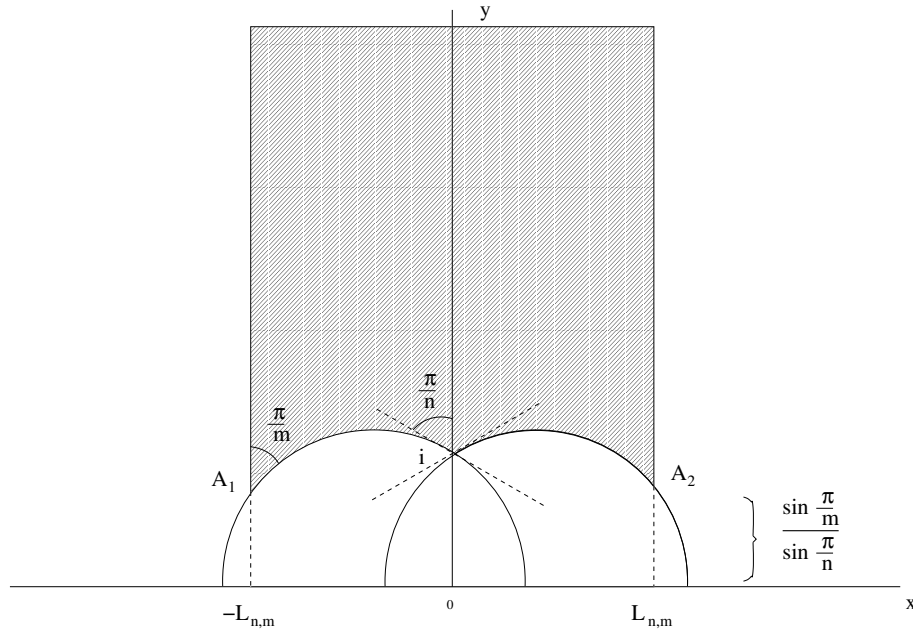


FIG. 8.2 – *Domaine fondamental du groupe $\Gamma_{n,m}$.*

8.4.2 Billards de Veech

On appelle billards de Veech une classe de billards polygonaux bidimensionnels à angles commensurables avec π tels que le stabilisateur $\Gamma(\omega)$ (appelé groupe de Veech) est un sous-groupe discret cofini de $SL(2, \mathbb{R})$ [114]. Pour ces billards, le domaine fondamental est un polygone dans $\mathbb{H}$, c'est-à-dire une zone de $\mathbb{H}$ délimitée par un nombre fini de géodésiques. Si on note A_i ses vertex, alors r_i (la rotation de $\Gamma(\omega)$ envoyant le vertex rejeté à l'infini sur A_i), et τ (la translation $z \mapsto z + \alpha$, où α est la largeur du domaine fondamental) engendrent $\Gamma(\omega)$.

Les propriétés des billards de Veech qui nous intéresseront sont les suivantes.

- L' "alternative de Veech": pour une direction donnée, une trajectoire dans le billard est soit une trajectoire singulière (elle rencontre un vertex) ou périodique, soit une trajectoire ergodique (c'est-à-dire uniformément distribuée).
- Si on note $\bar{v}$ un vecteur normé donnant la direction de départ d'une trajectoire, alors le faisceau dans la direction $\bar{v}$ est un faisceau d'orbites périodiques si et seulement s'il existe un lien entre deux vertex parallèle à $\bar{v}$, c'est-à-dire une trajectoire singulière dans la direction

$\bar{v}$.

Les trajectoires périodiques apparaissent donc sous forme de faisceaux d'orbites périodiques parallèles entre elles et bordées par des séparatrices (les lignes joignant les vertex). Puisque, par l'action de $\Gamma(\omega)$, les singularités sont envoyées sur les singularités, les séparatrices sont transformées les uns dans les autres sous l'action de $\Gamma(\omega)$, et générées par un nombre fini d'entre elles. Le nombre de ces orbites génératrices est donné par le nombre d'angles nuls ("cusps") distincts dans le triangle hyperbolique correspondant au stabilisateur $\Gamma(\omega)$: ainsi pour les groupes $\Gamma_{m,n}$ (voir Figure 8.2), il y a 2 directions de base si $m = \infty$, une seule sinon. Si on note $\bar{v}_i$ les directions dans lesquelles on trouve ces génératrices de base (d'angles nuls distincts dans le domaine fondamental du stabilisateur

, alors les directions dans lesquelles on trouve des faisceaux d'orbites périodiques sont donc les $g\bar{v}_i, g \in \Gamma(\omega)$. En outre, la surface occupée par les faisceaux d'orbites périodiques dans la direction $g\bar{v}_i$ est la même que celle occupée par les faisceaux dans la direction $\bar{v}_i$.

Le théorème de Veech apporte ainsi une connaissance sur les orbites périodiques d'un système à condition que l'on en connaisse le stabilisateur. Vorobets a montré [114] que si $N(R)$ est le nombre de faisceaux d'orbites périodiques primitives de longueur inférieure à R , $N^*(R)$ le nombre de faisceaux d'orbites périodiques de longueur inférieure à R , et $N_0(R)$ le nombre de séparatrices de longueur inférieure à R , alors le comportement asymptotique de ces quantités dans le cas de billards de Veech est de la forme $cR^2 + o(R^2)$, où c est une constante positive. Cette constante n'a pas d'expression générale [111], on peut l'obtenir dans certains cas particuliers (billards triangulaires, billards avec barrière).

8.4.3 Exemple du billard rectangulaire

Divers exemples de billards de Veech sont donnés dans [115]. Le billard de Veech le plus simple est le billard carré de côté 1, avec réflexion spéculaire sur les parois: les trajectoires dans ce billard sont des lignes droites dans le plan euclidien pavé de carrés; les singularités forment donc un maillage régulier. Le stabilisateur Γ est le sous-groupe des transformations de $SL(2, \mathbb{R})$ laissant invariant ce maillage: il est aisé de voir que c'est le groupe engendré par les translations T et les rotations S données par

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (8.14)$$

c'est-à-dire le groupe modulaire $SL(2, \mathbb{Z})$. Son domaine fondamental est non-compact et de volume fini. L'ensemble des orbites périodiques $(2M, 2N)$ du rectangle sont générées par l'action du groupe

$$\left\{ \begin{pmatrix} m & k \\ n & l \end{pmatrix}; m, n, k, l \in \mathbb{Z}; ml - nk = 1 \right\} \quad (8.15)$$

sur le vecteur de base $(1, 0)$.

8.4.4 Application aux billards triangulaires

Des exemples plus complexes de billards de Veech sont proposés dans [114]: ce sont certains billards triangulaires. Soit m et n deux entiers donnés ($m, n \geq 2$, $(m, n) \neq (2, 2)$ et $n \leq m$). On

considère le triangle $(\frac{\pi}{n}, \frac{\pi}{m}, \pi - \frac{\pi}{n} - \frac{\pi}{m})$, Appelons $k = \text{ppcm}(m, n)$ et $m' = k/m$, $n' = k/n$. Alors la structure planaire obtenue à partir du triangle par la procédure de Zemlyakov et Katok (rappelée en préambule de la section 8.4), que nous noterons $\omega_{n,m}$, peut être obtenue en collant ensemble n' exemplaires du polygone régulier à n côtés et m' exemplaires du polygone régulier à m côtés. Les côtés sont tous appariés deux à deux. La figure 8.3.a est une représentation de $\omega_{5,3}$, structure

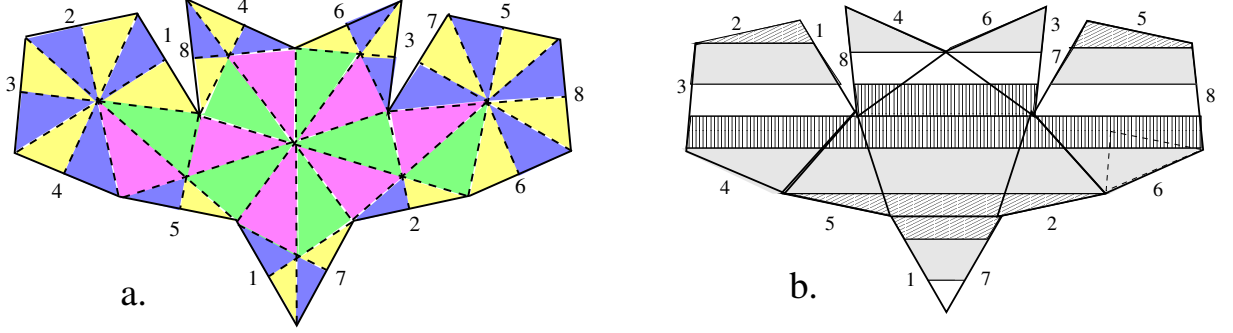


FIG. 8.3 – La structure $\omega_{5,3}$; les côtés de même inclinaison sont identifiés.

planaire associée au triangle $(\pi/3, \pi/5, 7\pi/15)$; on identifie les côtés de même inclinaison. On a représenté sur la figure 8.3.b les 4 faisceaux de base d'orbites périodiques horizontales.

Posons à présent

$$L_{n,m} = \frac{\cos \frac{\pi}{n} + \cos \frac{\pi}{m}}{\sin \frac{\pi}{n}}, \quad L_{n,\infty} = \frac{\cos \frac{\pi}{n} + 1}{\sin \frac{\pi}{n}} = \cot \frac{\pi}{2n}. \quad (8.16)$$

Pour certaines valeurs de m et n (voir la table 8.1, il est possible de montrer que la structure planaire $\omega_{n,m}$ admet un stabilisateur qui est le sous-groupe $\Gamma_{n,m}$ de $SL(2, \mathbb{R})$ engendré par les éléments

$$\sigma_n = \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{n} & -\sin \frac{\pi}{n} \\ \sin \frac{\pi}{n} & \cos \frac{\pi}{n} \end{pmatrix}, \quad \tau_{n,m} = \begin{pmatrix} 1 & 2L_{n,m} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (8.17)$$

$\Gamma_{n,m}$ est un groupe discret; le domaine fondamental est le domaine hachuré sur la figure 8.2, c'est-à-dire le quadrilatère (non-euclidien) $A_1 i A_2 \infty$, formé de deux triangles $i A_1 \infty$ et $i A_2 \infty$. Le groupe $\Gamma_{n,m}$ est donc le groupe triangulaire $\Delta(n, m, \infty)$, sous-groupe d'ordre 2 du groupe engendré par les réflexions par rapport aux côtés du triangle hyperbolique $i A_1 \infty$. Son domaine fondamental est non-compact, mais il est de volume fini, égal à deux fois le volume du triangle $i A_1 \infty$, qui est $\pi - \pi/2 - \pi/n - 0$. Le groupe $\Gamma_{n,m}$ est donc un réseau. Pour ces valeurs de m et n , la structure $\omega_{n,m}$ est donc la structure associée à un billard de Veech, et le groupe de Veech correspondant est le groupe $\Gamma_{n,m}$ [116].

Le théorème de Veech montre que l'on obtient toutes les orbites périodiques en faisant agir le stabilisateur sur les orbites de base. Il faut donc déterminer ce stabilisateur. On le connaît, pour les billards triangulaires, dans certains cas particuliers, qui sont résumés dans le tableau 8.1. La première partie de ce tableau donne les triangles de la forme $(\pi/n, \pi/m, \pi - \pi/n - \pi/m)$ pour lesquels on sait montrer que la structure $\omega_{n,m}$ équivalente a la propriété de Veech. Les deux dernières lignes du tableau montrent des triangles qui n'ont pas la structure $\omega_{m,n}$ mais qui ont néanmoins la propriété de Veech. On trouvera dans [116] une liste de triangles dont on sait qu'ils n'ont pas la propriété de Veech.

Triangle	Structure $\omega_{m,n}$ équivalente	Stabilisateur
$(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{n}, \frac{n-2}{2n}\pi), n$ impair	$\omega_{2,n}$	$\Gamma_{n,2}$
$(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{n}, \frac{n-2}{2n}\pi), n$ pair	$\omega_{2,n}$	$\Gamma_{n/2,\infty}$
$(\frac{\pi}{n}, \frac{\pi}{n}, \frac{n-2}{n}\pi), n$ impair	$\omega_{n,n}$	$\Gamma_{n,2}$
$(\frac{\pi}{n}, \frac{\pi}{n}, \frac{n-2}{n}\pi), n$ pair	$\omega_{n,n}$	$\Gamma_{n/2,\infty}$
$(\frac{\pi}{n}, \frac{\pi}{2n}, \frac{2n-3}{2n}\pi)$	$\omega_{n,2n}$	$\Gamma_{n,3}$
$(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{12})$	$\omega_{3,4}$	$\Gamma_{6,\infty}$
$(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{5}, \frac{7\pi}{15})$	$\omega_{3,5}$	$\Gamma_{15,\infty}$
$(\frac{2\pi}{9}, \frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{9})$	—	$\Gamma_{9,\infty}$
$(\frac{\pi}{n}, \frac{n-1}{2n}\pi, \frac{n-1}{2n}\pi)$	—	$\Gamma_{n,\infty}$

TAB. 8.1 – Les triangles ayant la propriété de Veech. $\Gamma_{n,m}$ est le groupe engendré par σ_n et τ_{nm} (Equation (8.17)).

Un théorème de Gutkin [113] permet alors d'exprimer le comportement asymptotique de $N(R)$ en fonction des caractéristiques du domaine fondamental du stabilisateur Γ . Dans le cas des billards triangulaires, le comportement asymptotique est

$$N(R) \sim \frac{\alpha}{\mu(\mathbb{H}/\Gamma)} R^2, \quad (8.18)$$

où α est la largeur du domaine fondamental. On le montre dans le cas du billard carré dans [117]. La connaissance de la longueur, de la largeur et de la densité des faisceaux d'orbites périodiques permet, à l'aide de la formule de trace, de déterminer la contribution des orbites périodiques à la statistique spectrale.

8.4.5 Facteur de forme d'un billard triangulaire

Le facteur de forme a pu être calculé, grâce à l'utilisation de la propriété de Veech, pour les triangles rectangles avec un angle égal à π/n (article 1). Ces triangles correspondent aux deux

n	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$K(0)$	1	1	5/9	1	7/15	5/9	3/7	1/2	11/27	3/5

n	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
$K(0)$	13/33	4/9	5/13	3/7	17/45	1/2	19/51	11/27	7/19	4/15

TAB. 8.2 – Valeurs du facteur de forme en 0 pour les triangles $(\pi/2, \pi/n, \pi/2 - \pi/n)$

premières lignes du tableau 8.1. Le résultat est

$$K(0) = \frac{n + \epsilon(n)}{3(n-2)}, \quad \epsilon(n) = \begin{cases} 0 & n \text{ impair} \\ 2 & n \text{ pair, } 3 \nmid n \\ 6 & n \text{ pair, } 3 \mid n. \end{cases} \quad (8.19)$$

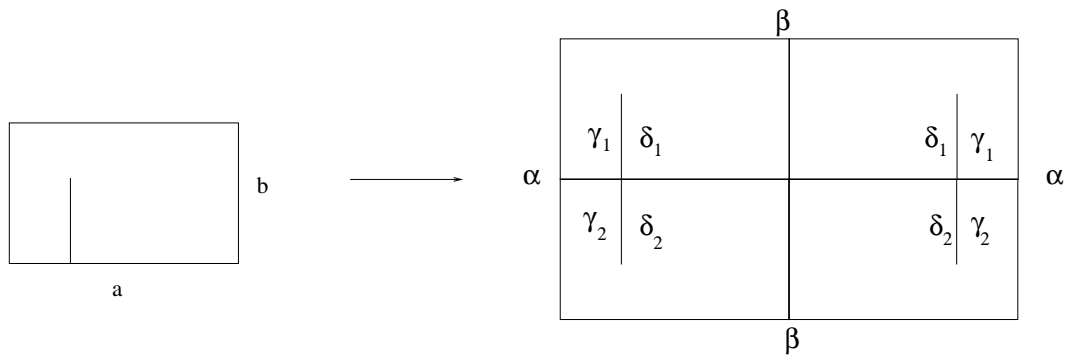
Les valeurs de $K(0)$ pour les 22 premières valeurs de n sont données à la table 8.2. Le calcul reste à faire dans le cas des autres triangles ayant la propriété de Veech.

8.5 Billards avec barrière

Le billard avec barrière est un des systèmes pseudo-intégrables les plus simples: introduit par Hannay et McCraw [10], il consiste en un rectangle $[0, a] \times [0, b]$ contenant une barrière décrite par le segment $\{\epsilon_0 a\} \times [0, \alpha b]$, avec $0 \leq \epsilon_0, \alpha < 1$ (voir Figure 8.4). On peut le considérer comme un billard heptagonal d'angles dont 6 angles sont égaux à $\pi/2$ et un angle est égal à 2π . C'est donc un système pseudo-intégrable, et le mouvement dans l'espace des phases se fait d'après (1.22) sur une surface de genre 2. On peut visualiser cette surface en dépliant les trajectoires du billard dans le plan: on obtient un rectangle dont les bords opposés sont identifiés, et où les bords des images de la barrière doivent être recollés comme indiqué sur la Figure 8.4. On a ainsi une surface à deux trous. Lorsque la hauteur de la barrière est telle que $\alpha \in \mathbb{Q}$, le billard avec barrière possède la propriété de Veech (décrite à la section 8.4).

Il est intéressant de savoir quelle est la statistique des niveaux d'énergie d'un tel système. Wiersig [118] a montré que le facteur de forme en 0 d'un billard avec barrière pour $\epsilon_0 = 1/2 = \alpha$ est $K(0) = 1/2$, ce qui correspond à la prédiction du modèle semi-poissonien. Ce calcul est généralisable à $\epsilon_0 = 1/2$, α quelconque (c'est-à-dire une barrière de hauteur quelconque au milieu du rectangle) et donne encore $K(0) = 1/2$ (voir annexe D).

L'étude mathématique des orbites périodiques de tels billards est faite dans [119]. Elle permet de généraliser le calcul de $K(0)$ au cas $\epsilon_0 \neq 1/2$.

FIG. 8.4 – *Le billard avec barrière et la surface de genre 2 équivalente.*

8.6 Conclusion

Ce chapitre met en évidence analytiquement l'existence de systèmes vérifiant $0 < K(0) < 1$, complétant ainsi la preuve analytique de l'existence de systèmes présentant une statistique intermédiaire. La compréhension du comportement quantique des systèmes pseudo-intégrables étudiés passe par la connaissance de leur comportement classique. Dans le cas des billards perturbés par une ligne de flux, le comportement classique, qui est celui du système non-perturbé correspondant, est connu. Dans le cas des billards de Veech, ou des billards avec barrière, la connaissance du comportement classique, c'est-à-dire des orbites périodiques, grâce à une propriété mathématique particulière, a permis le calcul du facteur de forme à l'origine. On trouve par exemple, pour les billards avec ligne de flux envisagés, des valeurs comprises entre $3/8$ et 1 . Pour les billards triangulaires ayant la propriété de Veech, on trouve des valeurs voisines de $1/2$ à $1/3$, et la valeur exacte de $1/2$ pour le billard avec barrière. Notons que cette valeur de $1/2$ est celle prévue par les modèles semi-poissoniens pour les statistiques intermédiaires (voir le chapitre 3). Le calcul des termes d'ordre supérieur dans le développement en τ du facteur de forme nécessitera la prise en compte des contributions diffractives à la formule de trace.

Article 1

Periodic Orbit Contribution to the 2-Point Correlation Form Factor for Pseudo-Integrable Billiards

Periodic Orbits Contribution to the 2-Point Correlation Form Factor for Pseudo-Integrable Systems

E. Bogomolny, O. Giraud, C. Schmit

Laboratoire de Physique Théorique et Modèles Statistiques *, Université de Paris XI, Bât. 100,
91405 Orsay Cedex, France

Received: 10 January 2000 / Accepted: 18 May 2001

Abstract: Using heuristic arguments based on the trace formulas we relate the 2-point correlation form factor, $K_2(\tau)$, at small values of τ with sums over classical periodic orbits for typical examples of pseudo-integrable systems. The later sums have been explicitly calculated for the following models: (i) plane billiards in the form of right triangles with one angle π/n and (ii) rectangular billiards with the Aharonov-Bohm flux line. In the first model, using the properties of the Veech structure, it is shown that $K_2(0) = (n + \epsilon(n))/(3(n - 2))$, where $\epsilon(n) = 0$ for odd n , $\epsilon(n) = 2$ for even n not divisible by 3, and $\epsilon(n) = 6$ for even n divisible by 3. For completeness we also recall informally the main features of the Veech construction. In the second model the answer depends on arithmetical properties of ratios of flux line coordinates to the corresponding sides of the rectangle. When these ratios are non-commensurable irrational numbers, $K_2(0) = 1 - 3\bar{\alpha} + 4\bar{\alpha}^2$, where $\bar{\alpha}$ is the fractional part of the flux through the rectangle when $0 \leq \bar{\alpha} \leq 1/2$ and it is symmetric with respect to the line $\bar{\alpha} = 1/2$ when $1/2 \leq \bar{\alpha} \leq 1$. The comparison of these results with numerical calculations of the form factor is discussed in detail. The above values of $K_2(0)$ differ from all known examples of spectral statistics, thus confirming analytically the peculiarities of statistical properties of the energy levels in pseudo-integrable systems.

1. Introduction

The statistical properties of quantum systems attracted wide attention in the last years (see e.g. [1]). The investigation of many different models had led to a few accepted conjectures which relate statistical distribution of quantum energy levels with general properties of corresponding classical motion. For generic systems these conjectures are the following: for chaotic systems the level spacing distribution follows the Random Matrix statistics [2, 3]; for integrable systems it follows the Poisson statistics [4]. Both conjectures are supported by a lot of numerical evidences and by some analytical arguments [5–7].

* Unité Mixte de Recherche de l'Université Paris XI et du CNRS (UMR 8626)

These well-established conjectures are applicable only to completely chaotic or integrable models. But there are systems which are neither chaotic nor integrable. Noticeable examples of such systems are plane polygonal billiards with all angles, α_i , commensurable with π ,

$$\alpha_i = \pi \frac{m_i}{n_i}, \quad (1)$$

where m_i, n_i are co-prime integers. In such systems all trajectories belong to a 2-dimensional surface of genus

$$g = 1 + \frac{N}{2} \sum_i \frac{m_i - 1}{n_i}, \quad (2)$$

where N is the least common factor of the n_i (see e.g. [11]). The case where all $m_i = 1$ corresponds to $g = 1$ (i.e. to a torus) which is integrable. If some $m_i > 1$ trajectories belong to a higher genus surface and, consequently, the system is not integrable (at least in the usual sense) but it is not chaotic either since all trajectories belong to a 2-dimensional surface and cannot cover a 3-dimensional energy surface ergodically as is required for chaotic systems. For such reasons these systems are called pseudo-integrable.

A natural question appears: what is the spectral statistics of pseudo-integrable systems? Numerical calculations [11–13] clearly demonstrated that statistical properties of such systems differ from standard examples but have many points in common with the statistics of the 3-dimensional Anderson model at the metal-insulator transition point [14]. The full analytical approach to this question meets with difficulties related mostly with the existence of quickly growing terms in the trace formula [15] which do not permit to use standard methods.

The main purpose of this paper is to compute analytically the value of the 2-point correlation form factor, $K_2(\tau)$, in the limit $\tau \rightarrow 0$ for two examples of pseudo-integrable systems, (i) a plain billiard in the shape of a right triangle with one angle equal to π/n and (ii) a rectangular billiard with a Bohm-Aharonov flux line inside. Using heuristic arguments based on trace formulas we show that in the small- τ limit the diagonal approximation [16] is valid and the problem reduces to the calculation of distributions of periodic orbit lengths and areas occupied by periodic orbit families. Though for general pseudo-integrable systems very little is known on this subject, triangular billiards in the shape of right triangles with angle π/n belong to the so-called Veech polygons [17,18] and have a hidden group structure which makes possible explicit calculation of necessary quantities. After the calculations we found a finite value of the 2-point correlation form factor at the origin, $0 < K_2(0) < 1$, which is different from both the Poisson distribution (for which $K_2(0) = 1$) and the random matrix results (where $K_2(0) = 0$). An analogous result has also been obtained for rectangular billiards with a Bohm-Aharonov flux line. Non-zero values of the 2-point correlation form factor at the origin confirm peculiar properties of spectral statistics for pseudo-integrable systems. We also discuss the comparison of theoretical predictions with the results of extensive numerical calculations.

The plan of the paper is the following. In Sect. 2 the discussions of the trace formula and the diagonal approximation for the 2-point correlation form factor are presented. A brief introduction to the Veech structure of certain pseudo-integrable billiards is given in Sect. 3. For clarity we start in Sect. 3.1 with a simple example of square billiards where ideas and methods can easily be illustrated. Needed properties of the modular group and the Eisenstein series are shortly revised in Sects. 3.2 and 3.3. In Sect. 3.4 the

Veech group for π/n right triangle is derived and in Sect. 3.4.2 the density of periodic orbits for this triangle is computed. In Sect. 3.5 the calculation of 2-point form factor at the origin is performed and the comparison with the results of numerical calculations is discussed. Section 4 dwel on the calculation of the 2-point form factor for a rectangular billiard with a flux line. As in the previous sections the main point is the calculation of areas swept by periodic orbits around the flux line. The result depends on arithmetical properties of ratios of coordinates of the flux line to the corresponding rectangular sides. In Sect. 5 concluding remarks are presented.

2. The Form Factor in the Diagonal Approximation

2.1. The density of states. The modern semiclassical approximation of multi-dimensional quantum systems is based on various types of trace formulas which express quantum density of states (and other quantities as well) through quantities computed in pure classical mechanics [8–10]. The main step in deriving trace formulas is the semiclassical approximation for the (advanced) Green function

$$G_+(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_n \frac{\bar{\Psi}_n(\vec{x})\Psi_n(\vec{y})}{E - E_n + i\epsilon}, \quad (3)$$

where E_n is the set of energy levels and Ψ_n the eigenfunctions as a sum over classical trajectories with energy E connecting initial point $\vec{x}$ and final point $\vec{y}$ [8,9]

$$G_+(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_{tr} A_{tr} \exp\left(\frac{i}{\hbar} S_{cl} - i\frac{\pi}{2}v\right). \quad (4)$$

S_{cl} is the classical action computed along a trajectory, A_{tr} is a pre-factor depending on the system considered, and v is a phase (the Maslov index) which, roughly speaking, counts points, where the simple semiclassical approximation breaks down.

For 2-dimensional free motion (and for 2-dimensional polygonal billiards) the semiclassical approximation for G reads (see e.g. [9])

$$G_+(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_p \frac{e^{ikl_p - i\frac{\pi}{2}v_p - i\frac{3\pi}{4}}}{\sqrt{8\pi kl_p}}, \quad (5)$$

where l_p is the geometrical length of the orbit and $k = \sqrt{E}$ is the wave vector (in the units $\hbar = 1$ and $m = 1/2$).

The knowledge of the Green function permits to find other quantum quantities as well. In particular the quantum density of states

$$d(E) = \sum_n \delta(E - E_n) \quad (6)$$

may be written by means of the advanced Green function as

$$d(E) = -\frac{1}{\pi} \text{Im} \int d\vec{x} G_+(\vec{x}, \vec{x}). \quad (7)$$

The contribution from very short trajectories gives the mean level density, $\bar{d}$, and the integration over the space selects periodic orbit contributions [8,9] and determines an

oscillating part of level density, $d^{(osc)}(E)$. For example, the density of states of an integrable rectangular billiard with sides a and b is

$$d(E) = \bar{d} + d^{(osc)}(E). \quad (8)$$

Here the smooth part is

$$\bar{d} = \frac{\mathcal{A}}{4\pi}, \quad (9)$$

where $\mathcal{A}$ is the area of the rectangle (this formula is valid for all 2-dimensional billiards) and the oscillating part is

$$d_{p.o.}(E) = \sum_{p.p.o.} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathcal{A}_p}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi knl_p}} e^{iknl_p - i\frac{\pi}{2}v_p - i\frac{\pi}{4}} + c.c., \quad (10)$$

where

$$l_p = \sqrt{(2Ma)^2 + (2Nb)^2}. \quad (11)$$

In the rectangular billiard, the lengths of periodic orbits are 4 times degenerate in the sum (5) because $(\pm M, \pm N)$ give the same length. When the integral (7) is performed, orbits (M, N) and $(-M, N)$ are absorbed in the same $\mathcal{A}_p$. The summation in (10) is therefore performed over all primitive periodic orbits of length l_p with $M \geq 0$ repeated n times (an orbit (M, N) and its time-reverse companion $(-M, -N)$ are counted as two different orbits). In all integrable billiards periodic orbits are not isolated but belong to families. $\mathcal{A}_p$ is the area of the pencil of periodic orbits of length l_p . For the rectangular billiard $\mathcal{A}_p = 2\mathcal{A}$.

Pseudo-integrable systems considered in the paper belong to the class of diffractive systems whose characteristic property is the existence of singularities which make the classical motion undetermined. Each time a classical trajectory hits a singularity there is no unique way to continue it. Quantum mechanics smooths out these singularities and associates with each (not too strong) singularity a diffraction coefficient, $D(\vec{n}, \vec{n}')$, (or scattering amplitude) which defines an amplitude of scattering on this singularity from the initial direction $\vec{n}$ to the final direction $\vec{n}'$.

Correspondingly, the semiclassical approximation of the Green function in the presence of a singularity at point $\vec{x}_0$ takes the form

$$G(\vec{x}, \vec{y}) = G_0(\vec{x}, \vec{y}) + \sum_{\vec{n}, \vec{n}'} G_0(\vec{x}, (\vec{x}_0, \vec{n})) D(\vec{n}, \vec{n}') G_0((\vec{x}_0, \vec{n}'), \vec{y}), \quad (12)$$

where $G_0(\vec{x}, \vec{y})$ is the Green function without singularity and $G_0(\vec{x}, (\vec{x}_0, \vec{n}))$ is a contribution to the Green function from a classical trajectory starting at point $\vec{x}$ and ending at the singularity $\vec{x}_0$ with momentum in the direction $\vec{n}$. $G_0((\vec{x}_0, \vec{n}'), \vec{x}')$ is a contribution to the Green function from a classical trajectory starting at point $\vec{x}_0$ with momentum in the direction $\vec{n}'$ and ending at point $\vec{x}'$.

This modification of the Green function changes the trace formula. For diffractive systems the density of states can now be written as the sum of three terms [19–21]

$$d(E) = \bar{d} + d_{p.o.}(E) + d_{d.o.}(E), \quad (13)$$

where $\bar{d}$ is the mean level density, $d_{p.o.}$ is the contribution of periodic orbits without singularity, and the third term, $d_{d.o.}(E)$, is a contribution from all classical orbits starting and ending at the singularity (with, in general, different momenta). These trajectories are called diffractive orbits and $d_{d.o.}(E)$ is a sum over all possible combinations of them

$$d_{d.o.}(E) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\pi m} \frac{\partial}{\partial E} \sum G(\vec{n}_1, \vec{n}'_1) D(\vec{n}'_1, \vec{n}_2) \dots G(\vec{n}_{m-1}, \vec{n}'_m) D(\vec{n}'_m, \vec{n}_1), \quad (14)$$

where $G(\vec{n}, \vec{n}')$ is the contribution to the Green function from a classical trajectory starting at the singular point with initial momentum in direction $\vec{n}$ and ending at it with final momentum in direction $\vec{n}'$.

For polygonal billiards the vertices with $m_i \neq 1$ play the role of singular points [19]. In the case of scattering on the angle α the diffraction coefficient can be derived from Sommerfeld's exact solution [19]

$$D(\theta_f, \theta_i) = \frac{2}{\gamma} \sin \frac{\pi}{\gamma} \left[\frac{1}{\cos \pi/\gamma - \cos(\theta_f + \theta_i)/\gamma} - \frac{1}{\cos \pi/\gamma - \cos(\theta_f - \theta_i)/\gamma} \right], \quad (15)$$

where $\gamma = \alpha/\pi$ and θ_f (resp. θ_i) is the final (resp. initial) scattering angle.

For rectangular billiards with Aharonov-Bohm flux lines the flux lines themselves are singular points and the exact solution for an infinite plane with a flux line carrying a flux α [22] gives

$$D(\theta_f, \theta_i) = \frac{2 \sin \pi \alpha}{\cos \frac{\theta_f - \theta_i}{2}} e^{i(\theta_f - \theta_i)/2}. \quad (16)$$

The main difference between pseudo-integrable models discussed in this paper and the usual diffractive models is the divergence of diffraction coefficients (15) and (16) at certain directions (called optical boundaries because in the simplest case they separate illuminated regions from dark ones). Of course, exact solutions do not diverge even in the vicinity of optical boundaries. The divergence comes from artificial separation of exact waves into geometrical and diffraction parts. Nevertheless, this formal divergence has profound effects on the structure of the trace formula. First, multiple diffraction along optical boundaries needs special treatment. Using a kind of uniform approximation in [15] it was demonstrated that for polygonal billiards such multiple diffraction produces terms proportional up to a numerical factor to l/k , where l is the total length of the diffractive orbit. When l is fixed and $k \rightarrow \infty$ (as in the usual approach to trace formulas) these terms are smaller than periodic orbit terms (10) but bigger than diffractive terms (14). But to compute spectral correlation functions one needs to consider a limit when k is fixed and $l \rightarrow \infty$. In this limit multiple diffraction terms are bigger than both periodic orbit and diffraction terms. Another difficulty is related with the existence of terms corresponding to diffraction not exactly on optical boundaries but sufficiently close to them so their contributions are also large. Without exact summation of these quickly growing terms it is not possible to find spectral statistics of the systems considered.

It the next section we argue that, nevertheless, these terms give a negligible contribution to the value of the 2-point correlation form factor at the origin and only diagonal contributions of periodic orbits will be important for this quantity.

2.2. *The 2-point correlation form factor.* The 2-point correlation function is related with the level density by the formal expression

$$R_2(\epsilon) = \left\langle d\left(E + \frac{\epsilon}{2}\right) d\left(E - \frac{\epsilon}{2}\right) \right\rangle, \quad (17)$$

where the brackets denote an energy averaging around E on an energy window much larger than the mean level spacing $1/\bar{d}$, and much smaller than energy E .

The two-point correlation form factor is the Fourier transform of $R_2(\epsilon)$:

$$K_2(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\epsilon}{\bar{d}} \left\langle d\left(E + \frac{\epsilon}{2}\right) d\left(E - \frac{\epsilon}{2}\right) \right\rangle e^{2i\pi\bar{d}\epsilon\tau}, \quad (18)$$

(the factors are chosen so that τ and K_2 are dimensionless).

Trace formulas, roughly speaking, state that the density of states can be represented as a sum over classical orbits (both periodic and diffractive)

$$d^{(osc)}(E) = \sum_p C_p e^{iS_p(E)/\hbar} + c.c. \quad (19)$$

Substituting this formal expansion into (17) and using the expansion

$$S(E + \epsilon) \approx S(E) + T(E)\epsilon,$$

where $T(E)$ is the period of classical motion one obtains [16]

$$\begin{aligned} \left\langle d\left(E + \frac{\epsilon}{2}\right) d\left(E - \frac{\epsilon}{2}\right) \right\rangle = \\ \sum_{p_1, p_2} C_{p_1} C_{p_2}^* \left\langle \exp \frac{i}{\hbar} (S_{p_1}(E) - S_{p_2}(E)) \right\rangle e^{i(T_{p_1} + T_{p_2})\epsilon/(2\hbar)}. \end{aligned} \quad (20)$$

Here the terms corresponding to the sum of actions are omitted as it is assumed that they are washed out by the smoothing procedure.

The corresponding expression for the 2-point correlation form factor is the following:

$$K_2(\tau) = \sum_{p_1, p_2} \frac{2\pi\hbar}{\bar{d}} C_{p_1} C_{p_2}^* \left\langle e^{i(S_{p_1}(E) - S_{p_2}(E))/\hbar} \right\rangle \delta\left(\frac{T_{p_1} + T_{p_2}}{2} - 2\pi\hbar\bar{d}\tau\right). \quad (21)$$

The main difficulty in such an approach is the computation of the mean value of terms with action differences

$$F(E) = \langle e^{i(S_{p_1}(E) - S_{p_2}(E))/\hbar} \rangle. \quad (22)$$

The best developed approximation (called the diagonal approximation) consists in taking into account only terms with exactly the same actions [16] i.e.

$$F(E) = \begin{cases} 1, & \text{if } S_{p_1}(E) = S_{p_2}(E) \\ 0, & \text{if } S_{p_1}(E) \neq S_{p_2}(E) \end{cases}, \quad (23)$$

since terms with $S_{p_1}(E) \neq S_{p_2}(E)$ will vanish by smoothing over E . In this approximation (assuming that for orbits with equal actions pre-factors are also equal (which is not always the case)) the 2-point correlation form factor takes the form

$$K_2^{(\text{diag})}(\tau) = \sum_p \frac{2\pi\hbar}{\bar{d}} g_p^2 |C_p|^2 \delta(T_p - 2\pi\hbar\bar{d}\tau), \quad (24)$$

where g_p is the multiplicity of a given periodic orbit (i.e. the number of orbits with exactly the same action) and the summation is performed over orbits with different actions. In particular for integrable and pseudo-integrable systems from Eq. (10) one gets

$$K_2^{(\text{diag})}(\tau) = \frac{1}{8\pi^2\bar{d}} \sum_p \frac{|\mathcal{A}_p|^2}{l_p} g_p^2 \delta(l_p - 4\pi k\bar{d}\tau), \quad (25)$$

where as before l_p is the length of a periodic orbit and $\mathcal{A}_p$ is the surface occupied by a periodic orbit family.

It is instructive to perform the calculation for the simplest example of the rectangular billiard with sizes a and b . A periodic orbit in this billiard is defined by 2 integers m, n and its length is

$$l_p = \sqrt{(2ma)^2 + (2nb)^2}. \quad (26)$$

As pairs (m, n) and $(m, -n)$ belong to the same family (or torus) the degeneracy is $g_p = 2$ (we remind the reader that in the rectangular billiard the terms corresponding to $m < 0$ are already taken into account in $\mathcal{A}_p$), and it is sufficient to compute the density of periodic orbits with positive m, n ,

$$\rho(l) = \sum_{m,n \geq 0} \delta(l - l_p). \quad (27)$$

Changing the summation over integers (m, n) to the integration and using the substitution $m = r \cos \phi / (2a)$ and $n = r \sin \phi / (2b)$, one obtains by integrating over ϕ from 0 to $\pi/2$,

$$\rho(l) = \frac{\pi l}{8\mathcal{A}}. \quad (28)$$

Since all families of periodic orbits in the rectangle cover the same area $\mathcal{A}_p = 2\mathcal{A}$ and the length multiplicity is $g_p = 2$, the 2-point correlation form factor for the rectangular billiard in the diagonal approximation is

$$K_2(\tau) = \frac{2\mathcal{A}^2}{\pi^2\bar{d}} \int_0^\infty \frac{1}{l} \delta(l - 4\pi k\bar{d}\tau) \rho(l) dl = 1, \quad (29)$$

which is the expected value for the form factor of integrable systems [16]. The diagonal approximation (23) is known (with physical accuracy) to be valid for generic integrable systems [16] and can be modified [23] to compute mean values of more than 2 actions in the exponent of (23).

For general systems the validity of the diagonal approximation is restricted only to small values of τ [16, 24] and it is usually used to compute the first non-zero term of the expansion of the 2-point correlation form factor in powers of τ .

For diffractive systems with finite diffraction coefficient one can use the diagonal approximation for both periodic orbit terms and diffractive terms. But when the diffraction coefficient diverges in certain directions these calculations lead to difficulties. For example, multiple diffraction on optical boundaries corresponding to n repetitions of a primitive periodic orbit in pseudo-integrable billiard gives the following terms [15]:

$$d_{\text{mult.diff.}}(E) = \sum_{l,n} \frac{l}{k} c_n \cos(knl), \quad (30)$$

where c_n are certain numerical coefficients. The attempt to use the diagonal approximation for these terms leads to the following result

$$K_2^{(\text{mult.diff.})} \sim k^2 \tau^3, \quad (31)$$

if we take into account that the density of primitive periodic orbits in pseudo-integrable systems (at least for Veech systems (see the next section)) differs only by a numerical factor from Eq. (28). But this expression contains powers of momentum k and when $k \rightarrow \infty$ it cannot be correct. All terms corresponding to diffraction on or close to optical boundaries give similar quickly growing terms which cannot be treated separately. Without a resummation of these terms the determination of spectral statistics of such models seems not possible. These arguments suggest the following scenario. The 2-point form factor is a sum of two terms

$$K_2(\tau) = f_1(k^\alpha \tau) + f_2(\tau), \quad (32)$$

where α is a certain positive quantity. The first function, $f_1(x)$, describes a result of resummation of quickly growing terms connected with divergence of the diffraction coefficient and when $x \rightarrow \infty$ $f_1(x)$ should go quickly to zero. The second function, $f_2(x)$, is a contribution of diffraction far from optical boundaries and can be computed similarly to ordinary diffraction [25] in perturbation series of τ . Of course, this is only a plausible conjecture and more detailed investigation should be done to give credit to it.

Though the divergence of the diffraction coefficient prevents the calculation of the 2-point correlation form factor in the full range, one can still use the trace formula (14) to find its behavior at the origin, $\tau = 0$. The main point is that, even when the diffraction coefficient formally diverges, the exact waves remain finite and using a uniform approximation [15] one can demonstrate that the ratio

$$\frac{D(\vec{n}, \vec{n}')}{\sqrt{kl}} \quad (33)$$

is bounded for all angles, lengths and momenta. Each term in the diffractive trace formula (14) is a product of a certain number of these ratios and the total period of the corresponding composite orbit which appears due to the derivative over energy. Therefore it is of order of τ multiplied by a constant and in the limit $\tau \rightarrow 0$ all diffractive terms disappear. Only the periodic orbit contribution (10) remains important at small values of τ . From Eq. (25) one concludes that for pseudo-integrable systems

$$K_2(0) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{8\pi^2 \bar{d}} \sum_p \frac{|\mathcal{A}_p|^2}{l_p} g_p^2 \delta(l_p - 4\pi k \bar{d} \tau). \quad (34)$$

The main problem now is how to compute the density of periodic orbits and the distribution of the areas of periodic orbit families. For generic pseudo-integrable systems very little is known and no reliable calculations can be done. E.g. for general plane polygonal billiards with angles commensurable with π it has only been proved [27,28] that the number of periodic orbits with length less than l , $\mathcal{N}(l_p \leq l)$ obeys inequalities

$$c_1 l^2 < \mathcal{N}(l_p \leq l) < c_2 l^2 \quad (35)$$

for certain constants c_1 and c_2 (depending on the polygon). But even the existence of an asymptotic law for $\mathcal{N}(l_p \leq l)$ was not proved.

Fortunately, there is a sub-class of pseudo-integrable billiards for which all necessary quantities can be computed due to the existence of a hidden group structure, and the triangular billiard in the shape of the right triangle with one angle equal to π/n belongs to this class. In the following Section we focus on those polygons.

3. Veech Structures for Polygonal Billiards

We start the discussion of a hidden group structure of certain polygonal billiards with the simple example of the square billiard where the necessary ideas and methods can be illustrated clearly without technical difficulties.

3.1. A simple case: The square billiard. How can one evaluate the number of periodic orbits with length less than l in a square billiard of size $2a$ with periodic boundary conditions? The exact expression for the length of the periodic orbits in such a billiard is, of course,

$$l_p = \sqrt{(2ma)^2 + (2na)^2} \quad (36)$$

with $m \in \mathbb{N}$ and $n \in \mathbb{Z}$ (see (11)). The number of periodic orbits with length less than l , $\mathcal{N}(l_p \leq l)$, reads

$$\mathcal{N}(l_p \leq l) = \sum_{m,n} \Theta(l - 2a\sqrt{m^2 + n^2}) \quad (37)$$

and asymptotically when $l \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(l_p \leq l) &= \int_0^\infty dm \int_{-\infty}^\infty dn \Theta(l - 2a\sqrt{m^2 + n^2}) \\ &= \frac{\pi l^2}{8a^2} \end{aligned} \quad (38)$$

if one sets $m = (r \cos \varphi)/2a$ and $n = (r \sin \varphi)/2a$. This is the number of all periodic orbits. More interesting questions and rich mathematical structure appear when one is interested in the calculation of the number of primitive periodic orbits $\mathcal{N}_{pp}(l_p \leq l)$ (that is, orbits with m and n coprime).

The number of such orbits for a square billiard can easily be computed by using the inclusion-exclusion principle. The number of primitive periodic orbits with length less than l is the total number of periodic orbits with length less than l minus the number

of orbits repeated p times with prime p , to which we add orbits repeated $p_1 p_2$ times, which had been subtracted twice, etc. Finally one concludes that

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_{pp}(l_p \leq l) &= \mathcal{N}(l_p \leq l) - \sum_p \mathcal{N}(l_p \leq \frac{l}{p}) + \sum_{p_1, p_2} \mathcal{N}(l_p \leq \frac{l}{p_1 p_2}) \\ &\quad - \sum_{p_1, p_2, p_3} \mathcal{N}(l_p \leq \frac{l}{p_1 p_2 p_3}) \dots \end{aligned} \quad (39)$$

Using the l^2 dependence of $\mathcal{N}$ in (38), we have

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_{pp}(l_p \leq l) &= \mathcal{N}(l_p \leq l) \left(1 - \sum_p \frac{1}{p^2} + \sum_{p_1, p_2} \frac{1}{(p_1 p_2)^2} - \sum_{p_1, p_2, p_3} \frac{1}{(p_1 p_2 p_3)^2} \dots \right) \\ &= \mathcal{N} \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^2} \right) = \mathcal{N} \frac{1}{\zeta(2)} = \frac{6}{\pi^2} \mathcal{N}, \end{aligned} \quad (40)$$

where

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_p \frac{1}{1 - p^{-s}} \quad (41)$$

is the Riemann zeta function.

From (38) one gets

$$\mathcal{N}_{pp}(l_p \leq l) = \frac{3l^2}{4\pi a^2}. \quad (42)$$

Our aim is to generalize the previous calculation of $\mathcal{N}_{pp}(l_p \leq l)$ to certain triangular billiards. This generalization naturally appears [17] when one considers carefully the usual geometrical picture of the free motion inside the square billiard. It is well known that any trajectory of such a motion can be unfolded to a straight line when instead of the square billiard one considers the motion on the covering space which for the square billiard is a plane with infinite square lattice of the side $2a$. The vertices of this lattice (which are the images of the vertices of the initial square) have coordinates

$$x = 2am, \quad y = 2an \quad (43)$$

with integers m and n and can be considered as the result of the application of a 2×2 matrix with integer coefficient to a horizontal vector $(2a, 0)$,

$$\begin{pmatrix} m & k \\ n & l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2a \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2am \\ 2an \end{pmatrix}. \quad (44)$$

Thus, the periodic orbit lengths (36) are the distances between these vertices and the initial point $(0, 0)$.

The problem of finding the number $\mathcal{N}_{pp}$ of primitive periodic orbits with length less than l is therefore equivalent to the problem of finding out how many 2×2 matrices with integer coefficients and determinant equal to 1 (since m and n are coprime one can impose $ml - nk = 1$) exist with $m^2 + n^2 \leq x^2$ for a given x (or, which is equivalent, with $n^2 + l^2 \leq x^2$). The group of 2×2 matrices with integer coefficients and determinant equal to 1 form a group $SL(2, \mathbb{Z})$ and in the next two sections we shall discuss its main properties. Though this material is well known we find it useful to recall it informally.

3.2. The modular group. The subgroup of $SL(2, \mathbb{R})$ containing all 2×2 matrices with integer coefficients and determinant equal to 1 is called the modular group $SL(2, \mathbb{Z})$. The standard representation of this group (see e.g. [26]) is the Poincaré half-plane $\mathcal{H}$ with measure

$$ds^2 = \frac{1}{y^2}(dx^2 + dy^2). \quad (45)$$

A matrix $g \in SL(2, \mathbb{Z})$ is represented by the isometry

$$\begin{aligned} g : \mathcal{H} &\rightarrow \mathcal{H}, \\ z &\mapsto \frac{mz + k}{nz + l}. \end{aligned} \quad (46)$$

The modular group is generated by the translation $T : z \mapsto z + 1$ and the inversion $S : z \mapsto -1/z$, which correspond respectively to the matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (47)$$

(with $\alpha = 1$ for the modular group) and

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (48)$$

Since the modular group is a discrete group, we can define its fundamental domain $\mathcal{D}$ (shown in Fig. 1), that is the domain of the Poincaré half-plane $\mathcal{H}$ that covers $\mathcal{H}$ under the action of the representation (46) of the group.

In order to compute the number of matrices $g = \begin{pmatrix} m & k \\ n & l \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z})$ verifying $n^2 + l^2 \leq x^2$, we have to evaluate

$$\mathcal{N}(x) = \sum_{\substack{g \in \Gamma_\infty \backslash G \\ n^2 + l^2 \leq x^2}} 1, \quad (49)$$

where $G = SL(2, \mathbb{Z})$ and Γ_∞ is the subgroup of G generated by the translations ($\Gamma_\infty = \{T^n, n \in \mathbb{Z}\}$): since the left multiplication by matrices of the form T^p ,

$$\begin{pmatrix} 1 & p \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m & k \\ n & l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m + pn & k + pl \\ n & l \end{pmatrix} \quad (50)$$

does not change n and l it is necessary to consider the quotient $\Gamma_\infty \backslash G$ (i.e. 2 matrices which differ by T^p are considered only once), so that the sum is convergent [29]. If we assume that in the limit $x \rightarrow \infty$ the sums can be written as integrals over n and l with uniform measure (see later) in the form $(B/\pi)dndl$, we get

$$\mathcal{N}(x) = \int_{n^2 + l^2 \leq x^2} \frac{B}{\pi} dndl = \frac{B}{2} x^2. \quad (51)$$

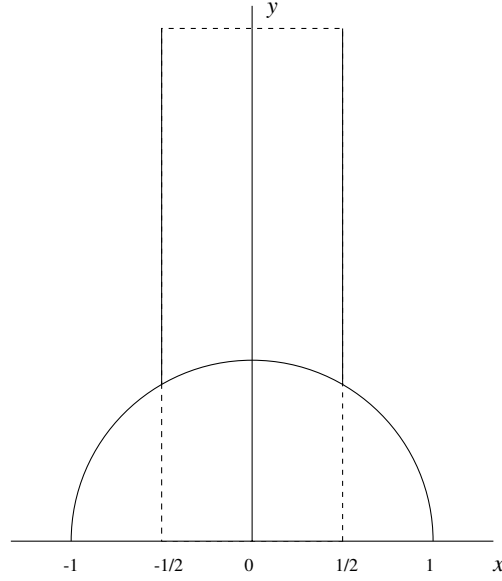


Fig. 1. The fundamental domain of the modular group

3.3. Eisenstein series. In order to compute the coefficient B , let us introduce the Eisenstein series

$$E(z, s) = \sum_{g \in \Gamma_\infty \backslash G} (\text{Im } g(z))^s \quad (52)$$

for $s > 1$. From expression (46) we get, since $ml - nk = 1$,

$$\text{Im } g(z) = \frac{y}{|nz + l|^2}, \quad (53)$$

where $y = \text{Im } z$. Since $\text{Im } g'g(z) = \text{Im } g(z)$ for $g' \in \Gamma_\infty$, the sum over $\Gamma_\infty \backslash G$ is well defined. Let us first compute the asymptotic behavior of $E(z, s)$ when $s \rightarrow 1$. For a given $R \in \mathbb{R}$, we can rewrite the sum (52) as a finite sum over elements of G for which $n^2 + l^2 < R^2$ and a sum over elements for which $n^2 + l^2 > R^2$ which diverges as $s \rightarrow 1$. The divergent part, $n^2 + l^2 > R^2$, is

$$E^{\text{div}}(z, s) = \frac{y^s}{\pi} \int_{n^2 + l^2 > R^2} \frac{B \, dn \, dl}{|nz + l|^{2s}} \quad (54)$$

$$= \frac{By^s}{\pi} \int_R^\infty \int_0^\pi \frac{r^{1-2s} \, dr \, d\phi}{[(x \sin \phi + \cos \phi)^2 + (y \sin \phi)^2]^s}. \quad (55)$$

Since

$$\int_R^\infty r^{1-2s} \, dr = \frac{R^{2(1-s)}}{2(s-1)} \underset{s \rightarrow 1}{\sim} \frac{1}{2(s-1)}, \quad (56)$$

and the finite part of the Eisenstein series can be neglected as compared with the divergent part, we have

$$E(z, s) \underset{s \rightarrow 1}{\sim} \frac{yB}{2\pi(s-1)} \int_0^\pi \frac{d\phi}{(x \sin \phi + \cos \phi)^2 + (y \sin \phi)^2}. \quad (57)$$

The computation of the integral can be performed the following way: setting $A = 1 - x^2 - y^2$, $B = 2x$ and $C = 1 + x^2 + y^2$, we get

$$\int_0^\pi \frac{d\phi}{(x^2 + y^2) \sin^2 \phi + \cos^2 \phi + 2x \sin \phi \cos \phi} = 2 \int_0^\pi \frac{d\phi}{A \cos 2\phi + B \sin 2\phi + C}, \quad (58)$$

and since $C^2 - A^2 - B^2 = 4y^2$, the integral is equal to

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\Psi}{\sqrt{A^2 + B^2 \cos \Psi} + C} = \frac{\pi}{y}. \quad (59)$$

Finally

$$E(z, s) \underset{s \rightarrow 1}{\sim} \frac{B}{2(s-1)} \quad (60)$$

and this limit does not depend on z .

Now let us integrate the series in (52) with the invariant measure $d\mu(z) = dx dy / y^2$ over a part, $\mathcal{D}_Y$, of the fundamental domain $\mathcal{D}$ corresponding to a restriction $y \leq Y$. If d is the width of the fundamental domain,

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{D}_Y} E(z, s) d\mu(z) &= \sum_{g \in \Gamma_\infty \backslash G} \int_{\mathcal{D}_Y} (\mathcal{I}m g(z))^s d\mu(z) \\ &= \sum_{g \in \Gamma_\infty \backslash G} \int_{g\mathcal{D}_Y} (\mathcal{I}m z)^s d\mu(z) \end{aligned} \quad (61)$$

$$\simeq \int_0^d dx \int_0^Y \frac{dy}{y^2} y^s \quad (62)$$

$$= d \frac{Y^{s-1}}{s-1}. \quad (63)$$

In transformation from Eq. (61) to Eq. (62) we take into account that the image of fundamental region $\mathcal{D}$ (and $\mathcal{D}_Y$) under the action of G is a certain region on the upper-half plane which under the action of Γ_∞ can be moved into a vertical strip of width d (which is the fundamental region for the group Γ_∞). These images can not intersect and when $Y \rightarrow \infty$ will cover the whole strip with $y \leq Y$.

The asymptotic behavior of this integral is thus the following:

$$\lim_{s \rightarrow 1} \int_{\mathcal{D}_Y} E(z, s) d\mu(z) = \frac{d}{s-1}. \quad (64)$$

By comparing this expression with Eq. (60) one concludes that the value of the constant B is

$$B = 2 \frac{d}{\text{Vol } \mathcal{D}}, \quad (65)$$

and from Eq. (51), the final answer for the density of primitive (n and l are coprime) periodic orbits in a square billiard is

$$\mathcal{N}_{pp}(n^2 + l^2 \leq x^2) = \frac{d}{\text{Vol } \mathcal{D}} x^2. \quad (66)$$

For the modular group $d = 1$, $\text{Vol } \mathcal{D} = \pi/3$, and for a square billiard with side $2a$ we have $x = l/(2a)$ according to (36), so

$$\mathcal{N}_{pp}(l_p < l) = \frac{3l^2}{4\pi a^2}, \quad (67)$$

which agree with Eq. (42) obtained by a different method.

3.4. Veech group for π/n right triangles.

3.4.1. The symmetry group. The previous calculations were possible because we have found a group—the modular group—that relates periodic orbits in a square to a simple vector (see Eq. (44)). In order to generalize this construction for more complicated polygons it is important to point out that the modular group is the symmetry group of the unfolding of the square billiard (that is, the lattice whose unit cell is a 1×1 square). Indeed this square lattice is, evidently, invariant under the following two transformations: the rotation by $\pi/2$ around the center of the square which we denote by S and the translation of one coordinate (say x) by 1 which we denote by T . In Cartesian coordinates these transformations are represented by the following matrices:

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (68)$$

The vertices of the lattice are also unchanged under the action of the group generated by S and T . But it is well known that this group is exactly the modular group $SL(2, \mathbb{Z})$. Therefore the modular group plays a double role for a square billiard. First, it is the group of invariance of unfolding of the square and, second, it generates periodic orbits starting from a fixed vector as in Eq. (44).

It has been proved by Veech [17] that for certain polygons (called the Veech polygons) there exists a group with similar properties. In particular, a π/n right triangle (i.e. a triangle with angles $\pi/2, \pi/n, \pi(n-2)/2n$) belongs to the Veech polygons [17, 18].

Let us consider this case in detail. The geometrical construction of the unfolding of the classical trajectories in such a billiard is slightly different for n even and odd. By reflections with respect to the sides corresponding to the π/n angle the π/n triangle can be unfolded to the regular n -gon. For n even the opposite sides of this n -gon should be identified by translations (see Fig. 2a). For n odd one has to consider 2 regular n -gons reflected with respect to one side and to identify parallel sides by translations as in Fig. 2b. The resulting surface is the surface of genus $(n-1)/2$ for n odd (see 2) to which all trajectories belong. From this construction it is clear that if a group of invariance exists it should include the rotation by $2\pi/n$ around the center of these n -gons. In Cartesian coordinates this rotation is defined by the following matrix:

$$\sigma_n = \begin{pmatrix} \cos \frac{2\pi}{n} & -\sin \frac{2\pi}{n} \\ \sin \frac{2\pi}{n} & \cos \frac{2\pi}{n} \end{pmatrix}. \quad (69)$$

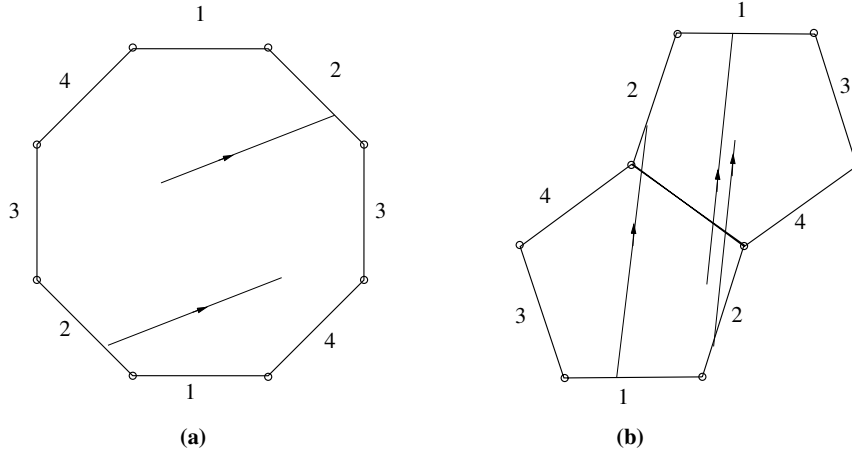


Fig. 2. The unfolding of π/n triangle. **(a)** n is even. **(b)** n is odd

To find other transformations which leave this surface invariant it is necessary to consider a few families of periodic orbits.

For n even, we define in the n -gon two important elementary families of periodic orbits: the first one is the family of horizontal primitive periodic orbits, the second one is the family of primitive periodic orbits making an angle π/n with the horizontal (see Fig. 3). For n odd we only define the first family (see Fig. 4).

For n even ($n = 4p$ or $n = 4p + 2$), the first family has orbits with lengths

$$L_j = 4 \cos \frac{(2j-1)\pi}{n} \cos \frac{\pi}{n} \quad (70)$$

and widths

$$W_j = 2 \cos \frac{(2j-1)\pi}{n} \sin \frac{\pi}{n} \quad (71)$$

with $1 \leq j \leq p$. The second family has orbits with lengths

$$l'_j = 4 \cos \frac{(2j-2)\pi}{n} \cos \frac{\pi}{n} \quad (72)$$

and widths

$$w'_j = 2 \cos \frac{(2j-2)\pi}{n} \sin \frac{\pi}{n} \quad (73)$$

with $2 \leq j \leq p$ if $n = 4p$ or $2 \leq j \leq p+1$ if $n = 4p+2$. The orbit with $j = 1$ is special: it has a length and a width equal to

$$l'_1 = 2 \cos \pi/n, \quad w'_1 = 2 \sin \pi/n. \quad (74)$$

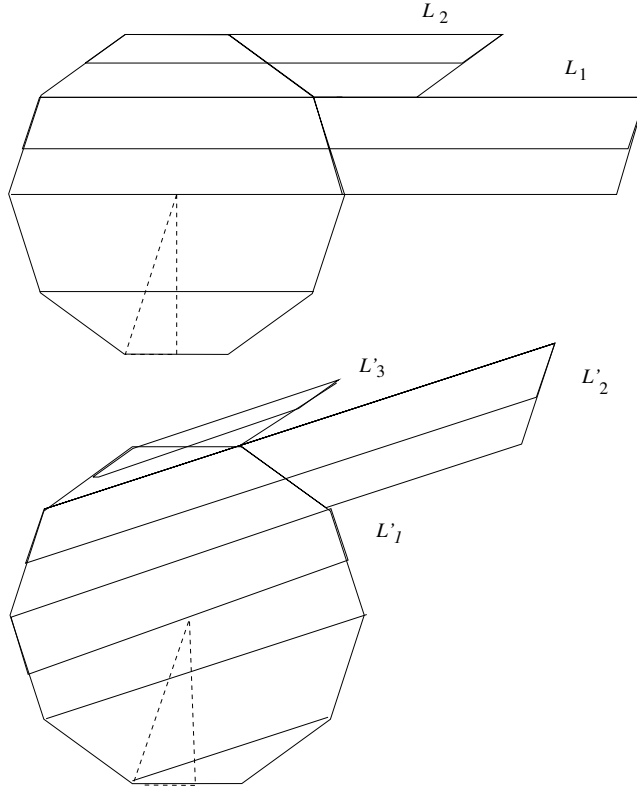


Fig. 3. The elementary orbits in the decagon

For n odd ($n = 2p + 1$), the lengths and widths are the following:

$$L_j = 4 \sin \frac{2j\pi}{n} \cos \frac{\pi}{n} \quad (75)$$

and

$$W_j = 2 \sin \frac{2j\pi}{n} \sin \frac{\pi}{n}. \quad (76)$$

with $1 \leq j \leq p$. It is of interest to compute the ratio of the length of each periodic orbit family to its width. From the above formulas it follows that for all families, except the one with $j = 1$ for even n , this ratio is the same

$$\frac{l}{w} = 2 \cot \frac{\pi}{n}. \quad (77)$$

For the exceptional family (74) this ratio is 2 times smaller.

The unfolding of any family of periodic orbits gives an infinite strip of points of period L_p and width W_p . If there is a group of invariance of the unfolded surface, it

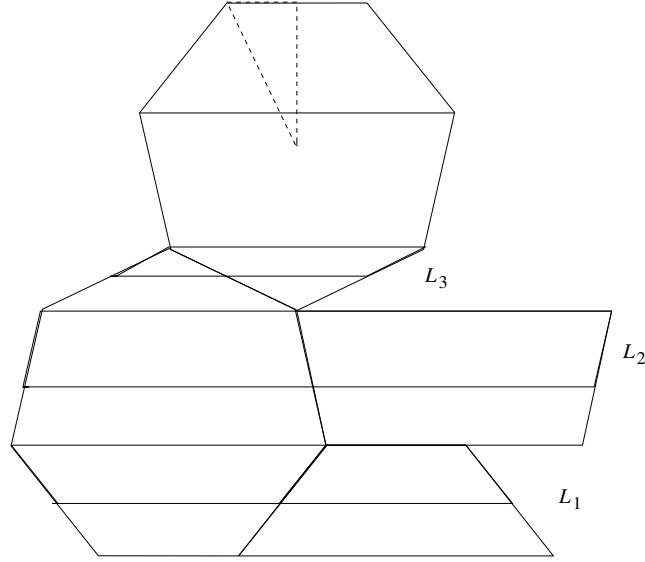


Fig. 4. The elementary orbits in the heptagon

should include a transformation which leaves invariant periodic orbit strips. Assume that the strip is oriented horizontally. In this case one sees that the shift of the form

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (78)$$

leaves points of the strip invariant provided that

$$L_p = n\alpha W_p, \quad (79)$$

where n is an integer.

Because for periodic orbits considered the ratio (77) is constant the invariance group should include the following transformation

$$\tau_n = \begin{pmatrix} 1 & 2 \cot \frac{\pi}{n} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (80)$$

Veech proved [17, 18] that the invariance group for the π/n triangle is a discrete subgroup Γ_n of $SL(2, \mathbb{R})$ generated by the two elements (69) and (80). Similarly to the relation (44) for the square, periodic orbits in this triangle are generated by the action of Γ_n over the elementary families of periodic orbits considered above.

We shall call the members of these families “basis orbits” (and label them by the index i). We define the corresponding basis vectors v_i by $v_j = (L_j, 0)$ and $v'_j = (l'_j \cos(\pi/n), l'_j \sin(\pi/n))$, so that $\{v_i\} = \{v_j, v'_j\}$ for n even and $\{v_i\} = \{v_j\}$ for n odd.

An element g of the symmetry group Γ_n has the following matrix representation

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}. \quad (81)$$

The result of the action of this element on one of the basis vectors $v_i = (v_{i1}, v_{i2})$ gives the coordinates of a new primitive periodic orbit (more precisely, a periodic orbit situated on the boundary of the periodic orbit pencil)

$$g v_i = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{i1} \\ v_{i2} \end{pmatrix}, \quad (82)$$

and the length of this primitive periodic orbit is the length of this vector.

The first family of basis vectors for even n and all basis vectors for odd n can be chosen in the form $v_i = (L_i, 0)$ and the lengths of periodic orbits generated by applying the group Γ_n are

$$L_g = \sqrt{a^2 + c^2} L_i, \quad (83)$$

where a, c are matrix elements of g (81). The second basis periodic orbits, v'_i , are obtained from horizontal vectors by rotation by π/n . But the matrix corresponding to the inverse of this rotation

$$r = \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{n} & \sin \frac{\pi}{n} \\ -\sin \frac{\pi}{n} & \cos \frac{\pi}{n} \end{pmatrix} \quad (84)$$

does not belong to our group Γ_n . Nevertheless, this matrix plays the role of a Hecke operator, namely, even if it does not belong to Γ_n the conjugation of any matrix from this group does belong to Γ_n : if $g \in \Gamma_n$, then $r^{-1}gr \in \Gamma_n$. To prove it let us note that

$$r^{-1}\sigma_n^p r = \sigma_n^p, \quad (85)$$

where σ_n is the generator (69) because all rotations commute, and it is easy to check that

$$r^{-1}\tau_n r = -\sigma_n \tau_n^{-1}, \quad r^{-1}\tau_n^{-1} = \tau_n \sigma_n^{-1}. \quad (86)$$

The right-hand sides of these relations belong to Γ_n and as all matrices from Γ_n can be written as a product of generators we get $r^{-1}gr \in \Gamma_n$ for $g \in \Gamma_n$.

Using this conjugation one can rotate the second family of periodic orbits for even n by $-\pi/n$ and the lengths of the orbits generated by the vectors v'_i will be related to matrix elements of Γ_n by the same relation as in (83),

$$L'_g = \sqrt{a^2 + c^2} l'_i. \quad (87)$$

Therefore, to find the distribution of periodic orbit lengths it is necessary to compute the distribution of $a^2 + b^2$ for matrices from Γ_n , which has been done for the modular group in the previous section. Equation (66) can be derived the same way for Γ_n . According to the previous section one can compute the density of periodic orbits and other quantities as well by investigation of the fundamental domain of Γ_n .

The distribution of areas of periodic orbit families is also easy to obtain: as all matrices from Γ_n have unit determinant, the area covered by the pencil corresponding to $g v_i$

($g \in \Gamma_n$) is the same as the area covered by the pencil corresponding to basis vectors v_i , i.e. it is equal to $L_i W_i$. In other words, there is a one to one correspondence between pencils of primitive periodic orbits and vectors $g v_i$ for $g \in \Gamma_n$. The discrete group Γ_n is related to periodic orbits in the π/n right triangle in the same way as the modular group is related to periodic orbits in the square.

3.4.2. The density of periodic orbits. The fundamental domains of the symmetry groups Γ_n for n even and odd are described in Figs. 5 and 6 respectively. For n even, it is the union of two triangles with angles $2\pi/n, 0, 0$ on the Poincaré half-plane: the area of the domain is $\text{Vol } \mathcal{D} = 2\pi(n-2)/n$, and its width is $2 \cot(\pi/n)$.

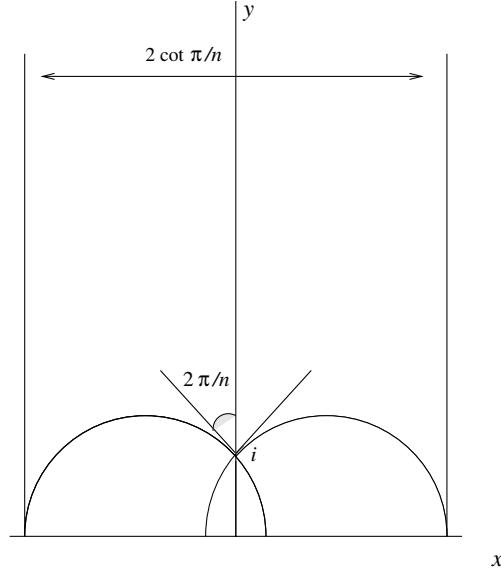


Fig. 5. The fundamental domain of Γ_n for n even

For n odd the two triangles have angles $\pi/n, \pi/2$ and 0 , therefore $\text{Vol } \mathcal{D} = \pi(n-2)/n$; the width of the fundamental domain is $2 \cot \pi/n$. These shapes of fundamental domains can be obtained by taking into account that the group Γ_n considered as a group acting on the Poincaré upper-half plane as in Sect. 3.2 includes (i) the translation by $2 \cot \pi/n$ and (ii) the rotation around point i by $2\pi/n$ for n odd and by $4\pi/n$ for n even. This difference between even and odd n is related to the fact that the rotation by angle π corresponds to the transformation $g \mapsto -g$, but these 2 matrices are represented by the same function on $\mathcal{H}$ (see (46)). For odd n ($n = 2q + 1$), the group generated by the generator (69) contains rotations by angles $2\pi j/(2q + 1)$ for $j = 0, 1, \dots, 2q$. The value $j = q + 1$ corresponds to the rotation by $\pi + \pi/n$. As the rotation by π is the identity transformation, the rotation by π/n belongs to Γ_n and it is a primitive generator of the subgroup $\{\sigma_n^p, p \in \mathbb{Z}\}$ of Γ_n .

For even n ($n = 2q$), the rotation by $2\pi q/n$ is the identity, therefore the rotation by π/n does not belong to the group and the primitive generator of the subgroup $\{\sigma_n^p, p \in \mathbb{Z}\}$ is the rotation by $2\pi/n$.

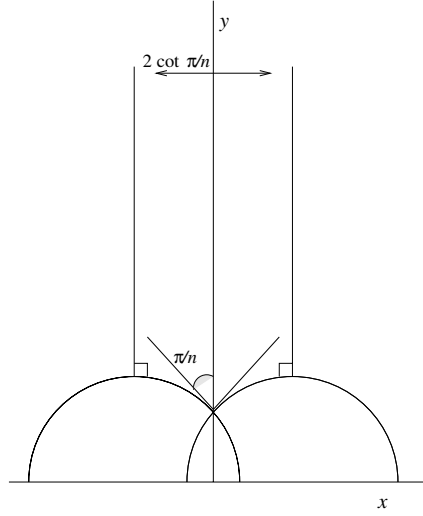


Fig. 6. The fundamental domain of Γ_n for n odd

Due to (66), we now get the number of matrices

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_n \quad (88)$$

verifying $a^2 + c^2 \leq x^2$:

$$\mathcal{N}(a^2 + c^2 \leq x^2) = \begin{cases} \frac{n}{\pi(n-2)} \cot \frac{\pi}{n} x^2 & (n \text{ even}) \\ \frac{2n}{\pi(n-2)} \cot \frac{\pi}{n} x^2 & (n \text{ odd}) \end{cases} . \quad (89)$$

These formulas give the total number of matrices verifying $a^2 + c^2 \leq x^2$. But due to the existence of rotation matrices in the group Γ_n each primitive periodic orbit length appears a few times in the above calculations. This multiplicity corresponds to different unfoldings of a given periodic orbit.

For n odd the $2n$ matrices of the form $\{\pm \beta_n^k g, 0 \leq k \leq 2n-1\}$, where β_n is the matrix of rotation by π/n , give rise to one primitive periodic orbit. For n even there exist n matrices of the form $\{\pm \sigma_n^k g, 0 \leq k \leq n-1\}$ (where σ_n is the matrix of rotation by $2\pi/n$ (69)) which describe one periodic orbit.

For g given by (88), the length of gv_i is $L_i \sqrt{a^2 + c^2}$. So the number of primitive periodic orbits of type gv_i less than l is

$$\mathcal{N}_{i,pp}(L_p < l) = \frac{1}{\pi(n-2)} \cot \frac{\pi}{n} \left(\frac{l}{L_i} \right)^2 . \quad (90)$$

The number of all primitive periodic orbits is the sum over all such contributions:

$$\mathcal{N}_{pp}(L_p < l) = C \frac{l^2}{\mathcal{A}}, \quad (91)$$

where

$$\mathcal{A} = \frac{1}{4} \sin \frac{2\pi}{n} \quad (92)$$

is the area of our triangle and

$$\mathcal{C} = \frac{1}{2\pi(n-2)} \cos^2 \frac{\pi}{n} \sum_i \frac{1}{L_i^2}. \quad (93)$$

For n odd ($n = 2p + 1$) Eq. (75) gives

$$\sum_{k=1}^p \frac{1}{L_k^2} = \frac{1}{16 \cos^2 \pi/n} \sum_{k=1}^p \frac{1}{\sin^2(2\pi k/n)}. \quad (94)$$

For n even ($n = 4p + 2\epsilon$, $\epsilon = 0, 1$) from Eqs. (70), (72), and (74) it follows

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^p \frac{1}{L_i^2} &= \frac{1}{16 \cos^2 \pi/n} \left(\sum_{j=1}^p \frac{1}{\cos^2(2j-1)\pi/n} + \sum_{j=2}^{p+\epsilon} \frac{1}{\cos^2(2j-2)\pi/n} + 4 \right) \\ &= \frac{1}{16 \cos^2 \pi/n} \left(\sum_{k=1}^{(n-2)/2} \frac{1}{\cos^2 k\pi/n} + 4 \right). \end{aligned} \quad (95)$$

The last sums can be calculated using the evident formulas (for another method of calculation see [17])

$$\frac{1}{\sin^2 x} = \sum_{q=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x - q\pi)^2}, \quad (96)$$

and

$$\frac{1}{\cos^2 \pi x/2} = \frac{4}{\pi^2} \sum_{q=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(2q-1-x)^2} + \frac{1}{(2q-1+x)^2} \right). \quad (97)$$

Taking into account that $\sin^2(k\pi/n) = \sin^2((n-k)\pi/n)$ for odd n and performing the following transformations:

$$\sum_{k=1}^{n-1} \sum_{q=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(k - qn)^2} = \sum_{t=-\infty}^{\infty} \frac{1}{t^2} - \sum_{q=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2 q^2} = \frac{\pi^2}{3} \left(1 - \frac{1}{n^2} \right), \quad (98)$$

one obtains that for odd n ,

$$\sum_{k=1}^{(n-1)/2} \frac{1}{\sin^2(2\pi k/n)} = \frac{n^2 - 1}{6}. \quad (99)$$

Similarly for even n ,

$$\sum_{k=1}^{(n-2)/2} \frac{1}{\cos^2 k\pi/n} = \frac{n^2 - 4}{6}. \quad (100)$$

Therefore the value of constant $\mathcal{C}$ is

$$\mathcal{C} = \frac{1}{192\pi(n-2)} \begin{cases} (n^2 - 1) & \text{for odd } n \\ (n^2 + 20) & \text{for even } n \end{cases}. \quad (101)$$

This result corresponds to primitive periodic orbits with geometrically different lengths: time-reversal orbits are not included in the summation. They give an additional factor of 2 in Eq. (101). In [17] the orbits corresponding to different unfoldings of the same periodic orbit have been included in the asymptotic formula, which leads asymptotically to the additional factor n for even n and $2n$ for odd n in Eq. (101). Furthermore, if one needs all periodic orbits including repetitions Eq. (101) should be multiplied by $\pi^2/6$ as in Sect. 3.1.

In Fig. 7 we present numerical results of the cumulative density of primitive periodic orbits in a $\pi/8$ right triangular billiard (with area $\mathcal{A} = 4\pi$) when all orbits (time-reversal and for different unfoldings) are included. The solid line is the best quadratic fit to these data

$$\mathcal{N}_{pp}(L_p < l) = .0294l^2 - .6055l + .3617. \quad (102)$$

One sees that this fit can hardly be distinguished from numerical results. The theoretical prediction for the coefficient in front of l^2 is $\mathcal{C}/\mathcal{A}$ according to Eq. (91); $\mathcal{C}$ is given by Eq. (101), and has to be multiplied by n since the numerical computation has taken into account the repetitions of each orbit, and by 2 as time-reversal orbits are taken into account as well:

$$\frac{\mathcal{C}}{\mathcal{A}} = \frac{7}{24\pi^2} \approx .0295, \quad (103)$$

which is in excellent agreement with numerical calculations.

3.5. Explicit calculation of the 2-point form factor for the π/n right triangle.

3.5.1. First case: No degeneracy of the lengths. We assume in this section that there is no degeneracy between the lengths of the periodic orbits (except the ones connected by the time-reversal transformation) or more carefully, that there is no pair of primitive periodic orbits whose lengths are commensurable. Since the lengths of the gv_i are proportional to the lengths of the v_i , the necessary requirement for the validity of this condition is the absence of commensurability relations between the L_i .

In this case the 2-point correlation form factor in the diagonal approximation is done by Eq. (25). The sum over different periodic orbits can be split into a sum over all types of periodic orbits, then the sum over periodic orbits of each type can be replaced by an integral; since the density ρ_i of periodic orbits of type i only takes into account once the periodic orbit and its time-reverse, the degeneracy is $g_p = 2$ and

$$\sum_p g_p^2 = 4 \sum_p = 4 \sum_i \int_0^\infty dl \rho_i(l). \quad (104)$$

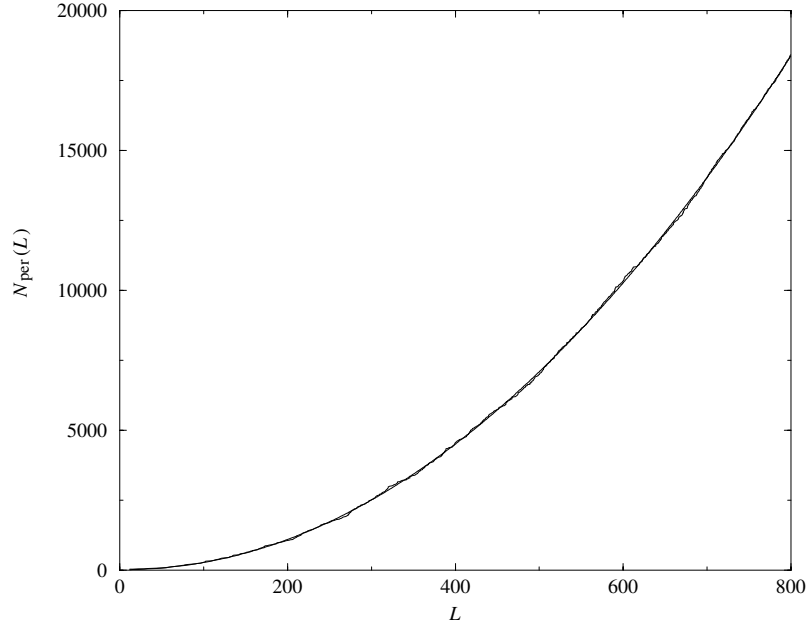


Fig. 7. The cumulative density of periodic orbits for the $\pi/8$ right triangular billiard

In (25), $\mathcal{A}_p$ is the area occupied by a pencil of periodic orbits of length L_p ; but this area is the same for all trajectories belonging to the same family i . So we just have to evaluate the area $\mathcal{A}_i = L_i W_i$ occupied by an elementary orbit of type i . The lengths (70), (72) and (75) are

$$L_k = 4 \cos \frac{k\pi}{n} \cos \frac{\pi}{n}, \quad 1 \leq k \leq p-1 \quad (105)$$

and $L_0 = 2 \cos \pi/n$ if $n = 2p$, and

$$L_k = 4 \sin \frac{2k\pi}{n} \cos \frac{\pi}{n}, \quad 1 \leq k \leq p \quad (106)$$

if $n = 2p+1$. The widths are only half the widths W_i given by (71), (73) and (76) since each fundamental pencil is symmetric with respect to the line joining two images of the $\pi/2$ corner of the triangle (see Fig. 3 and 4). So the W_k are

$$W_k = \cos \frac{k\pi}{n} \sin \frac{\pi}{n}, \quad 0 \leq k \leq p-1 \quad (107)$$

if $n = 2p$, and

$$W_k = \sin \frac{2k\pi}{n} \sin \frac{\pi}{n}, \quad 1 \leq k \leq p \quad (108)$$

if $n = 2p + 1$. Then for small τ ,

$$K_2(\tau) = 4 \sum_i \frac{\mathcal{A}_i^2}{8\pi^2} \int_0^\infty \frac{1}{l\bar{d}} \delta(l - 4\pi k \bar{d} \tau) \rho_i(l) dl, \quad (109)$$

and replacing the density of orbits of type i by its mean value

$$\rho_i = \frac{\pi^2}{6} \frac{d\mathcal{N}_{i,pp}(L_p < l)}{dl} \quad (110)$$

where $\mathcal{N}_{i,pp}(L_p < l)$ is given by Eq. (90) we obtain, when performing the integral,

$$K_2(\tau) = \frac{\cot \pi/n}{6\pi(n-2)\bar{d}} \sum_k W_k^2, \quad (111)$$

where the average density of states is $\bar{d} = \mathcal{A}/4\pi$,

$$\mathcal{A} = \frac{1}{4} \sin \frac{2\pi}{n} \quad (112)$$

being the area of the triangle.

The sum (111) over the widths (107) and (108) gives

$$\sum_k W_k^2 = \begin{cases} \frac{n+2}{4} \sin^2 \frac{\pi}{n}, & n \text{ even} \\ \frac{n}{4} \sin^2 \frac{\pi}{n}, & n \text{ odd} \end{cases}. \quad (113)$$

So we finally get

$$K_2(\tau) = \frac{n + \epsilon(n)}{3(n-2)} \quad (114)$$

with

$$\epsilon(n) = 0 \quad \text{when } n \text{ is odd,} \quad (115)$$

$$\epsilon(n) = 2 \quad \text{when } n \text{ is even.} \quad (116)$$

3.5.2. Second case: Degeneracy of the lengths. We have assumed in the previous Section that the lengths of all primitive periodic orbits were non-commensurable. In the case of the π/n right triangle, there may exist a commensurability relation between the L_k given by (105) or (106) if there is one between the $\cos(k\pi/n)$ ($0 \leq k \leq p-1$) for n even, or between the $\sin(2k\pi/n)$ ($1 \leq k \leq p$) for n odd. It is shown in [30] that if n is an odd prime, there is no such relation between the $\sin(2k\pi/n)$. Ref. ([31]) deals with the case $(k, n) = 1$ and gives the same conclusion. It seems that in the general case, only one relation of that kind exists between the $\cos(k\pi/n)$, which is

$$2 \cos\left(\frac{n\pi}{3n}\right) = \cos(0) \quad (117)$$

and that no relation exists between terms with sinus. Therefore the only degeneracy occurs in the case where n is even and $3|n$, that is $n \in 6\mathbb{Z}$. In that case, from (10) we get

$$\begin{aligned} \left\langle d\left(E + \frac{\epsilon}{2}\right) d\left(E - \frac{\epsilon}{2}\right) \right\rangle &= K_2^{\text{diag}} \\ &+ 4 \sum_{p^+ \neq p'^+} \frac{\mathcal{A}_p \mathcal{A}_{p'}}{16\pi^2} \frac{1}{2\pi k \sqrt{l_p l_{p'}}} e^{ik(l_p - l_{p'}) + i\frac{\epsilon}{4k}(l_p + l_{p'})} + \text{c.c.}, \end{aligned} \quad (118)$$

where K_2^{diag} is the usual diagonal approximation. p^+ means that we only count for one orbit in the sum the orbit and its time-reverse, therefore there is a coefficient 4.

If there is a relation $m_1 L_1 = m_2 L_2$ (with m_1 and m_2 coprime) between two lengths of primitive periodic orbits, we have a contribution R_2^{deg} to the 2-point correlation function (17) which comes from orbits of lengths $qm_1 L_1$ and $qm_2 L_2$, $q \in \mathbb{Z}^*$:

$$\begin{aligned} R_2^{\text{deg}} &= \frac{2\mathcal{A}_1 \mathcal{A}_2}{4\pi^2 \cdot 2\pi k} \sum_q \frac{1}{\sqrt{qm_1 L_1 qm_2 L_2}} e^{i\frac{\epsilon}{4k}(qm_1 L_1 + qm_2 L_2)} \\ &= \frac{2\mathcal{A}_1 \mathcal{A}_2}{4\pi^2 \cdot 2\pi k} \sum_q \frac{1}{qm_1 L_1} e^{i\frac{\epsilon}{2k}(qm_1 L_1)}. \end{aligned} \quad (119)$$

The sum over all repetition numbers q of a function of qL_1 (where L_1 is a primitive periodic orbit) can be replaced by an integral:

$$R_2^{\text{deg}} = \frac{\mathcal{A}_1 \mathcal{A}_2}{4\pi^3 k} \int_0^\infty dl \frac{1}{m_1 l} e^{i\frac{\epsilon}{2k} m_1 l} \rho_1(l), \quad (120)$$

where the density $\rho_1(l)$ is the density of periodic orbits of type 1 (that is, with length proportional to L_1) with length less than l , given by (110). Performing the Fourier transform (18) and the integral over l gives

$$K_2(0) = \frac{\cot \pi/n}{6\pi(n-2)d} \left[\sum_i W_i^2 + 2 \frac{W_1 W_2}{m_1 m_2} \right]. \quad (121)$$

In our case the degeneracy is given by (117) and

$$W_0 W_n = \frac{1}{2} \sin^2 \frac{\pi}{n}. \quad (122)$$

We finally obtain

$$K_2(0) = \frac{n + \epsilon(n)}{3(n-2)} \quad (123)$$

with

$$\epsilon(n) = \begin{cases} 0 & \text{when } n \text{ is odd} \\ 2 & \text{when } n \text{ is even and } 3 \nmid n \\ 6 & \text{when } n \text{ is even and } 3 \mid n. \end{cases} \quad (124)$$

This formula is the main result of our calculations for the triangular billiards. It clearly demonstrates the peculiarities of spectral statistics for pseudo-integrable systems. The non-zero value of the form factor (< 1) at the origin does not correspond to any random matrix ensemble but it is typical for intermediate statistics [25, 32].

3.6. Comparison with numerical calculations. To compare the prediction (123) with numerical results we have computed 20000 levels for triangular billiards in the shape of a right triangle with one angle π/n for all $n = 5, 7 \dots, 30$ (the case of $n = 6$ is integrable). For each triangle we take levels from 15000 till 20000 and compute numerically the corresponding 2-point correlation form factor. A typical result is presented in Fig. 8. From data like this, it is quite difficult to find the value of the form factor at the origin because $\tau \rightarrow 0$ corresponds, according to Eq. (18), to an infinitely large energy difference in the 2-point correlation function: therefore numerically we always have $K_2(0) = 0$. We found it convenient first to fit the numerical data to the following simple expression for the form factor:

$$K_2(\tau) = \frac{a^2 - 2a + 4\pi^2\tau^2}{a^2 + 4\pi^2\tau^2}, \quad (125)$$

and then from it compute $K_2(0)$,

$$K_2(0) = 1 - \frac{2}{a}. \quad (126)$$

The form (125) has been chosen because (i) one wants a simple expression, (ii) when $\tau \rightarrow \infty$ the form factor should go to 1, (iii) to describe the level repulsion it is necessary that

$$\int_0^\infty (1 - K_2(\tau)) d\tau = \frac{1}{2}, \quad (127)$$

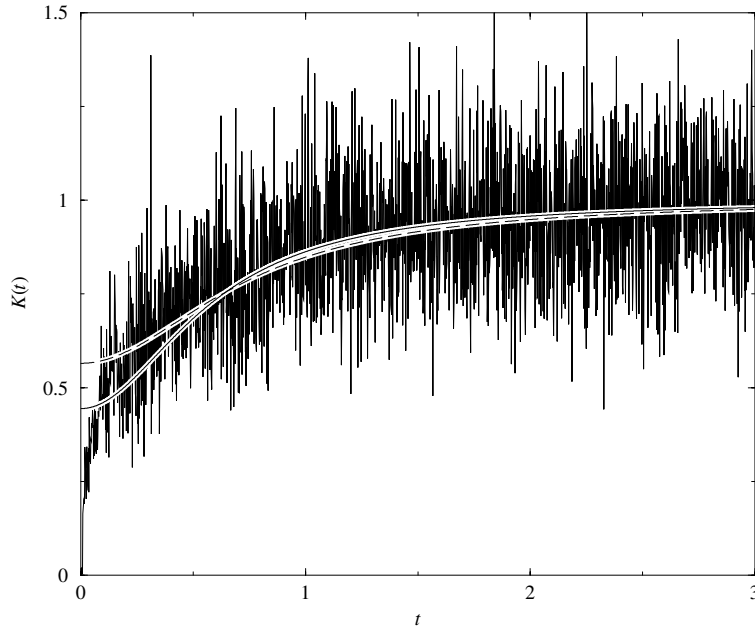


Fig. 8. The 2-point form factor for the $\pi/8$ right triangular billiard

and (iv) the expression (125) when $a = 4$ equals the form factor of the so-called semi-Poisson model [25,32] which serves as a reference point for intermediate statistics.

We stress that the above expression has no solid theoretical explanations and it is used because it relatively well describes our numerical results. The only fitting parameter is $K_2(0)$ related with a by Eq. (126). We tried two fitting procedures. First we fit Eq. (125) for the data with all τ or, second, to decrease the influence of very small τ , where numerical accuracy is not very good, we did not consider the data with $0 < \tau < 0.25$. In Fig. 8 these two fits are presented. The first one gives $K_2(0) \approx 0.44$ and the second one $K_2(0) \approx 0.565$. The expected value (123) for $n = 8$ is $5/9 \approx 0.56$.

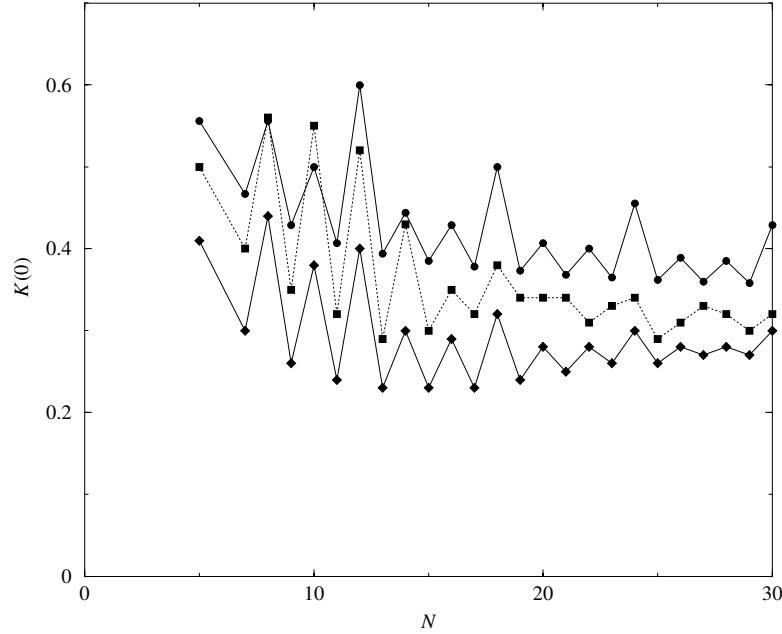


Fig. 9. $K_2(0)$ for π/n right triangles, $n = 5$ to 30. Circles are theoretical results (123). Squares are the fit (125) when the region of small τ , $0 < \tau < .25$, is omitted. Diamonds are the same fit but with all τ

In Fig. 9 the results of such fitting procedures are given for all triangles. The lower two curves correspond to these fits and the upper curve is the predictions (123). (Of course, only points are important. Curves are presented for clarity.) The numerical results quite well follow theoretical formula (123) but there is a small shift which decreases when the region of small τ is ignored. This difference between the curves seems to be a consequence of the fact that the result (123) corresponds to asymptotic limit $k \rightarrow \infty$ but numerical calculations have been performed at large but finite energy. To check this point we present in Fig. 10 the results of the calculation of the mean number variance, $\Sigma^{(2)}(L)$, for the $\pi/30$ right triangle, in 10 energy intervals $[8000k, 8000(k+1)]$, $0 \leq k \leq 9$ (the energy increases from bottom to top). It is well known (see e.g. [1]) that the behavior of the mean number variance at large distances is related with the value of the form factor

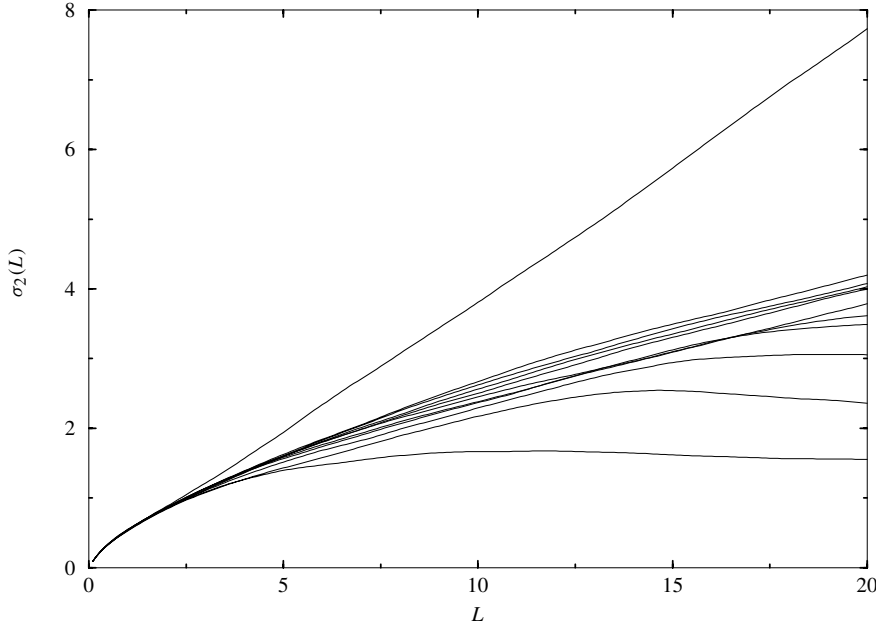


Fig. 10. $\Sigma^{(2)}(L)$ for energy windows with higher and higher energy

at the origin by the simple formula

$$\Sigma^{(2)}(L) \rightarrow K_2(0)L \text{ when } L \rightarrow \infty. \quad (128)$$

From Fig. 10 it is clearly seen that even for 80000 levels the curve does not stabilize. To find its limiting behavior we extrapolate point by point (with L fixed) these ten curves with a fit $A(L) + B(L)/\sqrt{k}$. (It means that for each L we fit 10 points to find the best $A(L)$ and $B(L)$.) The limit curve (i.e. $A(L)$) is the most upper curve in Fig. 10. It perfectly reproduces the expected features of $\Sigma^{(2)}(L)$: it is a straight line with slope $K_2(0) = 0.38$ corresponding to the expected value (123) for $n = 30$. In the same way, Prosen and Casati [33] have computed $\Sigma^{(2)}(L)$ for triangle billiards with angle $\pi/5$ for much larger values of the energy, and it seems that such fit works well for their calculations and the result for $K_2(0)$ agrees with (123). These (and other) calculations clearly demonstrate that the value of the 2-point correlation form factor at the origin converges slowly to the theoretical result (123) with increasing energy. This behavior may be a consequence of the conjectured existence of two different terms (32) in the form factor and, in the final extent, a manifestation of the strong diffraction in the vicinity of optical boundaries.

4. Rectangular Billiard with a Flux Line

4.1. Preliminary calculations. This section is devoted to the study of a rectangular billiard with the Aharonov-Bohm flux line [22] at a point $\vec{r}_0 = (x_0, y_0)$ inside the rectangle. In the polar coordinates, r, φ , around this point the vector potential of the flux

line has only φ component

$$A_\varphi = \frac{\alpha}{r} \quad (129)$$

and the 2-dimensional Schrödinger equation for the motion in this potential is (when $\hbar = c = 1$ and $m = 1/2$)

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial}{\partial \varphi} - i\alpha \right)^2 + E_n \right] \Psi_n(r, \varphi) = 0. \quad (130)$$

Similarly to triangular billiards discussed in previous sections this model belongs to the class of diffractive systems. The diffraction coefficient for the scattering on the flux line (16) diverges in the forward direction but as for pseudo-integrable systems the contribution of diffractive orbits can be neglected when computing the value of the 2-point correlation form factor at the origin.

It is well known that the Aharonov-Bohm potential (129) does not change classical trajectories but gives an additional phase, $\Delta\phi$, when a trajectory turns n times around the flux line

$$\Delta\phi = 2n\pi\alpha. \quad (131)$$

Therefore the contribution (10) of a periodic orbit to the trace formula will contain an additional phase depending on the winding number of the trajectory around the flux line.

Periodic orbits in the rectangle of sides a, b are determined by two integers M and N in the usual way and they are characterized by their length

$$l_p = \sqrt{(2Ma)^2 + (2Nb)^2}, \quad (132)$$

the area occupied by the periodic orbit family, and the winding number around the flux line. Each pencil of primitive periodic orbits occupies an area $2ab = 2\mathcal{A}$, so its width is $2\mathcal{A}/l_p$. The images of the flux line in the unfolding of the rectangular billiard are located at the points

$$((\zeta_1 + 2k)a, (\zeta_2 + 2k')b). \quad (133)$$

Here ζ_i takes the values ϵ_i or $2 - \epsilon_i$ ($i = 1, 2$), where

$$\epsilon_1 = \frac{x_0}{a}, \quad \epsilon_2 = \frac{y_0}{b} \quad (134)$$

are the ratios of coordinates of the flux line to the corresponding sides, and $k, k' \in \mathbb{Z}$ (see Fig. 11). Let us define $[x]$ as the largest integer less than or equal to x , so that

$$[x] \leq x < [x] + 1, \quad (135)$$

and $\{x\} = x - [x] \in [0, 1[$.

Each unfolded pencil of a primitive periodic orbit contains two and only two images of the flux line, since it covers twice the area of the rectangle. The periodic orbits from this pencil parallel to the vector (M, N) and going through the images of the flux line (which we shall call the saddle connections) split the pencil of primitive periodic orbits parallel to (M, N) into three pencils of same length (see Fig. 11). Only the central strip is affected by the presence of the flux line and any trajectory from this strip gets a phase

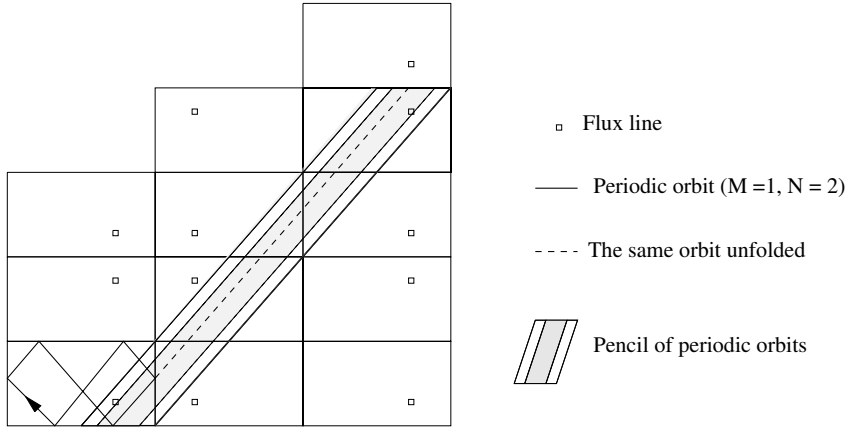


Fig. 11. An unfolded trajectory in the rectangle

$2\pi\alpha$ (according to (131) and since the orbit is primitive). So the winding number of a periodic trajectory is nothing but the repetition number of a periodic orbit belonging to the central pencil.

To compute the widths of the central strip as a function of M and N , let us note that the algebraic distance from an image $((\zeta_1 + 2k)a, (\zeta_2 + 2k')b)$ of the flux line to the saddle-connection linking the points $(0, 0)$ to $(2Ma, 2Nb)$ is

$$d = \frac{2\mathcal{A}}{l_p} (\zeta_2 M - \zeta_1 N + 2k'M - 2kN). \quad (136)$$

The two images of the flux line which are inside the pencil are the two nearest points among all the images $((\zeta_1 + 2k)a, (\zeta_2 + 2k')b)$ with integer k and k' that have positive distance to the saddle-connection. They correspond to points such that the distance (136) is positive and less than $2\mathcal{A}/l_p$, or less than 1 in units of $2\mathcal{A}/l_p$.

Let us set

$$Q_{\pm} = [\epsilon_2 M \pm \epsilon_1 N], \quad \epsilon_{\pm} = \{\epsilon_2 M \pm \epsilon_1 N\}. \quad (137)$$

The four possible values of (ζ_1, ζ_2) $((\epsilon_1, \epsilon_2), (\epsilon_1, 2-\epsilon_2), (2-\epsilon_1, \epsilon_2), \text{ and } (2-\epsilon_1, 2-\epsilon_2))$ give four possible families for the distance (136):

$$\begin{aligned} d_i &= 2k_i \pm (Q_+ + \epsilon_+), \\ d_i &= 2k_i \pm (Q_- + \epsilon_-), \end{aligned} \quad (138)$$

where k_i is a certain integer which depends on k, k', M and N . Among these four families, exactly two points correspond to a distance positive and less than 1: for instance if Q_+ and Q_- are even, only $2k_1 + Q_+ + \epsilon_+$ and $2k_2 + Q_- + \epsilon_-$ can be positive and less than one. So we must have $2k_1 + Q_+ = 0$ and $2k_2 + Q_- = 0$ and the two images of the flux line that are in the pencil of primitive periodic orbits are at a distance ϵ_+ and ϵ_- from the saddle-connection $(0, 0) - (2Ma, 2Nb)$; if both Q_+ and Q_- are odd, the two distances are $1 - \epsilon_+$ and $1 - \epsilon_-$. Since the width of the central strip is the difference between the two distances, it is in both cases $|\epsilon_1 - \epsilon_2|$. Dealing in the same way with the

case where Q_+ and Q_- have opposite parity, we get that the width of the central strip in units of $2\mathcal{A}/l_p$ is

$$\eta = \begin{cases} |\epsilon_- - \epsilon_+|, & \text{if } Q_+ \text{ and } Q_- \text{ have the same parity} \\ |1 - \epsilon_- - \epsilon_+|, & \text{if } Q_+ \text{ and } Q_- \text{ have opposite parity} \end{cases}. \quad (139)$$

Both cases can be summed up in the following formula:

$$\eta = \varphi(x, y), \quad (140)$$

with

$$\begin{aligned} x &= \epsilon_2 M + \epsilon_1 N \\ y &= \epsilon_2 M - \epsilon_1 N' \end{aligned} \quad (141)$$

where

$$\varphi(x, y) = |f(x) - f(y)|, \quad f(x) = (-1)^{[x]} \left(\{x\} - \frac{1}{2} \right); \quad (142)$$

$f(x)$ is an even function of period 2; if we restrict the study of φ to $[-1, 1] \times [-1, 1]$ we have

$$\varphi(x, y) = \begin{cases} |x + y| & \text{if } xy \leq 0 \\ |x - y| & \text{if } xy \geq 0 \end{cases}, \quad (143)$$

and the Fourier expansion of φ is

$$\varphi(x, y) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\cos \pi n x - \cos \pi n y)^2}{\pi^2 n^2}. \quad (144)$$

Using (141) and (144), we obtain that the width of the central strip associated to the orbit $(2M, 2N)$ is the following

$$\eta = \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2(\pi n \epsilon_2 M) \sin^2(\pi n \epsilon_1 N)}{n^2}. \quad (145)$$

4.2. Form factor for the billiard with flux line. The value of the two-point correlation form factor in the diagonal approximation given by Eq. (25), when diffractive contributions have been neglected, still holds for billiards with flux line. But $\mathcal{A}_p$ now includes the phase factor depending on the repetition number of the trajectory. The density of periodic orbits (10) becomes

$$d_{p.o.}(E) = \frac{1}{2} \sum_{pp^+, pp^-} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathcal{A}_{pn}}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi k n l_p}} e^{i k n l_p - i \frac{\pi}{2} v_p - i \frac{\pi}{4}} + c.c. \quad (146)$$

Here we distinguish between two types of orbits. The orbits associated with a primitive orbit pp^+ have a phase $\exp(2i\pi n\alpha)$ for the orbit repeated n times, and the total coefficient in the trace formula associated with these orbits is

$$\mathcal{A}_{p+n} = \mathcal{A}_{p_1} + \mathcal{A}_{p_2} e^{2i\pi n\alpha} + \mathcal{A}_{p_3}, \quad (147)$$

where $\mathcal{A}_{p_1}$, $\mathcal{A}_{p_2}$ and $\mathcal{A}_{p_3}$ are the areas covered respectively by the three strips in which the pencil of periodic orbits splits. The orbits associated with a primitive orbit pp^- have the complex conjugate phase $\exp(-2i\pi n\alpha)$ and their contribution to the trace formula is proportional to

$$\mathcal{A}_{p^-n} = \mathcal{A}_{p_1} + \mathcal{A}_{p_2} e^{-2i\pi n\alpha} + \mathcal{A}_{p_3}. \quad (148)$$

When the terms with same length $l_p = nl_{pp}$ are gathered together, we get

$$d_{p.o.}(E) = \sum_{p^+} \frac{\mathcal{A}_{np}}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi k l_p}} e^{ikl_p - i\frac{\pi}{2} \nu_p - i\frac{\pi}{4}} + c.c., \quad (149)$$

where

$$\mathcal{A}_{np} = \mathcal{A}_{p_1} + \mathcal{A}_{p_2} \cos(2\pi n\alpha) + \mathcal{A}_{p_3} \quad (150)$$

and the sum $\sum_{p^+}$ goes over orbits $M, N \geq 0$. Equation (25) now becomes

$$K_2(\tau) = \sum_{pp^+} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathcal{A}_{np}^2}{n^2} \frac{1}{2\pi^2 l_{pp} \bar{d}} \delta\left(l_{pp} - \frac{4\pi k \bar{d} \tau}{n}\right). \quad (151)$$

If η_p is the width of the central strip expressed in units of $2\mathcal{A}/l_p$, we have

$$\mathcal{A}_{np} = 2\mathcal{A}(1 - \eta_p + \eta_p \cos 2\pi n\alpha) = 2\mathcal{A}(1 - 2\eta_p \sin^2 \pi n\alpha), \quad (152)$$

and (using the fact that $\bar{d} = \mathcal{A}/4\pi$) the 2-point correlation form factor at small τ is a sum of 3 terms

$$\begin{aligned} K_2(\tau) = & \frac{8\mathcal{A}}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{pp} \frac{1}{l_{pp}} \delta\left(l_{pp} - \frac{\mathcal{A}k\tau}{n}\right) \\ & - \frac{32\mathcal{A}}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 \pi n\alpha}{n^2} \sum_{pp} \frac{\eta_{pp}}{l_{pp}} \delta\left(l_{pp} - \frac{\mathcal{A}k\tau}{n}\right) \\ & + \frac{32\mathcal{A}}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^4 \pi n\alpha}{n^2} \sum_{pp} \frac{\eta_{pp}^2}{l_{pp}} \delta\left(l_{pp} - \frac{\mathcal{A}k\tau}{n}\right). \end{aligned} \quad (153)$$

The summation over primitive periodic orbits can be done by replacing the sum by an integral, taking into account the density of primitive periodic orbits. If ϵ_1 and ϵ_2 are rational numbers

$$\epsilon_i = \frac{p_i}{q_i}, \quad (154)$$

where p_i and q_i are co-prime integers, the width of the central strip (145) only depends on the remainder r_1 of M modulo q_1 and r_2 of N modulo q_2 ,

$$\eta(r_1, r_2) = \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin^2\left(\pi \frac{p_1}{q_1} nr_1\right) \sin^2\left(\pi \frac{p_2}{q_2} nr_2\right). \quad (155)$$

There are $q_1 q_2$ periodic orbit families

$$M = q_1 k + r_1, \quad N = q_2 k' + r_2, \quad (156)$$

with $k, k' \in \mathbb{N}$.

To compute sums in Eq. (153) one needs to know the mean density of primitive periodic orbits for each family, $\rho_{pp,r_1,r_2}(l)$.

Let c be the greatest common divisor of q_1, q_2 : $c = (q_1, q_2)$. If $(r_1, r_2, c) \neq 1$, then M and N are not coprime and there is no primitive periodic orbit. In the opposite case it is demonstrated in Appendix A that

$$\rho_{pp,r_1,r_2}(l) = \rho_{pp}(l) \alpha(r_1, r_2), \quad (157)$$

where $\rho_{pp}(l)$ is the mean density for all primitive periodic orbits in the rectangle (cf. Eq. (42)) with $M, N > 0$,

$$\rho_{pp}(l) = \frac{3l}{4\pi \mathcal{A}}, \quad (158)$$

and

$$\alpha(r_1, r_2) = \frac{1}{q_1 q_2 \prod_{p|\text{lcf}(q_1, q_2)} (1 - 1/p^2)} \prod_{p|(q_1, r_1), p \nmid q_2} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \prod_{p|(q_2, r_2), p \nmid q_1} \left(1 - \frac{1}{p}\right), \quad (159)$$

and $\text{lcf}(q_1, q_2)$ is the least common factor of q_1, q_2 .

The knowledge of the mean density of periodic orbit families permits the computation of mean values of different quantities depending on families. If $f(r_1, r_2)$ is such a quantity its mean value is defined as follows

$$\langle f \rangle = \sum_{\substack{r_i \bmod q_i \\ (r_1, r_2, c)=1}} f(r_1, r_2) \alpha(r_1, r_2). \quad (160)$$

In particular

$$\begin{aligned} & \sum_{pp} \frac{\eta_{pp}^\beta}{l_{pp}} \delta\left(l_{pp} - \frac{\mathcal{A}k\tau}{n}\right) \\ &= \sum_{\substack{r_i \bmod q_i \\ (r_1, r_2, c)=1}} \eta^\beta(r_1, r_2) \int_0^\infty \frac{1}{l} \rho_{pp,r_1,r_2}(l) \delta\left(l - \frac{\mathcal{A}k\tau}{n}\right) dl = \frac{3}{4\pi \mathcal{A}} \langle \eta^\beta \rangle. \end{aligned} \quad (161)$$

The sums over n that appear in (153) can be computed using the standard formula

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2\pi n x}{(2\pi n)^2} = x^2 - x + \frac{1}{6}, \quad \text{for } 0 \leq x \leq 1. \quad (162)$$

It gives

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 \pi n \alpha}{n^2} = \frac{\pi^2}{2} \bar{\alpha} (1 - \bar{\alpha}) \quad (163)$$

and

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^4 \pi n \alpha}{n^2} = \frac{\pi^2}{4} \bar{\alpha}, \quad (164)$$

where $\bar{\alpha}$ is the fractional part $\{\alpha\}$ of the flux through the rectangle when $0 \leq \{\alpha\} \leq 1/2$ and $\bar{\alpha} = 1 - \{\alpha\}$ when $1/2 \leq \{\alpha\} \leq 1$.

Using (161), (163) and (164) one concludes that the 2-point correlation form factor for $\tau \rightarrow 0$ (153) is the following

$$K_2(0) = 1 - 12\bar{\alpha}(1 - \bar{\alpha}) \langle \eta \rangle + 6\bar{\alpha} \langle \eta^2 \rangle. \quad (165)$$

To use this formula it is necessary to know the values of $\langle \eta \rangle$ and $\langle \eta^2 \rangle$. In the case where both ϵ_1 and ϵ_2 are irrational non-commensurable quantities the fractional parts $\{n\epsilon_2 M\}$ and $\{n\epsilon_1 N\}$ cover the whole interval $[-1, 1]$ and η and η^2 can be computed by integrating expression (143) of η over the square $[-1, 1] \times [-1, 1]$. Simple calculations show that in this case

$$\langle \eta \rangle = \frac{1}{3}, \quad (166)$$

$$\langle \eta^2 \rangle = \frac{1}{6}. \quad (167)$$

Therefore when the coordinates of the flux line are non-commensurable with the corresponding sides

$$K_2(0) = 1 - 3\bar{\alpha} + 4\bar{\alpha}^2. \quad (168)$$

In Appendix B, it is shown that for all rational ϵ_i

$$\langle \eta \rangle = \frac{1}{3}, \quad (169)$$

like in the irrational case. The average $\langle \eta^2 \rangle$ is more difficult to compute analytically in this case: we have found an analytical expression only when q_1 divides q_2 (or similarly q_2 divides q_1).

Though the general formula for $\langle \eta^2 \rangle$ is cumbersome, the computation of the $\langle \eta^2 \rangle$ for rational ϵ_1 and ϵ_2 can easily be done numerically using Eqs. (141) and (143). For small denominators the values of $\langle \eta^2 \rangle$ are given in Table 1.

To check the obtained formulas we have computed numerically the 1500 first energy levels for the rectangular billiard with sides $a = 4$ and $b = \pi$ and the flux line with coordinates (from the low left corner) $x_0 = 5a/9$ and $y_0 = 11b/20$. The typical picture of $K_2(\tau)$ is shown in Fig. 12. As for the triangular billiards discussed in the previous sections we extrapolated $K_2(\tau)$ to small τ using the simple expression (125). The results for different values of the flux are presented in Fig. 13. We also check the following more suitable fit (which obeys the condition (127) when $c = (1 - b)^2$)

$$K_2(\tau) = \begin{cases} b + c\tau, & \text{when } \tau < (1 - b)/c \\ 1, & \text{when } \tau > (1 - b)/c \end{cases}. \quad (170)$$

Table 1. Value of $\langle \eta^2 \rangle$ for a rational flux line

q_1	2	3	4	5	6	7	8
q_2							
2	1/3	2/9	1/4	2/9	2/9	2/9	11/48
3	2/9	2/9	13/72	17/90	5/27	47/252	107/576
4	1/4	13/72	1/6	61/360	1/6	85/504	1/6
5	2/9	17/90	61/360	14/75	89/540	37/210	167/960
6	2/9	5/27	1/6	89/540	4/27	35/216	47/288
7	2/9	47/252	85/504	37/210	35/216	26/147	85/504
8	11/48	107/576	1/6	167/960	47/288	85/504	1/6

It gives practically the same results. The existing numerical precision does not permit to distinguish these 2 fits.

In the case where $x_0 = 5a/9$ and $y_0 = 11b/20$, simple calculations show that $\langle \eta^2 \rangle = 4867/29160$; Eq. (165) gives the expected value of $K_2(0)$,

$$K_2(0) = 1 - \frac{14573}{4860} \bar{\alpha} + 4\bar{\alpha}^2. \quad (171)$$

which corresponds to the solid curve in Fig. 13. (Note that the coefficient of $\bar{\alpha}$ equals approximately 2.99 and is practically indistinguishable from the coefficient 3 for irrational ϵ_i .)

Similarly as for triangular billiards there is a small difference between the theoretical and numerical curves. For triangular billiards where more levels are available this difference slowly decreases with energy. We expect the same behavior also for rectangular billiards with a flux line.

5. Conclusion

In this paper we have obtained explicit expressions of the 2-point correlation form factor $K_2(\tau)$ in the limit $\tau \rightarrow 0$ for a few typical examples of pseudo-integrable billiards: triangular billiards in the shape of right triangles with one angle equal to π/n , and rectangular billiards with a flux line. The obtained values of $K_2(0)$ differ from standard examples of spectral statistics (the Random matrix theory and the Poisson statistics), which confirm analytically the peculiarities of spectral statistics of pseudo-integrable systems. The calculations have been performed by analyzing analytically the properties of classical periodic orbits of the systems considered.

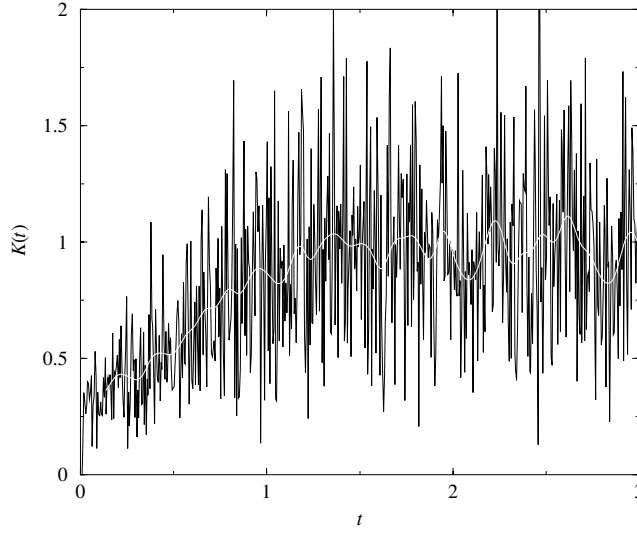


Fig. 12. The 2-point form factor for the rectangular billiard with flux line with $\alpha = 0.4$ and its smoothed value (white line)

In order to elucidate further the special properties of spectral statistics of polygonal billiards, it would be of interest to compute $K_2(0)$ for generic triangular billiards without the Veech structure. Moreover, we have taken into account only the diagonal terms and, consequently, were able to obtain only $K_2(0)$. The computation of the next terms in the expansion of $K_2(\tau)$ in powers of τ should include the exact resummation of singular contributions, coming from the diffraction close to the optical boundaries. The solutions of these problems require the development of new methods beyond the ones used in this paper.

Appendix A

Periodic orbits in a rectangle with sides a, b are determined by 2 integers M and N which count the difference of coordinates of initial, (x_i, y_i) , and final, (x_f, y_f) , points

$$x_f = x_i + 2aM, \quad y_f = y_i + 2bN. \quad (172)$$

The length of the periodic orbit is the geometrical length of this vector

$$L_p = \sqrt{(2aM)^2 + (2bN)^2}. \quad (173)$$

The mean cumulative density and the corresponding quantity for primitive periodic orbits (when M, N are co-prime integers) can be computed as for the square billiard (see Eqs. (38) and (42)). When $l \rightarrow \infty$ and if only positive M are considered

$$N(L_p < l) \rightarrow \frac{\pi l^2}{8ab}, \quad (174)$$

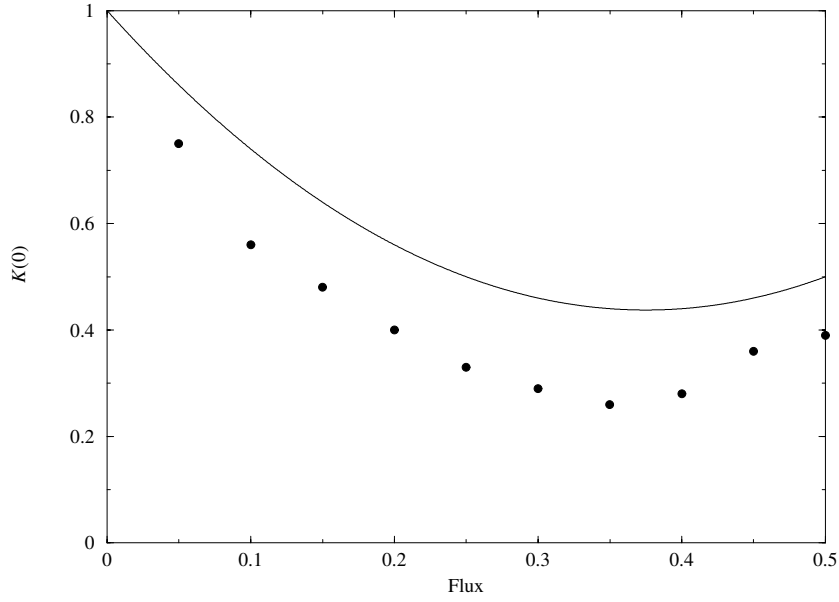


Fig. 13. $K_2(0)$ for different values of the flux α (points) and the asymptotic theoretical prediction (solid line)

and

$$N_{pp}(L_p < l) \rightarrow \frac{3l^2}{4\pi ab}. \quad (175)$$

The purpose of this Appendix is the computation of the mean cumulative density of primitive periodic orbits for periodic orbit families when

$$M \equiv r_1 \pmod{q_1}, \quad N \equiv r_2 \pmod{q_2}. \quad (176)$$

The asymptotics of $N_{pp}(L_p < l)$ when $l \rightarrow \infty$ is related with the behavior at small x of the Θ -function associated with these periodic orbits

$$\Theta(x) = \sum_{pp} e^{-xL_p^2}. \quad (177)$$

If

$$\Theta(x) \rightarrow \frac{C}{x^\gamma}, \quad \text{when } x \rightarrow 0, \quad (178)$$

then

$$N_{pp}(L_p < l) \rightarrow \frac{C}{\gamma\Gamma(\gamma)} l^{2\gamma}, \quad \text{when } l \rightarrow \infty. \quad (179)$$

We are interested in the following Θ -function:

$$\Theta(x) = \sum_{M, N=-\infty}^{\infty} e^{-x((2aM)^2 + (2bN)^2)}, \quad (180)$$

where the summation is performed over all integers M, N with the following constraints:

$$(M, N) = 1, \quad M \equiv r_1 \pmod{q_1}, \quad N \equiv r_2 \pmod{q_2}. \quad (181)$$

Note that both positive and negative values of M, N are considered. When only positive M are taken into account the formulas below have asymptotically factor $1/2$.

To impose the restriction $M \equiv r \pmod{q}$ it is convenient to introduce the δ -function

$$\delta_{t,q} = \begin{cases} 1, & \text{if } t \equiv 0 \pmod{q} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}. \quad (182)$$

Its explicit form may be the following:

$$\delta_{t,q} = \frac{1}{q} \sum_{k=0}^{q-1} e^{2\pi i k t / q}. \quad (183)$$

As in Sect. 3.1 the condition $(M, N) = 1$ can be taken into account by the inclusion-exclusion principle

$$\sum_{(M,N)=1} f(M, N) = \sum_{M, N=-\infty}^{\infty} \sum_{t=1}^{\infty} f(Mt, Nt) \mu(t), \quad (184)$$

where $\mu(t)$ is the Möbius function equal to $(-1)^n$ if t is a product of n distinct primes, 0 if t contains a squared factor, and $\mu(1) = 1$.

Combining all the necessary restrictions one finds the final expression for the Θ -function (180)

$$\begin{aligned} \Theta(x) = & \frac{1}{q_1 q_2} \sum_{M, N=-\infty}^{\infty} \sum_{k_i \pmod{q_i}} \sum_{t=1}^{\infty} \mu(t) e^{-4xt^2(M^2 a^2 + N^2 b^2)} \\ & \times e^{2\pi i k_1 (Mt - r_1)/q_1 + 2\pi i k_2 (Nt - r_2)/q_2}. \end{aligned} \quad (185)$$

Using the Poisson summation formula

$$\sum_{M=-\infty}^{\infty} e^{-xM^2 + 2\pi i y M} = \sqrt{\frac{\pi}{x}} \sum_{M=-\infty}^{\infty} e^{-\pi^2 (M+y)^2 / x}, \quad (186)$$

one obtains that

$$\begin{aligned} \Theta(x) = & \frac{\pi}{4abxq_1q_2} \sum_{k_i \pmod{q_i}} \sum_{t=1}^{\infty} \frac{\mu(t)}{t^2} e^{-2\pi i k_1 r_1 / q_1 - 2\pi i k_2 r_2 / q_2} \\ & \times \sum_{M=-\infty}^{\infty} e^{-\pi^2 (M + k_1 t / q_1)^2 / (4xt^2 a^2)} \sum_{N=-\infty}^{\infty} e^{-\pi^2 (N + k_2 t / q_2)^2 / (4xt^2 b^2)}. \end{aligned} \quad (187)$$

When $x \rightarrow 0$ the dominant contribution comes from terms with zero exponent, i.e. from terms with

$$M + \frac{k_1 t}{q_1} = 0, \quad \text{and} \quad N + \frac{k_2 t}{q_2} = 0, \quad (188)$$

or $k_i t \equiv 0 \pmod{q_i}$. The asymptotics of the Θ -function is therefore the following:

$$\Theta(x) = \frac{\pi}{4abx} \frac{1}{q_1 q_2} \sum_{k_i \pmod{q_i}} \sum_{t=1}^{\infty} \delta_{k_1 t, q_1} \delta_{k_2 t, q_2} \frac{\mu(t)}{t^2} e^{-2\pi i k_1 r_1 / q_1 - 2\pi i k_2 r_2 / q_2}. \quad (189)$$

Using the representation (183) for these δ -functions and performing the summation over k_i one gets that when $x \rightarrow 0$,

$$\Theta(x) = \frac{\pi}{4abx} F(r_1, r_2), \quad (190)$$

where

$$F(r_1, r_2) = \frac{1}{q_1 q_2} \sum_{l_i \pmod{q_i}} \sum_{t=1}^{\infty} \delta_{l_1 t - r_1, q_1} \delta_{l_2 t - r_2, q_2} \frac{\mu(t)}{t^2}. \quad (191)$$

From Eq. (179) one concludes that the asymptotics of the mean cumulative density of primitive periodic family (181) (with $M, N > 0$, i.e. with a factor $1/4$) is

$$N_{pp}(L_p < l) = \frac{\pi l^2}{16ab} F(r_1, r_2). \quad (192)$$

To perform the summation over t in Eq. (191) it is necessary to know the number of solutions of two equations

$$l_1 t \equiv r_1 \pmod{q_1}, \quad l_2 t \equiv r_2 \pmod{q_2}. \quad (193)$$

It is well known (and can be easily checked) that the number of solutions of the equation $ax \equiv b \pmod{q}$ depends on the greatest common divisor of a and q , $(a, q) = d$. If $d = 1$ there is 1 solution, $x \equiv ba^{-1} \pmod{q}$. If $d > 1$ and $d \nmid b$ there is no solution. If $d \mid b$ there is one solution, $x_0 = (b/d)(a/d)^{-1} \pmod{(q/d)}$ and consequently, there are d solutions modulo q : $x_j = x_0 + (q/d)j$, $j = 0, \dots, d-1$. Therefore

$$\begin{aligned} F(r_1, r_2) &= \frac{1}{q_1 q_2} \sum_{t=1}^{\infty} \frac{\mu(t)}{t^2} (q_1, t)(q_2, t) \delta_{(q_1, t), r_1} \delta_{(q_2, t), r_2} \\ &= \frac{1}{q_1 q_2} \sum_{\substack{d_1 \mid (q_1, r_1) \\ d_2 \mid (q_2, r_2)}} \sum_{\substack{(q_1, t)=d_1 \\ (q_2, t)=d_2}} \frac{\mu(t)}{t^2} d_1 d_2. \end{aligned} \quad (194)$$

Terms corresponding to $(d_1, d_2) > 1$ give a 0 contribution to the sum, since in that case q_1, q_2, d_1 and d_2 have a common factor, which contradicts condition $(M, N) = 1$. The sum (194) can therefore be restricted to $(d_1, d_2) = 1$, and the sum over t is now a sum over t' , where $t = d_1 d_2 t'$. Let us denote by P the product of the prime factors of q_1 that

do not divide c and by P' the product of the prime factors of q_2 that do not divide c . Now

$$(c, P) = (c, P') = (P, P') = 1. \quad (195)$$

If p is a prime dividing d_1 and $c = (q_1, q_2)$, then p divides $d_1 = (q_1, t)$. Since it divides c it also divides q_2 , so $p|(q_2, t)$ and $(d_1, d_2) \neq 1$, which is impossible. So the prime divisors of d_1 have to be taken among the divisors of P , and in the same way the prime divisors of d_2 have to be taken among the divisors of P' . Similarly, we can check that if p is a prime divisor of c which divides t' , p divides $d_1 = (q_1, t)$, so d_1 would contain a prime factor of c , which is impossible; and if p is a prime factor of P or P' , p divides both d_1 and d_2 . So the sum over t' must be restricted to t' which do not contain any prime divisor of q_1 or q_2 . As $\mu(ab) = \mu(a)\mu(b)$ for co-prime a and b , one gets

$$F(r_1, r_2) = \frac{1}{q_1 q_2} \sum_{d_1, d_2, t'} d_1 d_2 \frac{\mu(d_1)\mu(d_2)\mu(t')}{d_1^2 d_2^2 t'^2}, \quad (196)$$

where the sum is taken over all d_1, d_2, t' verifying $d_1|(P, r_1), d_2|(P', r_2), t' \nmid q_1, t' \nmid q_2$. Using the identity

$$\prod_{p|k} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right) = \sum_{\delta|k} \frac{\mu(\delta)}{\delta^s}, \quad (197)$$

we get

$$\begin{aligned} F(r_1, r_2) &= \frac{1}{q_1 q_2} \prod_{p|q_1, p \nmid q_2} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right) \prod_{p|(P, r_1)} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \prod_{p|(P', r_2)} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \\ &= \prod_{\text{all } p} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right) \alpha(r_1, r_2) = \frac{6}{\pi^2} \alpha(r_1, r_2), \end{aligned} \quad (198)$$

where

$$\alpha(r_1, r_2) = \frac{1}{q_1 q_2 \prod_{p|\text{lcf}(q_1, q_2)} (1 - 1/p^2)} \prod_{p|(q_1, r_1), p \nmid c} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \prod_{p|(q_2, r_2), p \nmid c} \left(1 - \frac{1}{p}\right), \quad (199)$$

and $\text{lcf}(q_1, q_2)$ is the least common factor of q_1, q_2 ($\text{lcf}(q_1, q_2) = q_1 q_2 / c$).

It is also instructive to check directly that $\alpha(r_1, r_2)$ are normalized correctly

$$\sum_{\substack{r_i \bmod q_i \\ (r_1, r_2, c)=1}} \alpha(r_1, r_2) = 1, \quad (200)$$

where as above $c = (q_1, q_2)$. We use once more the inclusion-exclusion principle

$$\sum_{\substack{r_i \bmod q_i \\ (r_1, r_2, c)=1}} f(r_1, r_2) = \sum_{t|c} \mu(t) \sum_{\substack{r_i \bmod q_i \\ t|r_i}} f(r_1, r_2). \quad (201)$$

If we set

$$D = q_1 q_2 \prod_{p | \text{lcf}(q_1, q_2)} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right), \quad (202)$$

we get, with (199) and (201),

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{r_i \bmod q_i \\ (r_1, r_2, c)=1}} \alpha(r_1, r_2) &= \frac{1}{D} \sum_{t|c} \mu(t) \sum_{t|r_1} \sum_{t|r_2} \sum_{\delta_1 | (P, r_1)} \frac{\mu(\delta_1)}{\delta_1} \sum_{\delta_2 | (P', r_2)} \frac{\mu(\delta_2)}{\delta_2} \\ &= \frac{1}{D} \sum_{t|c} \mu(t) \sum_{\delta_1 | P} \sum_{\delta_2 | P'} \sum_{t\delta_1 | r_1} \sum_{t\delta_2 | r_2} \frac{\mu(\delta_1)}{\delta_1} \frac{\mu(\delta_2)}{\delta_2} \\ &= \frac{1}{D} q_1 q_2 \sum_{t|c} \frac{\mu(t)}{t^2} \sum_{\delta_1 | P} \frac{\mu(\delta_1)}{\delta_1^2} \sum_{\delta_2 | P'} \frac{\mu(\delta_2)}{\delta_2^2}. \end{aligned} \quad (203)$$

Here we have used the fact that if $t|c$ and $\delta|P$, t and δ have no common factor. In the above sums it is always understood that the summation over r_i goes only from $r_i = 0$ to $q_i - 1$. But the last sum in Eq. (203) exactly equals D because $c P P' = \text{lcf}(q_1, q_2)$ and Eq. (200) holds.

Appendix B

In the same way one can compute the mean value of η defined in Eq. (155),

$$\begin{aligned} \langle \eta \rangle &= \sum_{\substack{r_i \bmod q_i \\ (r_1, r_2, c)=1}} \eta(r_1, r_2) \alpha(r_1, r_2) = \frac{8}{\pi^2 D} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{t|c} \mu(t) \\ &\quad \sum_{t|r_1} \sum_{t|r_2} \sum_{\delta_1 | (P, r_1)} \sum_{\delta_2 | (P', r_2)} \frac{\mu(\delta_1)}{\delta_1} \frac{\mu(\delta_2)}{\delta_2} \sin^2 \left(\pi n \frac{r_1}{q_1} \right) \sin^2 \left(\pi n \frac{r_2}{q_2} \right). \end{aligned} \quad (204)$$

Since

$$\sum_{t\delta|r} \sin^2 \pi n \frac{r}{q} = \frac{q}{2t\delta} (1 - \delta_{nt\delta, q}), \quad (205)$$

one obtains

$$\begin{aligned} \langle \eta \rangle &= \frac{2q_1 q_2}{\pi^2 D} \sum_{t|c} \frac{\mu(t)}{t^2} \sum_{\delta_1 | P} \frac{\mu(\delta_1)}{\delta_1^2} \sum_{\delta_2 | P'} \frac{\mu(\delta_2)}{\delta_2^2} \\ &\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} (1 - \delta_{nt\delta_1, q_1}) (1 - \delta_{nt\delta_2, q_2}). \end{aligned} \quad (206)$$

The sum over n includes 4 terms. The first is the sum over all n ,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}. \quad (207)$$

The second sum has the restriction that $n = (q_1/t\delta_1)m$ and

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \delta_{nt\delta_1, q_1} = \frac{\pi^2}{6} \left(\frac{t\delta_1}{q_1} \right)^2. \quad (208)$$

The third sum is the same but with the substitution $1 \rightarrow 2$. The fourth sum incorporates two restrictions, $nt\delta_1 \equiv 0 \pmod{q_1}$ and $nt\delta_2 \equiv 0 \pmod{q_2}$. Remembering the definition of P and P' (see (195)) one concludes that in this last case the restriction is $n = (cPP'/(t\delta_1\delta_2))m$ and

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \delta_{nt\delta_1, q_1} \delta_{nt\delta_2, q_2} = \frac{\pi^2}{6} \left(\frac{t\delta_1\delta_2}{cPP'} \right)^2. \quad (209)$$

Performing the summation over δ_i and t in Eq. (206) one notes that all three last sums will have as a factor

$$\sum_{\delta_1|P} \mu(\delta_1) \quad \text{or} \quad \sum_{\delta_2|P} \mu(\delta_2). \quad (210)$$

But for any $K \geq 2$ we have

$$\sum_{\delta|K} \mu(\delta) = 0. \quad (211)$$

Since q_1 and q_2 are greater than 1, it is impossible that simultaneously $c = P = 1$, or $c = P' = 1$, the terms (210) equal zero. Therefore only the term (207) survives and (206) gives

$$\langle \eta \rangle = \frac{1}{3D} q_1 q_2 \sum_{t|c} \frac{\mu(t)}{t^2} \sum_{\delta_1|P} \frac{\mu(\delta_1)}{\delta_1^2} \sum_{\delta_2|P'} \frac{\mu(\delta_2)}{\delta_2^2}. \quad (212)$$

These sums are exactly equal to D and finally we get

$$\langle \eta \rangle = \frac{1}{3}. \quad (213)$$

References

1. Bohigas, O.: Chaos and Quantum Mechanics. In: Giannoni, M.-J., Voros, A. and Zinn-Justin, J. (eds.), *Les Houches Summer School Lectures LII, 1989*, Amsterdam: North Holland, 1991, p. 87
2. Mehta, M.L.: *Random Matrix Theory*. New York: Springer, 1990
3. Bohigas, O., Giannoni, M.-J., Schmit, C.: Characterization of chaotic quantum spectra and universality of level fluctuation laws. *Phys. Rev. Lett.* **52**, 1 (1984)
4. Berry, M. V., Tabor, M.: Level clustering in the regular spectrum. *Proc. Roy. Soc. Lond.* **356**, 375 (1977)
5. Andreev, A. V., Altshuler, B.L.: Spectral Statistics beyond Random Matrix Theory. *Phys. Rev. Lett.* **75**, 902 (1995);
Agam, O., Altshuler, B.L., Andreev, A.V.: Spectral Statistics from disordered to chaotic systems. *Phys. Rev. Lett.* **75**, 4389 (1995)
6. Bogomolny, E. B., Keating, J.P.: Gutzwiller's Trace formula and Spectral Statistics: Beyond the diagonal approximation. *Phys. Rev. Lett.* **77**, 1472 (1996)
7. Marklof, J.: Spectral Form Factors of Rectangle Billiards. *Commun. Math. Phys.* **199**, 169 (1998)
8. Balian, R., Bloch, C.: Distribution of eigenfrequencies for the wave equation in a finite domain: Eigenfrequency density oscillations. *Ann. Phys. (N.Y.)* **69**, 76 (1972)

9. Gutzwiller, M. C.: Chaos and Quantum Mechanics. In: Giannoni, M.-J., Voros, A. and Zinn-Justin, J. (eds.), *Les Houches Summer School Lectures LII, 1989* Amsterdam: North Holland, 1991, p. 201
10. Berry, M. V., Tabor, M.: Closed orbits and the regular bound spectrum. *Proc. Roy. Soc. Lond.* **349**, 101 (1976), *ibid* *J. Phys. A Math. Gen.* **10**, 371 (1977)
11. Richens, P. J., Berry, M. V.: Pseudointegrable systems in classical and quantum mechanics. *Physica D* **2**, 495 (1981)
12. Shudo, A., Shimizu, Y.: Extensive numerical study of spectral statistics for rational and irrational polygonal billiards. *Phys. Rev. E* **47**, 54 (1993)
13. Bogomolny, E. B., Gerland, U., Schmit, C.: Models of intermediate spectral statistics. *Phys. Rev. E* **59**, 1315 (1999)
14. Schklovskii, B.I. *et al.*: Statistics of spectra of disordered systems near the metal-insulator transition. *Phys. Rev. B* **47**, 11487 (1993)
15. Bogomolny, E. B., Pavloff, N., Schmit, C.: Diffractive corrections in the trace formula for polygonal billiards. *Phys. Rev. E* **61**, 3689 (2000)
16. Berry, M. V.: Semiclassical theory of spectral rigidity. *Proc. Roy. Soc. A* **400**, 229 (1985)
17. Veech, W. A.: Teichmüller curves in moduli space, Eisenstein series and an application to triangular billiards. *Invent. Math.* **97** (1989), 553–583
18. Vorobets, Y. B.: Planar structures and billiards in rational polygons: The Veech alternative. *Russ. Math. Surv.* **51**, 5 (1996), 779–817
19. Keller, J.P.: Geometrical theory of diffraction. *J. Opt. Soc. Am.* **52**, 116 (1962)
20. Vattay, G., Wirzba, A., Rosenqvist, P.E.: Periodic orbit theory of diffraction. *Phys. Rev. Lett.* **73**, 2304 (1994)
21. Pavloff, N., Schmit, C.: Diffractive orbits in quantum billiards. *Phys. Rev. Lett.* **75**, 61 (1995); Erratum **75**, 3779 (E) (1995)
22. Aharonov, Y., Bohm, D.: Significance of electromagnetic potentials in the quantum theory. *Phys. Rev.* **115**, 485 (1959)
23. Bogomolny, E. B.: Action correlations in integrable systems. *Nonlinearity* **13**, 947 (2000)
24. Bogomolny, E. B.: New Directions in Quantum Chaos. In: *Proc. of the International School of Physics “Enrico Fermi”, course, CXLIII*, eds. Casati, G., Guarneri, I., Smilansky, U., Amsterdam, Oxford, Tokyo, Washinton DC: IOS press, 2000, p. 333
25. Bogomolny, E. B., Gerland, U., Schmit, C.: Singular statistics. *Phys. Rev. E* **63** (2001) 036 206, pp. 1–16
26. Bogomolny, E. B.: Quantum Dynamics of Simple Systems. In: *The Forty Fourth Scottish Universities Summer School in Physics*, Oppo, G.L., Barnett, S.M., Riis, E., Wilkinson, M. (eds.), Bristol and Philadelphia: Institute of physics publishing, August 1994, p. 17
27. Masur, H.: *Holomorphic Functions and Moduli, Vol. I (Berkeley, CA, 1986)*, Math. Sci. Research Inst. Publ. 10, New York–Berlin: Springer-Verlag, 1988, pp. 215–228
28. Masur, H.: The growth rate of trajectories of a quadratic differential. *Ergod. Theory of Dynam. Syst.* **10**, 151–176 (1990)
29. Terras, A.: *Harmonic analysis on symmetric spaces and applications, I*. New York–Berlin: Springer-Verlag, 1985, p. 206
30. Jager, H., Lenstra jr., H. W.: Linear independance of cosecant values. *Nieuw Archief Wisk* (3) **23**, 131–144 (1975)
31. Girstmair, K.: Character coordinates and annihilators of cyclotomic numbers. *Manuscripta Math.* **59**, 375–389 (1987)
32. Bogomolny, E. B., Gerland, U., Schmit, C.: Short-range plasma model for intermediate spectral statistics. *Europ. Phys. J. B* **19**, 121–132 (2001)
33. Casati, G., Prosen, T.: Quantum chaos in triangular billiards. Unpublished

Communicated by P. Sarnak

Article 2

Nearest-Neighbor Distribution for Singular Billiards

Nearest-neighbor distribution for singular billiards

E. Bogomolny, O. Giraud, and C. Schmit

Laboratoire de Physique Théorique et Modèles Statistiques, Université de Paris XI, Bâtiment 100, 91405 Orsay Cedex, France

(Received 19 December 2001; published 17 May 2002)

The exact computation of the nearest-neighbor spacing distribution $P(s)$ is performed for a rectangular billiard with a pointlike scatterer inside for periodic and Dirichlet boundary conditions, and it is demonstrated that when $s \rightarrow \infty$ this function decreases exponentially. Together with the results of Bogomolny, Gerland, and Schmit [Phys. Rev. E **63**, 036206 (2001)], it proves that spectral statistics of such systems is of intermediate type characterized by level repulsion at small distances and exponential fall-off of the nearest-neighbor distribution at large distances. The calculation of the n th nearest-neighbor spacing distribution $P_n(s)$ and its asymptotics is performed as well for any boundary conditions.

DOI: 10.1103/PhysRevE.65.056214

PACS number(s): 05.45.-a, 03.65.Sq, 05.40.-a

I. INTRODUCTION

The statistical analysis of quantum energy levels for a given system in the semiclassical limit is a well-studied feature in the theory of spectral statistics [1–3]. The main conjectures in this field are as follows.

(i) The Berry-Tabor conjecture [4]: generic integrable systems obey Poisson statistics, which implies that their energy levels behave as independent random variables.

(ii) The Bohigas-Giannoni-Schmit conjecture [5]: generic chaotic systems follow the Wigner-Dyson distributions of random matrix theory (see [2]).

There is an enormous amount of numerical evidence that many physical systems do agree with these two main level statistics. Partial analytical results support these conjectures for integrable rectangular billiards [6] and quantum chaotic systems [7–10].

However, there exist systems which are neither integrable nor chaotic and their spectral statistics do not follow any of the above leading models. In many cases their statistics have features intermediate between the Poisson statistics and that of random matrix ensembles and for this reason they are called “intermediate statistics” [11–13]. For the first time this type of behavior was clearly observed numerically for the three-dimensional Anderson model at the metal-isolator transition point [11], and later it was argued [14] that spectral statistics of diffractive and pseudointegrable systems is also of intermediate type.

To study precisely the statistical behavior of the energy levels of quantum systems, one usually introduces different functions that characterize the statistics [2]. The most important quantity for our purpose is the distribution of nearest-neighbor spacings, $P(s)$, which is the probability that two levels are separated by a distance s with no levels inside this interval.

For the Poisson statistics, the nearest-neighbor distribution takes the following particularly simple form:

$$P(s) = \exp(-s) \quad (1)$$

and it is characterized by (i) the absence of level repulsion [$P(0) \neq 0$] and (ii) exponential decay for a large distance.

For standard random matrix ensembles, the nearest-neighbor spacing distributions are given by complicated expressions [2] but their main features can be seen from the Wigner surmise,

$$P(s) = a_\beta s^\beta \exp(-c_\beta s^2), \quad (2)$$

where $\beta = 1, 2$, and 4 corresponds, respectively, to orthogonal, unitary, or symplectic ensembles, and a_β and c_β are constants determined by the normalization conditions. Its main properties are (i) level repulsion, $P(0) = 0$, and (ii) a very quick decrease at large values of s , $P(s) \propto \exp(-cs^2)$ when $s \rightarrow \infty$.

We call spectral statistics of intermediate type if they have the following hybrid properties (cf. [11,14]): (i) they exhibit the level repulsion, $P(0) = 0$, as for standard random matrix ensembles, and (ii) they have exponential decay at large s , $P(s) \propto \exp(-cs)$ when $s \rightarrow \infty$, similarly to the Poisson statistics. Little is known analytically for systems with intermediate statistics, though it is possible to write down models which will have this type of statistics [15,12].

The rectangular billiard with a pointlike scatterer inside belongs to the class of diffractive systems and is one of the models which is supposed to have intermediate statistics [14,13]. Without the scatterer this model is an integrable system, and when the ratio a^2/b^2 of the sides of the rectangle is a “good” irrational number its quantum energy levels $\{e_n\}$ obey the Poisson statistics [4,6]. The addition of a δ -function scatterer

$$V = \lambda \delta(\vec{x} - \vec{x}_0) \quad (3)$$

inside the rectangle corresponds to a rank-1 perturbation, and the new quantum energy levels E of the perturbed rectangular billiard will obey the following quantization condition [16,17]:

$$\lambda \sum_n \frac{|\psi_n^{(0)}(\vec{x}_0)|^2}{E - e_n} = 1, \quad (4)$$

where $\psi_n^{(0)}$ and e_n are the eigenfunctions and eigenvalues of the unperturbed rectangular billiard. Similar equations appear in different models. In particular, the quantization con-

dition for the star graphs can be transformed to this form [18]. All our results are applicable without changes in such cases as well.

Rank-1 perturbations have been studied in the context of ballistic motion of particles in regular [17] or chaotic cavities [19], and in the context of random matrix theory [20]. When a δ -function potential (3) is added to a chaotic system with random matrix statistics, it has been proved [21] that the new eigenvalues in Eq. (4) are also distributed according to the same statistics. In the chaotic case, the universal part of the spectral statistics is not changed by finite-rank perturbation. On the contrary, when the unperturbed system is integrable, the perturbation (3) changes dramatically its spectral statistics [17,13].

In Ref. [13], the two-point correlation function of a rectangular billiard with a small-size scatterer inside [described by the potential (3)] has been computed analytically. One of the conclusions of this paper was that spectral statistics of such singular billiards do have level repulsion. For billiards with periodic boundary conditions, the two-point correlation function and, consequently, the nearest-neighbor distribution vanish linearly at small distances with the slope independent of the coupling constant,

$$P(s) \underset{s \rightarrow 0}{\sim} \frac{\pi\sqrt{3}}{2} s. \quad (5)$$

For billiards with Dirichlet boundary conditions, the small- s behavior of the two-point correlation function and the nearest-neighbor distribution is different: one has (see [13])

$$P(s) \underset{s \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{8\pi^3} s \ln^4 s. \quad (6)$$

The main purpose of this paper is to compute analytically the nearest-neighbor spacing distributions for this model and demonstrate that for any boundary conditions they decrease exponentially at large separation. Together with the results of Ref. [13] regarding the existence of level repulsion, it will furnish the proof that spectral statistics of these systems are of intermediate type.

The plan of the paper is as follows. In Sec. II, we generalize the formalism used in [13] to describe the nearest-neighbor spacing distribution for a billiard with a pointlike scatterer for periodic and Dirichlet boundary conditions. Though the resulting formulas are explicit and exact, they are quite cumbersome, and in Sec. III we study the asymptotic behavior of $P(s)$ for large s . It is demonstrated that in all cases the nearest-neighbor distribution has an exponential tail at large distances thus proving the intermediate character of the spectral statistics of singular billiards. In Sec. IV, the n th nearest-neighbor spacing distributions for these billiards with periodic and Dirichlet boundary conditions are computed analytically and their large distance asymptotics are found as well. In the Appendix, we present certain technical details of the computation of necessary integrals.

II. THE GENERAL FORMALISM

A. Preliminary computations

In this section, our aim is to find analytical expressions for the nearest-neighbor spacing distribution of the solutions, E , of the following equation:

$$\lambda \sum_{j=1}^N \frac{r_j}{E - e_j} = 1, \quad (7)$$

where e_j , $j=1, \dots, N$ are independent random variables with a uniform distribution $d\mu(e)$:

$$d\mu(e) = \begin{cases} \frac{1}{2W} de & \text{if } -W \leq e \leq W \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases} \quad (8)$$

and r_j are positive constants with mean value 1,

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N r_n = 1. \quad (9)$$

This normalization condition permits us to introduce conveniently the coupling constant λ .

In general, this equation describes zeros of a meromorphic function whose poles are assumed to be independent random variables, and it can correspond to different physical problems (see, e.g., [22]). In this paper, we prefer to consider it as the quantization condition of rectangular (or more general integrable) billiards with a small-size impurity inside [16,17]. To ensure that energy levels of unperturbed billiards behave as independent random variables, it is necessary to assume that the ratio of squares of the sides of the rectangle, a and b , is an irrational number badly approximated by a rational (that is, a diophantine number) [6] with the following property:

$$\left| \frac{a^2}{b^2} - \frac{m}{n} \right| > \frac{C}{n^k} \quad (10)$$

for all integers m , n , and some $k \geq 2$.

The residues, r_n , depend on boundary conditions. For quantum problems with periodic boundary conditions, $r_n = 1$. For Dirichlet conditions,

$$r_{mn} = 4 \sin^2 \left(\frac{\pi}{a} m x_0 \right) \sin^2 \left(\frac{\pi}{b} n y_0 \right), \quad (11)$$

where x_0, y_0 are coordinates of the singular scatterer. When the ratios x_0/a and y_0/b are noncommensurable irrational numbers and $m, n \rightarrow \infty$, r_{mn} can be considered as independent random variables,

$$r_{mn} = 4 \sin^2 \phi_1 \sin^2 \phi_2 \quad (12)$$

with angles ϕ_i uniformly distributed between 0 and $\pi/2$.

When both ratios x_0/a and y_0/b are rational numbers,

$$\frac{x_0}{a} = \frac{p_1}{q_1}, \quad \frac{y_0}{b} = \frac{p_2}{q_2} \quad (13)$$

with coprime integers (p_i, q_i) , the residues (11) only depend on $m \bmod q_1$ and $n \bmod q_2$ and there is only a finite number of residues determined by q_i angles ϕ_i in Eq. (12) (see [13] for more detail),

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \pi \frac{k_1}{q_1} \quad \text{with } k_1 = 0, 1, \dots, q_1 - 1, \\ \phi_2 &= \pi \frac{k_2}{q_2} \quad \text{with } k_2 = 0, 1, \dots, q_2 - 1. \end{aligned} \quad (14)$$

All our formulas below remain valid for general r_n .

Obviously there are N solutions E_j of Eq. (7) since each interval $]e_i, e_{i+1}[$ contains one and only one of these solutions. We are interested in the nearest-neighbor distribution, $P(s)$, that is the probability that two energy levels E_i and E_j are neighbors separated by a distance s . In our case, it is the probability that two solutions E_i and E_j of Eq. (7) are separated by one and only one unperturbed level e_k , and that $|E_i - E_j| = s$. Let us compute at first the probability $P(E_1, E_2)$ that two given energy levels E_1 and E_2 are neighbors. Assuming for instance that $E_2 < E_1$, $P(E_1, E_2)$ is the probability that that one solution of Eq. (7) equals E_1 , another one equals E_2 , and that there exists $i, 1 \leq i \leq N$, such that

$$e_i \in]E_2, E_1[, \quad \forall j \neq i, \quad e_j \notin]E_2, E_1[. \quad (15)$$

As it is supposed that e_k are independent random variables with a uniform distribution,

$$\begin{aligned} P(E_1, E_2) &= \int_{-W}^W \prod_{k=1}^N \frac{de_k}{2W} \rho(E_1) \rho(E_2) \\ &\times \sum_{i=1}^N \chi(e_i) \prod_{j \neq i} [1 - \chi(e_j)], \end{aligned} \quad (16)$$

where $\chi(e)$ is the characteristic function of the interval $]E_2, E_1[$ equal to 1 if e belongs to $]E_2, E_1[$, and to 0 otherwise, and ρ is the density of the solutions E_i ,

$$\rho(E) = \sum_{i=1}^N \delta(E - E_i). \quad (17)$$

It is convenient to rewrite these formulas in a more symmetric way,

$$P(E_1, E_2) = \sum_{\{\sigma_k\}} \int \prod_{k=1}^N d\mu_{\sigma_k}(e_k) \rho(E_1) \rho(E_2), \quad (18)$$

where variables σ_k , $k = 1, \dots, N$ take two values, 0, 1, and we introduce two different measures,

$$\begin{aligned} \int d\mu_0(e) \phi(e) &= \frac{1}{2W} \int_{-W}^W \chi(e) \phi(e) de \\ &= \frac{1}{2W} \int_{E_2}^{E_1} \phi(e) de \end{aligned} \quad (19)$$

and

$$\begin{aligned} \int d\mu_1(e) \phi(e) &= \frac{1}{2W} \int_{-W}^W [1 - \chi(e)] \phi(e) de \\ &= \frac{1}{2W} \left(\int_{-W}^W - \int_{E_2}^{E_1} \right) \phi(e) de. \end{aligned} \quad (20)$$

The summation in Eq. (18) is performed over all sequences σ_k which contain one zero and $N-1$ ones.

Because $\{E_i\}$ are solutions of Eq. (7), the density of states (17) can be rewritten under the form (cf. [13])

$$\rho(E) = \delta \left(\sum_{i=1}^N \frac{r_j}{E - e_j} - \frac{1}{\lambda} \right) \sum_{k=1}^N \frac{r_k}{(E - e_k)^2}. \quad (21)$$

Representing the δ function by a Fourier integral, one gets

$$\begin{aligned} \rho(E) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\alpha}{2\pi} \exp \left[i\alpha \left(\sum_{i=1}^N \frac{r_j}{E - e_j} - \frac{1}{\lambda} \right) \right] \\ &\times \sum_{k=1}^N \frac{r_k}{(E - e_k)^2} \end{aligned} \quad (22)$$

and finally the probability (16) can be put under the form

$$\begin{aligned} P(E_1, E_2) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\alpha_1 d\alpha_2}{4\pi^2} \sum_{\{\sigma_k\}} \int \prod_{k=1}^N d\mu_{\sigma_k}(e_k) e^{-i(\alpha_1 + \alpha_2)/\lambda} \\ &\times \sum_{k_1, k_2=1}^N \frac{r_{k_1} r_{k_2}}{(E_1 - e_{k_1})^2 (E_2 - e_{k_2})^2} \\ &\times \prod_{j_1, j_2=1}^N \exp \left(i\alpha_1 \frac{r_{j_1}}{E_1 - e_{j_1}} + i\alpha_2 \frac{r_{j_2}}{E_2 - e_{j_2}} \right). \end{aligned} \quad (23)$$

Let us introduce the following functions:

$$f_{\sigma}(\alpha_1, \alpha_2) = \int d\mu_{\sigma}(e) \exp \left(i\alpha_1 \frac{1}{E_1 - e} + i\alpha_2 \frac{1}{E_2 - e} \right),$$

$$\begin{aligned} \Psi_{j\sigma}(\alpha_1, \alpha_2) &= \int d\mu_{\sigma}(e) \frac{1}{(E_j - e)^2} \\ &\times \exp \left(i\alpha_1 \frac{1}{E_1 - e} + i\alpha_2 \frac{1}{E_2 - e} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_{\sigma}(\alpha_1, \alpha_2) &= \int d\mu_{\sigma}(e) \frac{1}{(E_1 - e)^2 (E_2 - e)^2} \\ &\times \exp \left(i\alpha_1 \frac{1}{E_1 - e} + i\alpha_2 \frac{1}{E_2 - e} \right). \end{aligned} \quad (24)$$

The nearest-neighbor distribution can be expressed through these functions in the following way:

$$P(E_1, E_2) = \sum_{\{\sigma_k\}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\alpha_1 d\alpha_2}{4\pi^2} \left(\sum_j r_j^2 g_{\sigma_j}(\alpha r_j) \prod_{k \neq j} f_{\sigma_k}(\alpha r_k) + \sum_{j \neq k} r_j r_k \Psi_{1\sigma_j}(\alpha r_j) \Psi_{2\sigma_k}(\alpha r_k) \prod_{l \neq j, k} f_{\sigma_l}(\alpha r_l) \right) e^{-i(\alpha_1 + \alpha_2)/\lambda}. \quad (25)$$

Here and below when it will not lead to a confusion we use the notation $f(\alpha)$ for a function of two variables $f(\alpha_1, \alpha_2)$ and $f(\alpha r)$ instead of $f(\alpha_1 r, \alpha_2 r)$. This formula is valid for all sequences of σ_k . The functions (24) with index $\sigma=0$ correspond to an unperturbed level between E_2 and E_1 , and the functions with index $\sigma=1$ correspond to an unperturbed level outside $]E_2, E_1[$. Therefore, to describe the nearest-neighbor distribution, the summation should be done over N possible sequences containing only one zero.

The functions $\Psi_{j\sigma}$ and g_σ are related to f_σ by the relations

$$\begin{aligned} \Psi_{j\sigma}(\alpha_1, \alpha_2) &= -\frac{\partial^2}{\partial \alpha_j^2} f_\sigma(\alpha_1, \alpha_2), g_\sigma(\alpha_1, \alpha_2) \\ &= \frac{\partial^4}{\partial \alpha_1^2 \partial \alpha_2^2} f_\sigma(\alpha_1, \alpha_2). \end{aligned} \quad (26)$$

Therefore, in order to compute $P(E_1, E_2)$ it is necessary to find only f_σ . Let us introduce the functions

$$\begin{aligned} I_\sigma(\alpha_1, \alpha_2) &= 2W \int d\mu_\sigma(e) \left[1 - \exp\left(i \frac{\alpha_1}{E_1 - e} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + i \frac{\alpha_2}{E_2 - e} \right) \right], \end{aligned} \quad (27)$$

which are related to our basic functions f_σ as follows:

$$\begin{aligned} f_1(\alpha_1, \alpha_2) &= 1 - \frac{\omega}{2W} - \frac{1}{2W} I_1(\alpha_1, \alpha_2), \\ f_0(\alpha_1, \alpha_2) &= \frac{\omega}{2W} - \frac{1}{2W} I_0(\alpha_1, \alpha_2), \end{aligned} \quad (28)$$

where $\omega = E_1 - E_2$ is the difference of energies (we recall that we have assumed $E_2 < E_1$).

The integral defining $I_1(\alpha)$ can be split into two parts,

$$\begin{aligned} I_1(\alpha_1, \alpha_2) &= \left(\int_{-W}^{E_2} + \int_{E_1}^W \right) \\ &\quad \times \left[1 - \exp\left(i \frac{\alpha_1}{E_1 - e} + i \frac{\alpha_2}{E_2 - e} \right) \right] de \\ &= J_1(\alpha_1, \alpha_2) + j(\alpha_1, \alpha_2), \end{aligned} \quad (29)$$

where

$$\begin{aligned} J_1(\alpha_1, \alpha_2) &= \left(\int_{-\infty}^{E_2} + \int_{E_1}^{\infty} \right) \\ &\quad \times \left[1 - \exp\left(i \frac{\alpha_1}{E_1 - e} + i \frac{\alpha_2}{E_2 - e} \right) \right] de \end{aligned} \quad (30)$$

and

$$\begin{aligned} j(\alpha_1, \alpha_2) &= - \left(\int_{-\infty}^{-W} + \int_W^{\infty} \right) \\ &\quad \times \left[1 - \exp\left(i \frac{\alpha_1}{E_1 - e} + i \frac{\alpha_2}{E_2 - e} \right) \right] de. \end{aligned} \quad (31)$$

For convenience, we define the function $J_0(\alpha) = I_0(\alpha)$ so that from Eq. (27)

$$J_0(\alpha_1, \alpha_2) = \int_{E_2}^{E_1} \left[1 - \exp\left(i \frac{\alpha_1}{E_1 - e} + i \frac{\alpha_2}{E_2 - e} \right) \right] de. \quad (32)$$

The integral (31) defining $j(\alpha)$ has no singularity inside the integration region, and as was demonstrated in [13], it is sufficient to take into account only terms linear in α and to ignore the difference between E_1 and E_2 (i.e., set $E_1 \approx E_2 \approx E$). In this approximation,

$$j(\alpha_1, \alpha_2) = i(\alpha_1 + \alpha_2) \ln \frac{W - E}{W + E}. \quad (33)$$

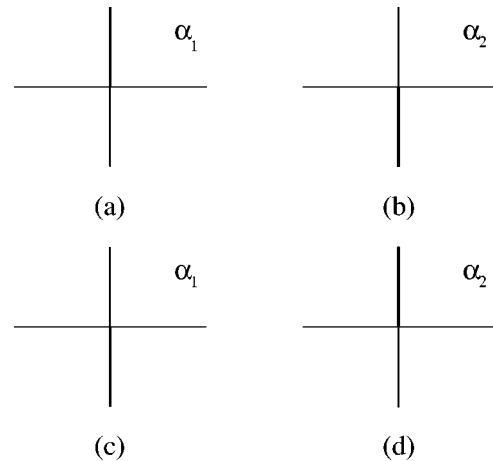


FIG. 1. The cuts in complex planes of α_1 and α_2 for functions $\tilde{J}_1$ and ϕ_1 (a),(b); $\tilde{J}_0$ and ϕ_0 (c),(d).

On the contrary, the functions $J_\sigma(\alpha)$ are quite cumbersome. One can easily check that they depend only on the difference of energies, $\omega = E_1 - E_2$, and that

$$J_\sigma(\alpha) = \omega \tilde{J}_\sigma\left(\frac{\alpha}{\omega}\right), \quad (34)$$

where the functions $\tilde{J}_\sigma(\alpha)$ are defined by Eqs. (30) and (32) with $E_1 = 1$ and $E_2 = 0$.

In the Appendix, it is demonstrated that these functions obey the differential equation

$$(\partial_1 - \partial_2) \tilde{J}_\sigma(\alpha_1, \alpha_2) = e^{i(\alpha_1 - \alpha_2)} \phi_\sigma(\alpha_1, \alpha_2), \quad (35)$$

where ∂_i denotes the derivative with respect to α_i , and the functions $\phi_\sigma(\alpha)$ at real α are given by Eqs. (A7) and (A10). From this equation it follows (see the Appendix for details) that the function $\tilde{J}_1(\alpha)$ is an analytical function of two complex variables α_1, α_2 with the cuts as in Figs. 1(a) and 1(b) given by the following expression:

$$\begin{aligned} \tilde{J}_1(\alpha_1, \alpha_2) = & \int_{-1}^{\infty} \frac{dt}{t^2} (1 - e^{i(\alpha_1 + \alpha_2)t}) \\ & + \int_0^{\alpha_1} e^{i(2t - \alpha_1 - \alpha_2)} \phi_1(t, \alpha_1 + \alpha_2 - t) dt, \end{aligned} \quad (36)$$

where $\oint$ denotes the principal part of the integral.

The function $\tilde{J}_0(\alpha)$ is an analytical function in a region indicated in Figs. 1(c) and 1(d) with the integral representation

$$\begin{aligned} \tilde{J}_0(\alpha_1, \alpha_2) = & \int_1^{\infty} \frac{dt}{t^2} (1 - e^{-i(\alpha_1 + \alpha_2)t}) \\ & + \int_0^{\alpha_1} e^{i(2t - \alpha_1 - \alpha_2)} \phi_0(t, \alpha_1 + \alpha_2 - t) dt. \end{aligned} \quad (37)$$

Exactly as was done in [13], one can prove that functions $\Psi_{i\sigma}, g_\sigma$ defined in Eqs. (24) can be expressed through the functions ϕ_σ as follows:

$$\begin{aligned} g_\sigma(\alpha_1, \alpha_2) = & \frac{1}{2W\omega^2} (\partial_1 - \partial_2) \left[e^{i[(\alpha_1 - \alpha_2)/\omega]} \phi_\sigma\left(\frac{\alpha_1}{\omega}, \frac{\alpha_2}{\omega}\right) \right], \\ \Psi_{1\sigma}(\alpha_1, \alpha_2) = & \frac{1}{2W} e^{i[(\alpha_1 - \alpha_2)/\omega]} \partial_1 \phi_\sigma\left(\frac{\alpha_1}{\omega}, \frac{\alpha_2}{\omega}\right), \\ \Psi_{2\sigma}(\alpha_1, \alpha_2) = & -\frac{1}{2W} e^{i[(\alpha_1 - \alpha_2)/\omega]} \partial_2 \phi_\sigma\left(\frac{\alpha_1}{\omega}, \frac{\alpha_2}{\omega}\right). \end{aligned} \quad (38)$$

B. Nearest-neighbor spacing distribution

Using Eqs. (38), one can integrate the first term in Eq. (25) by parts and because [see Eqs. (28) and (34)]

$$(\partial_1 - \partial_2) f_\sigma(\alpha_1, \alpha_2) = -\frac{1}{2W} e^{i(\alpha_1 - \alpha_2)/\omega} \phi_\sigma\left(\frac{\alpha_1}{\omega}, \frac{\alpha_2}{\omega}\right) \quad (39)$$

one obtains

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\alpha_1 d\alpha_2}{4\pi^2} \sum_j r_j^2 g_{\sigma_j}(\alpha r_j) \left(\prod_{k \neq j} f_{\sigma_k}(\alpha r_k) \right) e^{-i(\alpha_1 + \alpha_2)/\lambda} \\ &= \frac{1}{\omega^2 (2W)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\alpha_1 d\alpha_2}{4\pi^2} \sum_{j \neq k} r_j r_k \phi_{\sigma_j}\left(\frac{\alpha}{\omega} r_j\right) \phi_{\sigma_k}\left(\frac{\alpha}{\omega} r_k\right) e^{i[(\alpha_1 - \alpha_2)/\omega](r_k + r_j)} \\ & \quad \times \left(\prod_{l \neq j, k} f_{\sigma_l}(\alpha r_l) \right) e^{-i(\alpha_1 + \alpha_2)/\lambda}. \end{aligned} \quad (40)$$

According to Eqs. (38), the second term in Eq. (25) can also be expressed through the same functions $\phi_\sigma(\alpha)$, and after the scaling of variables $\alpha \rightarrow \alpha\omega$ [cf. Eq. (34)] the nearest-neighbor distribution (25) takes the form

$$\begin{aligned} P(\omega) = & \sum_{\{\sigma_k\}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\alpha_1 d\alpha_2}{(4W\pi)^2} \sum_{j \neq k} r_j r_k \{ \phi_{\sigma_j}(\alpha r_j) \phi_{\sigma_k}(\alpha r_k) \\ & - \partial_1 \phi_{\sigma_j}(\alpha r_j) \partial_2 \phi_{\sigma_k}(\alpha r_k) \} e^{i(\alpha_1 - \alpha_2)(r_j + r_k)} \\ & \times \left(\prod_{l \neq j, k} \tilde{f}_{\sigma_l}(\alpha r_l) \right) e^{-i\omega(\alpha_1 + \alpha_2)/\lambda}, \end{aligned} \quad (41)$$

where $\tilde{f}_{\sigma_l}(\alpha) = f_{\sigma_l}(\alpha\omega)$. Using Eqs. (28), (29), and (31), one gets

$$\begin{aligned} \tilde{f}_1(\alpha_1, \alpha_2) = & 1 - \frac{\omega}{2W} \left(1 + \tilde{J}_1(\alpha_1, \alpha_2) \right. \\ & \left. + i(\alpha_1 + \alpha_2) \ln \frac{W-E}{W+E} \right), \\ \tilde{f}_0(\alpha_1, \alpha_2) = & \frac{\omega}{2W} [1 - \tilde{J}_0(\alpha_1, \alpha_2)]. \end{aligned} \quad (42)$$

Expression (41) is valid for any sequence $\{\sigma_k\} \in \{0,1\}^N$. To get the nearest-neighbor distribution, one has to sum over N sequences containing only one zero. Taking into account that in the limit $N \rightarrow \infty$ the restriction $j \neq k$ is unessential, we obtain, keeping only the dominant term,

$$P(\omega) = \frac{N^2}{4W^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\alpha_1 d\alpha_2}{(2\pi)^2} [N \langle \tilde{f}_0(\alpha r) \rangle V_{\phi_1, \phi_1}(\alpha) + V_{\phi_0, \phi_1}(\alpha) + V_{\phi_1, \phi_0}(\alpha)] \times \left(\prod_l \tilde{f}_1(\alpha r_l) \right) e^{-i\omega(\alpha_1 + \alpha_2)/\lambda}, \quad (43)$$

where the operator $V_{f,g}(\alpha)$ is defined for arbitrary functions $f(\alpha)$ and $g(\alpha)$ by the following expression:

$$V_{f,g}(\alpha) = \langle r f(\alpha r) e^{i(\alpha_1 - \alpha_2)r} \rangle \langle r g(\alpha r) e^{i(\alpha_1 - \alpha_2)r} \rangle - \left\langle \left(\frac{\partial}{\partial \alpha_1} f(\alpha r) \right) e^{i(\alpha_1 - \alpha_2)r} \right\rangle \times \left\langle \left(\frac{\partial}{\partial \alpha_2} g(\alpha r) \right) e^{i(\alpha_1 - \alpha_2)r} \right\rangle, \quad (44)$$

and $\langle f(r) \rangle$ means the mean value over all values of r ,

$$\langle f(r) \rangle = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(r_n). \quad (45)$$

Measuring the energy difference ω in the units of mean level spacing

$$s = \frac{N\omega}{2W}, \quad (46)$$

the product $\prod_l \tilde{f}_1(\alpha r_l)$ can also be simplified in the limit of large N [see Eq. (42)],

$$\prod_{l=1}^N \tilde{f}_1(\alpha r_l) \approx \exp \left[-\frac{N\omega}{2W} \left(1 + \tilde{J}_1(\alpha_1, \alpha_2) + i(\alpha_1 + \alpha_2) \ln \frac{W-E}{W+E} \right) \right]. \quad (47)$$

Introducing the renormalized coupling constant λ' ,

$$\frac{1}{\lambda'} = \frac{2W}{N\lambda} + \ln \frac{W-E}{W+E}, \quad (48)$$

we obtain the final formula for the nearest-neighbor distribution $P(s) = (2W/N)^2 P(\omega)$,

$$P(s) = e^{-s} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\alpha_1 d\alpha_2}{(2\pi)^2} \{ s[1 - \langle \tilde{J}_0(\alpha r) \rangle] V_{\phi_1, \phi_1}(\alpha) + V_{\phi_0, \phi_1}(\alpha) + V_{\phi_1, \phi_0}(\alpha) \} e^{-s[\langle \tilde{J}_1(\alpha r) \rangle + i(\alpha_1 + \alpha_2)/\lambda']}. \quad (49)$$

C. Analytical continuation

Usually, if one wants to compute an integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\alpha_1 d\alpha_2 f(\alpha_1, \alpha_2) e^{-sJ(\alpha_1, \alpha_2)}, \quad (50)$$

where $J(\alpha)$ and $f(\alpha)$ are analytical functions in a certain region, the first step is to move the integration contour as far as possible to decrease the integrand. In general, during that deformation one can either meet a saddle point or a singularity which signifies that further deformation of the contour either will increase the integrand or is not possible. If no such obstacle appears, the integral is zero.

In the case of the nearest-neighbor distribution (49), the saddle-point equation reads (taking here $r=1$)

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_1} \tilde{J}_1(\alpha_1, \alpha_2) + \frac{i}{\lambda'} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \tilde{J}_1(\alpha_1, \alpha_2) + \frac{i}{\lambda'} = 0. \quad (51)$$

In particular, these equations imply that at any saddle point,

$$\left(\frac{\partial}{\partial \alpha_1} - \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \right) \tilde{J}_1(\alpha_1, \alpha_2) = 0. \quad (52)$$

From Eqs. (A4) and (A6) it follows that this difference is proportional to $K_0(x)$ with $x = 2\sqrt{\alpha_1 \alpha_2}$. But $K_0(x)$ has no zero on the complex plane (see [23], p. 62). Therefore, our integral (49) has no saddle points and one can move the contour of integration freely. If the prefactor in (50) has no singularities in the region where $\tilde{J}_1$ is analytical, the contribution vanishes. Note that it is exactly what should be expected for physical reasons: replacing the prefactor in Eq. (49) by 1, we have to obtain the probability that there are two perturbed levels in E_2 and E_1 but no unperturbed energy levels between, which according to Eq. (7) is impossible. These considerations prove that the integral (49) with a prefactor equal to 1 or, more generally, with any prefactor analytical in the same domain as $\tilde{J}_1(\alpha)$ (and not too quickly increasing on infinity) must vanish.

These arguments allow us to simplify considerably the expression (49) for the nearest-neighbor distribution. The prefactor in Eq. (49) is

$$f(\alpha) = s[1 - \langle \tilde{J}_0(\alpha r) \rangle] V_{\phi_1, \phi_1}(\alpha) + V_{\phi_0, \phi_1}(\alpha) + V_{\phi_1, \phi_0}(\alpha). \quad (53)$$

First, as only the functions with index 0 have analytical properties different from that of $\tilde{J}_1(\alpha)$ (see Fig. 1), one can drop the first term and keep only

$$f(\alpha) = -s \langle \tilde{J}_0(\alpha r) \rangle V_{\phi_1, \phi_1}(\alpha) + V_{\phi_0, \phi_1}(\alpha) + V_{\phi_1, \phi_0}(\alpha). \quad (54)$$

Secondly, according to Eqs. (A11) and (A21),

$$\phi_0(\alpha) = -\phi_1(\alpha) + \pi[\text{sgn}(\alpha_1) - \text{sgn}(\alpha_2)] J_0(2\sqrt{-\alpha_1 \alpha_2}) \quad (55)$$

$$\tilde{J}_0(\alpha) = -\tilde{J}_1(\alpha) + \text{sgn}(\alpha_1)R(\alpha) + \text{sgn}(\alpha_2)R^\dagger(\alpha), \quad (56)$$

where the function $R(\alpha)$ is defined in Eq. (A22) and $R^\dagger(\alpha) = R^*(\alpha_2, \alpha_1)$.

When these expressions are substituted in Eq. (54), the terms with index 1 can be dropped out because they have the same analytical properties as $\tilde{J}_1(\alpha)$ and, as has been discussed above, their integrals vanish. Finally, the prefactor takes the form

$$f(\alpha) = -s[\text{sgn}(\alpha_1)\langle R(\alpha r) \rangle + \text{sgn}(\alpha_2)\langle R^\dagger(\alpha r) \rangle]V_{\phi_1, \phi_1}(\alpha) + \pi[\text{sgn}(\alpha_1) - \text{sgn}(\alpha_2)][V_{J_0, \phi_1}(\alpha) + V_{\phi_1, J_0}(\alpha)] \\ + 2\pi i \frac{\delta(\alpha_1)}{\alpha_2 + i\epsilon} (\langle e^{-i\alpha_2 r} \rangle)^2 - 2\pi i \frac{\delta(\alpha_2)}{\alpha_1 - i\epsilon} (\langle e^{i\alpha_1 r} \rangle)^2, \quad (57)$$

where J_0 is the Bessel function $J_0(2\sqrt{-\alpha_1\alpha_2})$. The last term in this equation appears from the differentiation of $[\text{sgn}(\alpha_1) - \text{sgn}(\alpha_2)]$ in Eq. (44). The resulting δ function allows us to take the remaining terms at small α . We also write $\alpha_{1,2} \mp i\epsilon$, where $\epsilon \rightarrow 0^+$, to recall the region where the functions are defined.

When this expression is substituted in Eq. (49) one gets the final formula for the nearest-neighbor distribution, which can be conveniently written as a sum of three terms,

$$P(s) = \frac{e^{-s}}{4\pi^2} [A(s) + B(s) + C(s)], \quad (58)$$

where

$$A(s) = -s \int_0^\infty d\alpha_1 \int_{-\infty}^\infty d\alpha_2 \langle R(\alpha r) \rangle V_{\phi_1, \phi_1}(\alpha) e^{-s[\langle \tilde{J}_1(r\alpha) \rangle + i(\alpha_1 + \alpha_2)/\lambda']} \\ - s \int_0^\infty d\alpha_2 \int_{-\infty}^\infty d\alpha_1 \langle R^\dagger(\alpha r) \rangle V_{\phi_1, \phi_1}(\alpha) e^{-s[\langle \tilde{J}_1(r\alpha) \rangle + i(\alpha_1 + \alpha_2)/\lambda']} + \text{c.c.}, \quad (59)$$

$$B(s) = \pi \int_0^\infty d\alpha_1 \int_{-\infty}^\infty d\alpha_2 [V_{\phi_1, J_0}(\alpha) + V_{J_0, \phi_1}(\alpha)] e^{-s[\langle \tilde{J}_1(r\alpha) \rangle + i(\alpha_1 + \alpha_2)/\lambda']} - \pi \int_0^\infty d\alpha_2 \int_{-\infty}^\infty d\alpha_1 [V_{\phi_1, J_0}(\alpha) \\ + V_{J_0, \phi_1}(\alpha)] e^{-s[\langle \tilde{J}_1(r\alpha) \rangle + i(\alpha_1 + \alpha_2)/\lambda']} + \text{c.c.}, \quad (60)$$

and

$$C(s) = 2\pi i \int_{-\infty}^\infty \frac{d\alpha_2}{\alpha_2 + i\epsilon} (\langle e^{-i\alpha_2 r} \rangle)^2 e^{-s[\langle \tilde{J}_1(0, r\alpha_2) \rangle + i\alpha_2/\lambda']} - 2\pi i \int_{-\infty}^\infty \frac{d\alpha_1}{\alpha_1 - i\epsilon} (\langle e^{i\alpha_1 r} \rangle)^2 e^{-s[\langle \tilde{J}_1(r\alpha_1, 0) \rangle + i\alpha_1/\lambda']}. \quad (61)$$

These expressions look quite complicated, but in the next section we show that their asymptotics when $s \rightarrow \infty$ can easily be computed.

III. ASYMPTOTIC BEHAVIOR

The formulas (58)–(61) have been written in such a way that when the integration is performed from $-\infty$ to $+\infty$, the contour of integration as a whole can be shifted into the complex plane. The direction of such a deformation is different for the integration over α_1 and that over α_2 . It can conveniently be fixed by the following change of variables: $\alpha_1 = -iv$ or $\alpha_2 = iv$. In the new variable the allowed deformation of the contour is in both cases $\text{Re } v > 0$.

Let us consider first the simple integral (61). From Eqs.

(A17) and (A23) of the Appendix it follows that $\tilde{J}_1(0, iv) = \tilde{J}_1(-iv, 0) = I(v)$, where

$$I(v) = \int_{-1}^\infty \frac{dt}{t^2} (1 - e^{-vt}) = e^v - 1 - v \text{Ei}(v), \quad (62)$$

and

$$\text{Ei}(v) = - \int_{-v}^\infty \frac{dt}{t} e^{-t} \quad (63)$$

is the standard exponential integral (see, e.g., [23], p. 143).

Consequently, after the above change of variables the integral (61) takes the form

$$C(s) = -2\pi i \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{dv}{v} (\langle e^{vr} \rangle)^2 e^{-s[\langle I(vr) \rangle - v/\lambda']} - 2\pi i \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{dv}{v} (\langle e^{vr} \rangle)^2 e^{-s[\langle I(vr) \rangle + v/\lambda']}. \quad (64)$$

Now one can move the contour to the right until it goes through the saddle point. For the first integral, the position of the saddle point, v_+ , is defined by the equation

$$\frac{d}{dv} \langle I(v+r) \rangle = \frac{1}{\lambda'} \quad (65)$$

and for the second integral the saddle point v_- is determined from a similar equation but with changed sign of the coupling constant λ' ,

$$\frac{d}{dv} \langle I(vr) \rangle = -\frac{1}{\lambda'}. \quad (66)$$

As $I'(v) = -\text{Ei}(v)$, the saddle points $v_{\pm}$ are roots of the equation

$$\langle r \text{Ei}(v_{\pm} r) \rangle = \mp \frac{1}{\lambda'} \quad (67)$$

and it is possible to prove that for any real λ' there is one and only one solution of this equation.

Expanding the exponent in Eq. (64) in the vicinity of the saddle points and taking into account that $I''(v) = -e^v/v$ and $\langle I(rv_{\pm}) \rangle \mp v_{\pm}/\lambda' = \langle e^{rv_{\pm}} \rangle - 1$, one gets that in the limit $s \rightarrow \infty$ the function (61) is the sum of contributions from two saddle points,

$$C(s) = (2\pi)^{3/2} \sum_{i=\pm} \frac{(\langle e^{rv_i} \rangle)^2}{\sqrt{\langle re^{rv_i} \rangle s v_i}} e^{-s(\langle e^{rv_i} \rangle - 1)}. \quad (68)$$

The saddle point with the smallest value of $\langle e^{rv} \rangle$, which we denote by v_{sp} , dominates and it should formally be the only one to be taken into account. For finite λ' , it corresponds to the solution of Eq. (67) with a negative right-hand side,

$$\langle r \text{Ei}(rv_{\text{sp}}) \rangle = -\frac{1}{|\lambda'|}. \quad (69)$$

Note the appearance of the absolute value of the renormalized coupling constant. When $\lambda' \rightarrow \infty$, both saddle points $v_{\pm}$ will give comparable contributions and both should be included.

The asymptotics of the other terms (59) and (60) can be computed by similar considerations. These functions are defined as double integrals. The first one is taken from 0 to ∞ and the second from $-\infty$ to ∞ . To compute their asymptotic behavior for large s , the latter integral should be deformed into the complex plane as was done above and in the former integral one has to take into account only the lowest-order terms according to expansion (A26).

Let us consider the first term in Eq. (59). We need to know the limiting behavior of the integrand when $\alpha_1 \rightarrow 0$ and $\alpha_2 + \alpha_1 = iv$ (we prefer to use this deformation instead of the usual one, $\alpha_2 = iv$, to simplify the formulas below). From Eqs. (A17), (A26), and (A30) it follows that for real α ,

$$\tilde{J}_1(\alpha_1, iv - \alpha_1) \xrightarrow{\alpha_1 \approx 0} I(v) + e^v \left(\frac{\pi}{2} - i(2\gamma + \ln v - 1 + \ln \alpha_1) \right) \alpha_1, \quad (70)$$

with $I(v)$ defined by Eq. (62). From Eq. (A22) in this limit $R(\alpha) \approx \pi \alpha_1 e^v$. The dominant contribution in $V_{\phi_1, \phi_1}(\alpha)$ comes from the second term in Eq. (44) and one gets $V_{\phi_1, \phi_1}(\alpha) \approx -i \langle e^{vr} \rangle^2 / (\alpha_1 v)$. Combining all terms together and changing the variable $\alpha_1 \rightarrow \alpha / (s \langle re^{rv} \rangle)$ we find that at large s

$$A(s) = 2\pi i \int_0^{\infty} d\alpha \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{dv}{v} (\langle e^{rv} \rangle)^2 e^{-s[\langle I(vr) \rangle - v/\lambda']} \times e^{-\pi\alpha/2} \sin\{\alpha[\ln \alpha - \ln s + g(v)]\} + (\lambda' \rightarrow -\lambda'), \quad (71)$$

where

$$g(v) = \ln v + 2\gamma - 1 + 2 \frac{\langle re^{rv} \ln r \rangle}{\langle re^{rv} \rangle} - \ln \langle re^{rv} \rangle. \quad (72)$$

The integral over v is an analog of Eq. (64) and can be computed exactly as above:

$$A(s) = -(2\pi)^{3/2} \sum_{i=\pm} \frac{(\langle e^{rv_i} \rangle)^2}{\sqrt{\langle re^{rv_i} \rangle s v_i}} \times f[\ln s - g(v_i)] e^{-s(\langle e^{rv_i} \rangle - 1)}, \quad (73)$$

where the function $f(y)$ is given by the integral

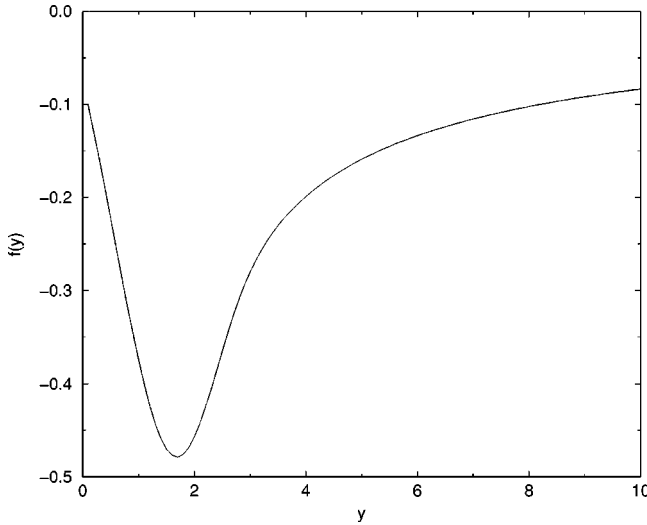
$$f(y) = \int_0^{\infty} e^{-\pi\alpha/2} \sin[\alpha(\ln \alpha - y)] d\alpha. \quad (74)$$

One can check that the contribution (60) when $s \rightarrow \infty$ is smaller by a factor $1/s$ with respect to Eqs. (68) and (73) and can be neglected.

Finally, we obtain that the nearest-neighbor distribution, $P(s)$, in the limit of large s has the following asymptotics:

$$P(s) = \frac{(\langle e^{rv_{\text{sp}}} \rangle)^2}{\sqrt{2\pi \langle re^{rv_{\text{sp}}} \rangle v_{\text{sp}}}} \times \frac{e^{-s \langle e^{rv_{\text{sp}}} \rangle}}{\sqrt{s}} \{1 - f[\ln s - g(v_{\text{sp}})]\}. \quad (75)$$

The saddle-point value, v_{sp} , depends on the renormalized coupling constant by Eq. (69),

FIG. 2. Plot of the function $f(y)$ defined in Eq. (74).

$$-\langle r \text{Ei}(rv_{\text{sp}}) \rangle = \frac{1}{|\lambda'|}. \quad (76)$$

When λ is very large, the contribution of the second saddle point with a reversed sign of the right-hand side of this equation should be added.

In Fig. 2, the plot of the function $f(y)$ defined in Eq. (74) is presented. When $y \rightarrow \infty$, this function goes to zero as $-1/y$. Therefore, the true asymptotics of $P(s)$ is given by the first term in Eq. (75),

$$P(s) = \frac{(\langle e^{rv_{\text{sp}}} \rangle)^2}{\sqrt{2\pi} \langle r e^{rv_{\text{sp}}} \rangle v_{\text{sp}}} \frac{e^{-s \langle e^{rv_{\text{sp}}} \rangle}}{\sqrt{s}}. \quad (77)$$

But because in Eq. (75) the argument of the function $f(y)$ up to the constant (72) is $\ln s$, this decrease is quite slow, and at numerically accessible values of s of the order of 10 (i.e., y of the order of 3–4) as is evident from Fig. 2 this function gives a noticeable contribution.

For the billiard with periodic boundary conditions, the residues in Eq. (7) all equal 1, and all mean values are reduced to the corresponding function, i.e., for any function f the quantity $\langle f(rx) \rangle$ becomes $f(x)$.

In this case, the nearest-neighbor distribution has the following asymptotics:

$$P(s) = \sqrt{\frac{e^{3v_{\text{sp}}}}{2\pi v_{\text{sp}}}} \frac{e^{-s e^{v_{\text{sp}}}}}{\sqrt{s}} [1 - f(\ln s - g(v_{\text{sp}}))]. \quad (78)$$

The value of v_{sp} is determined by the equation

$$\text{Ei}(v_{\text{sp}}) = -\frac{1}{|\lambda'|} \quad (79)$$

and

$$g(v_{\text{sp}}) = \ln v_{\text{sp}} - v_{\text{sp}} + 2\gamma - 1. \quad (80)$$

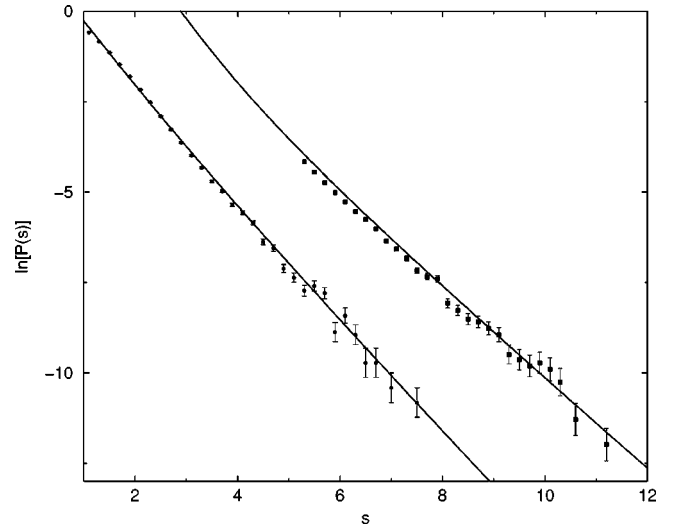


FIG. 3. The nearest-neighbor distribution in the periodic case. Squares and circles correspond, respectively, to $\lambda' = 1$ and $\lambda' = 100$. Solid lines: theoretical predictions (78). For clarity, the upper curves are shifted to the right by two units.

In Fig. 3, we present a comparison between numerical computations and the theoretical prediction (78) for two values of λ . The logarithm of the nearest-neighbor distribution is plotted as a function of s . The upper curve (squares) corresponds to 10^6 levels with $\lambda' = 1$ and the lower one (circles) to 5×10^5 levels with $\lambda' = 100$. For clarity, the curve corresponding to $\lambda' = 1$ has been shifted on the right by $s \rightarrow s + 2$. The solid lines represent theoretical predictions (78) for these values of the coupling constant. For $\lambda' = 100$, two saddle points with a different sign of the right-hand side of Eq. (79) have been taken into account, which roughly doubles the result (78). These results confirm very well the theoretical asymptotics of the nearest-neighbor distribution (78).

In the case of a rectangular billiard of size $a \times b$ with Dirichlet boundary conditions, with a pointlike scatterer such that the ratios of its positions (x_0, y_0) to the corresponding sides are noncommensurable irrational numbers, the residues, r_n , can be considered as random variables of the form given by Eq. (12) and the mean value of a given function $f, \langle f(r) \rangle$, should be computed as follows:

$$\langle f(r) \rangle = \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\pi/2} d\phi_1 \int_0^{\pi/2} d\phi_2 f(4 \sin^2 \phi_1 \sin^2 \phi_2). \quad (81)$$

In the case where x_0/a and y_0/b are rational numbers (13), the mean value $\langle f(r) \rangle$ takes the form (see [13])

$$\langle f(r) \rangle = \frac{1}{q_1 q_2} \sum_{k_1=0}^{q_1-1} \sum_{k_2=0}^{q_2-1} f\left(4 \sin^2 \frac{\pi k_1}{q_1} \sin^2 \frac{\pi k_2}{q_2}\right). \quad (82)$$

The cases $k_1 = 0$ and $k_2 = 0$ correspond to unperturbed subsequence of levels (for Dirichlet boundary conditions) and one has the freedom to include them in the level density (17) or consider them separately. In the latter case, the terms with

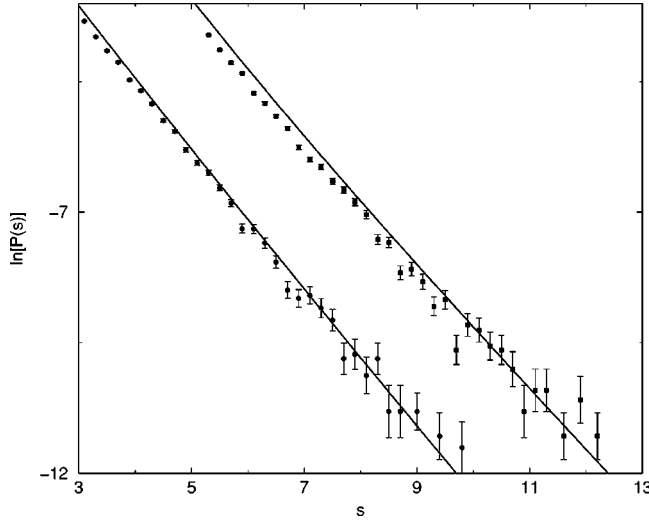


FIG. 4. The nearest-neighbor distribution for a billiard with Dirichlet boundary conditions. Squares and circles correspond, respectively, to $\lambda' = 1$ and $\lambda' = 10$. Solid lines: theoretical asymptotics (78). Upper curves are shifted to the right by two units.

$k_i = 0$ should be omitted and $1/(q_1 q_2)$ in front of the sum should be substituted by $1/[(q_1 - 1)(q_2 - 1)]$. The generalizations of $\langle f(r) \rangle$ for the case in which only one ratio x_0/a or y_0/b is an irrational number and the other one is a rational number, or both ratios are irrational but commensurable numbers, are straightforward.

With such a definition of the mean value, the asymptotics of the nearest-neighbor distribution is given by Eq. (75).

As in the periodic case, the quantity $-\ln P(s)$ is expected to be nearly linear with the slope $\langle e^{rv_{sp}} \rangle$, where v_{sp} is the solution of Eq. (76).

Figure 4 shows a comparison between the numerically computed nearest-neighbor distribution for a billiard with

Dirichlet boundary conditions and the expected asymptotic behavior (75) (solid line) for two values of the renormalized coupling constant, $\lambda' = 1$ and $\lambda' = 10$ ($x_0/a, y_0/b$ are incommensurable irrational numbers). To better understand the asymptotics of the nearest-neighbor distribution, we present in Fig. 5 the functions which determine the exponential decrease of $P(s)$. Different curves in this figure correspond to the following functions: $-\text{Ei}(x)$ (thick solid line), $\exp x$ (thin solid line), $-\langle r \text{Ei}(rx) \rangle$ (thick dashed line), and $\langle \exp x \rangle$ (thin dashed line).

For periodic boundary conditions, the intersection of the horizontal line having the ordinate $1/\lambda'$ with the graph of $-\text{Ei}(x)$ gives the value of v_{sp} . The point of intersection of the vertical line going through v_{sp} with the graph of e^x determines the exponent in Eq. (78). For Dirichlet boundary conditions, one should use the same procedure but with the functions $-\langle r \text{Ei}(rx) \rangle$ and $\langle e^{rx} \rangle$.

IV. THE n TH NEAREST-NEIGHBOR SPACING DISTRIBUTION

In the previous sections we compute the nearest-neighbor distribution, $P(s)$, for a rectangular billiard with a small-size scattering center inside, i.e., the probability that two levels are separated by a distance s with no levels in between. In this section, we generalize the formalism to compute the n th nearest-neighbor distribution, $P_n(s)$, which is defined as the probability that two levels at distance s are separated by n levels, for $n \geq 1$.

Our starting point is the expression (41) which is valid for any sequence σ_k of 0 and 1. To obtain the n th nearest-neighbor distribution, one should sum over all sequences of length N with exactly $n + 1$ zeros. Performing the same steps as in Sec. II B and taking into account that when $N \rightarrow \infty$ we have $C_N^n \rightarrow N^n/n!$, one obtains

$$P_n(s) = e^{-s} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\alpha_1 d\alpha_2}{(2\pi)^2} \left(\frac{s^{n+1}}{(n+1)!} [1 - \langle \tilde{J}_0(\alpha r) \rangle]^{n+1} V_{\phi_1, \phi_1}(\alpha) + \frac{s^n}{n!} [1 - \langle \tilde{J}_0(\alpha r) \rangle]^n [V_{\phi_0, \phi_1}(\alpha) + V_{\phi_1, \phi_0}(\alpha)] \right. \\ \left. + \frac{s^{n-1}}{(n-1)!} [1 - \langle \tilde{J}_0(\alpha r) \rangle]^{n-1} V_{\phi_0, \phi_0}(\alpha) \right) e^{-s[\langle \tilde{J}_1(\alpha r) \rangle + i(\alpha_1 + \alpha_2)/\lambda']}, \quad (83)$$

with all functions defined as above.

As a consistency check, one can verify that the sum over all n coincides with the exact expression of the two-point correlation function derived in [13],

$$R_2(s) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(s). \quad (84)$$

Similarly to Sec. II C, the different terms in Eq. (83) can be classified according to their analytical properties. Three groups of terms appear. The first group has terms which have

the same analytical properties as the function $\tilde{J}_1(\alpha)$ in the exponent. Exactly as was done in Sec. II C, one can argue that their contribution is zero because one can freely move the integration contour to infinity. The second group consists of terms which are singular on one variable but have “good” analytical properties on the other variable of integration. The large s asymptotics of such terms can be calculated as in Sec. III by computing the leading terms over the former variable and shifting the contour of integration over the latter variable into the complex plane until it reaches the saddle point. The asymptotics of these terms will be proportional to $\exp$

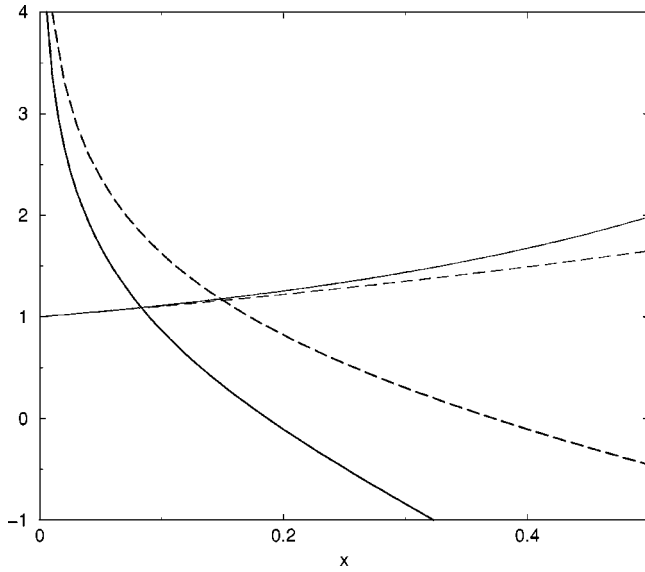


FIG. 5. Functions $-\text{Ei}(x)$ (thick solid line), $-\langle r\text{Ei}(rx) \rangle$ (thick dashed line), e^x (thin solid line), and $\langle e^{rx} \rangle$ (thin dashed line).

$[-se^{v_{\text{sp}}}]$ as for the nearest-neighbor distribution. Finally, the third group [which does not exist for $P(s)$] includes terms which are singular [i.e., have analytical properties different from that of $\tilde{J}_1(\alpha)$] for both variables of integration. In this case, no deformation of the integration contour is possible, the region of small α_1 and α_2 will be important, and the asymptotic result will be proportional to $\exp(-s)$. As v_{sp}

> 0 , it is the last group of terms which will dominate the asymptotics of $P_n(s)$ when $s \rightarrow \infty$.

From formula (A26) of the Appendix it follows that, when both variables α_1 and α_2 are small, the functions V_{ϕ_i, ϕ_j} will be equivalent to their singular parts,

$$\begin{aligned} V_{\phi_1, \phi_1}(\alpha) &\simeq \frac{1}{\alpha_1 \alpha_2}, & V_{\phi_1, \phi_0}(\alpha) &\simeq -\frac{2\pi i}{\alpha_1} \delta(\alpha_2), \\ V_{\phi_1, \phi_0}(\alpha) &\simeq \frac{2\pi i}{\alpha_2} \delta(\alpha_1), & V_{\phi_0, \phi_0}(\alpha) &\simeq (2\pi)^2 \delta(\alpha_1) \delta(\alpha_2). \end{aligned} \quad (85)$$

The singular terms in $[1 - \langle \tilde{J}_0(r\alpha) \rangle]^n$ are given by the small- α behavior in Eq. (A25). Keeping only the terms with a singularity in $\{1 + \langle \tilde{J}_1(r\alpha) \rangle - [\langle \tilde{J}_0(r\alpha) \rangle + \langle \tilde{J}_1(r\alpha) \rangle]\}^n$, we get

$$\begin{aligned} [1 - \langle \tilde{J}_0(r\alpha) \rangle]^n &= 1 - n\pi(|\alpha_1| + |\alpha_2|) \\ &\quad + n(n-1)\pi^2|\alpha_1||\alpha_2|. \end{aligned} \quad (86)$$

(We recall that the terms coming from $\tilde{J}_1$ vanish.) The first term in this expression is the dominant regular contribution, the second one is the dominant contribution singular in one variable, and the third term is the dominant contribution singular in both variables.

Combining all the above expressions together and using Eq. (A24), we obtain

$$\begin{aligned} P_n(s) &= \frac{s^{n-1}}{(n-1)!} e^{-s} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\alpha_1 d\alpha_2}{(2\pi)^2} [\pi^2 s^2 \text{sgn}(\alpha_1) \text{sgn}(\alpha_2) + 2\pi^2 i s \text{sgn}(\alpha_1) \delta(\alpha_2) - 2\pi^2 i s \text{sgn}(\alpha_2) \delta(\alpha_1) \\ &\quad + (2\pi)^2 \delta(\alpha_1) \delta(\alpha_2)] \exp -s \left(\frac{\pi}{2} (|\alpha_1| + |\alpha_2|) - i\alpha_1 (\ln|\alpha_1| + g_-) + i\alpha_2 (\ln|\alpha_2| + g_+) \right), \end{aligned} \quad (87)$$

where

$$g_{\pm} = \langle r \ln r \rangle + \gamma - 1 \pm \frac{1}{\lambda'}. \quad (88)$$

After simple calculations, we obtain the large- s asymptotics of the n th nearest-neighbor distribution

$$P_n(s) = \frac{s^{n-1}}{(n-1)!} e^{-s} [1 - f(\ln s - g_+)] [1 - f(\ln s - g_-)], \quad (89)$$

where the function $f(y)$ is defined by Eq. (74) (see also Fig. 2).

The only difference between periodic and Dirichlet boundary conditions is in the constant $g_{\pm}$ (88) where the term $\langle r \ln r \rangle = 2(1 - \ln 2)$ is added for the latter.

As above, when $s \rightarrow \infty$ the function $f(\ln s - g_{\pm})$ goes to zero and the true asymptotics of the n th nearest-neighbor distribution with $n \geq 1$ for all boundary conditions is

$$P_n(s) = \frac{s^{n-1}}{(n-1)!} e^{-s}, \quad (90)$$

i.e., it coincides with the $(n-1)$ th nearest-neighbor distribution for the Poisson distribution. A simple physical explanation of this result is the following.

We are interested in the solutions of Eq. (7) when unperturbed levels, e_j , are independent random variables. Among all configurations of e_j there are cases where two unperturbed levels e_1 and e_2 are very close to each other. In such a case, Eq. (7) reduces to two terms

$$\frac{r_1}{E - e_1} + \frac{r_2}{E - e_2} = 0, \quad (91)$$

which has a simple solution

$$E = \frac{e_1 r_2 + e_2 r_1}{r_1 + r_2}. \quad (92)$$

As we assume that the difference $e_1 - e_2$ is very small, the value of E will also be very close to both unperturbed levels, e_1 and e_2 . Equation (92) can be reversed, and having one unperturbed level, say e_1 , and a new level, E , very close to it, one can always find the position of another unperturbed level, e_2 , to fulfill Eq. (7) in that approximation. We shall call two very close unperturbed levels with a new level inside a dipole configuration. Now let us consider the probability that two unperturbed levels e_1 and e_2 are at the distance s with $n-1$ unperturbed levels inside this interval. As unperturbed levels are independent, this probability is given by Eq. (90).

We represent in Fig. 6 a possible configuration for two unperturbed levels (short thin vertical lines) separated by a large distance $s = e_1 - e_2$ with $n-1$ levels between them. For any such configuration, there exists a configuration with two new energy levels at E_2 and E_1 , very close to e_2 and e_1 respectively. This is true because, as we have pointed out, it is possible to construct two unperturbed energy levels e'_2 and e'_1 (indicated by dashed lines in Fig. 6) such that two pairs $(e'_2, e_2), (e'_1, e_1)$ form the dipoles. For that configuration it is clear that E_2 and E_1 are two perturbed levels with n perturbed levels in between. When $s \rightarrow \infty$, it is physically clear that the other levels will not influence these dipole configurations, which explains Eq. (90).

It is clear that this reasoning cannot be applied to the nearest-neighbor distribution (as it requires at least two unperturbed levels inside the interval s) and the asymptotics of $P(s)$ given by Eq. (77) is quite different from Eq. (90).

To check the asymptotic formula (90), we compute numerically the n th nearest-neighbor distributions until $n=9$ for a rectangular billiard with size $4 \times \pi$ with periodic boundary conditions and for different coupling constants. First, we find the best fit of the integrated n th nearest-neighbor distribution $N_n(s) = \int_0^s P_n(t) dt$ in the form $a \exp(bs)s^c$. In Fig. 7, we plot values of b and c obtained by this fit. The lower curve (dots) shows the values of the constant b , which, as expected, is the same for all values of n and is equal with a good precision to -1 . The upper curve (squares) shows the exponent c , which according to Eq. (89) is expected to be $n-1$. This is indeed the case for the higher values of n . The small deviations from this expected value for the lowest n come from the fact that the function f has to be taken into account since for large s , $f(\ln s - g_{\pm})$ behaves like $1/\ln s$. To illustrate the accuracy of Eq. (89) we present in Fig. 8 the results of numerical computations for $P_2(s)$ and $P_8(s)$ for a billiard with periodic boundary conditions and renormalized coupling constant, $\lambda' = 1$. Error bars in this figure indicate statistical errors. It is clear that the asymptotic formula (89) describes well the large s behavior of $P_n(s)$.

The same checks have been performed for billiards with Dirichlet boundary conditions. The results are presented in

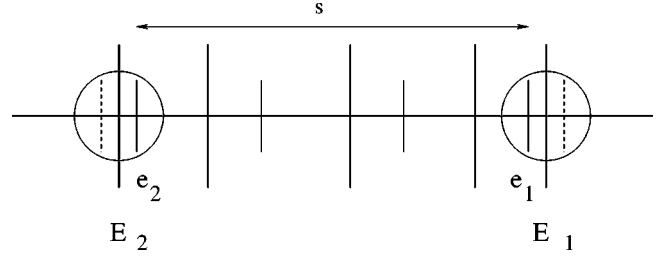


FIG. 6. Schematic representation of the dominant contribution to the n th nearest-neighbor distribution. Thin vertical lines are unperturbed energy levels. Thick lines represent new energy levels. Two vertical dashed lines indicate two unperturbed energy levels which are added to construct encircled dipole configurations.

Fig. 9 and Fig. 10. Again the theoretical asymptotics (89) is in a good agreement with numerical results.

V. CONCLUSION

The starting point of our investigation is Eq. (7),

$$\lambda \sum_{j=1}^N \frac{r_j}{E - e_j} = 1. \quad (93)$$

We assume that (i) all e_j are independent random variables, (ii) the residues r_j are real positive, and we compute the n th nearest-neighbor distribution $P_n(s)$ of the solutions, E , in the limit $N \rightarrow \infty$. The exact formulas are quite cumbersome and we dwell on the asymptotic behavior of $P_n(s)$ at large s . Our main results are the following.

The asymptotics of the nearest-neighbor distribution, $P(s)$, is given by Eq. (77) and has the form

$$P(s) = \frac{(\langle e^{rv_{sp}} \rangle)^2}{\sqrt{2\pi} \langle r e^{rv_{sp}} \rangle v_{sp}} \frac{e^{-s \langle e^{rv_{sp}} \rangle}}{\sqrt{s}}. \quad (94)$$

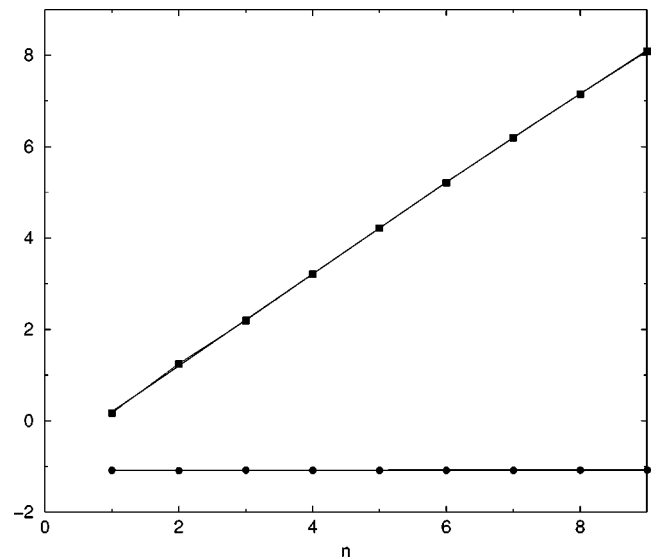


FIG. 7. Values of b (dots) and c (squares) in a fit of $N_n(s)$ for periodic boundary conditions under the form $a \exp(bs)s^c$.

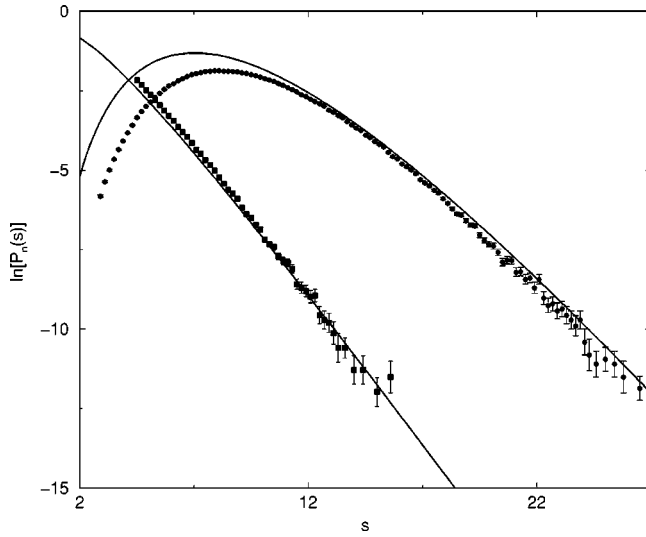


FIG. 8. $P_2(s)$ (the left curve) and $P_8(s)$ (the right curve) for a billiard with periodic boundary conditions.

Here v_{sp} is determined by the equation

$$-\langle r \text{Ei}(rv_{sp}) \rangle = \frac{1}{|\lambda'|}, \quad (95)$$

where $\text{Ei}(x)$ is the usual exponential integral (63) and λ' is the renormalized coupling constant (48). The notation $\langle f(r) \rangle$ indicates the mean value over all residues. For periodic boundary conditions $\langle f(r) \rangle = f(1)$. For Dirichlet conditions $\langle f(r) \rangle$ depends on the ratios of the coordinates of the scatterer to the corresponding sides. When these ratios are non-commensurable irrational numbers, $\langle f(r) \rangle$ is defined in Eq. (81). When they are rational numbers, $\langle f(r) \rangle$ should be computed as in Eq. (82).

The n th nearest-neighbor distribution with $n \geq 1$ when $s \rightarrow \infty$ has the following asymptotics:

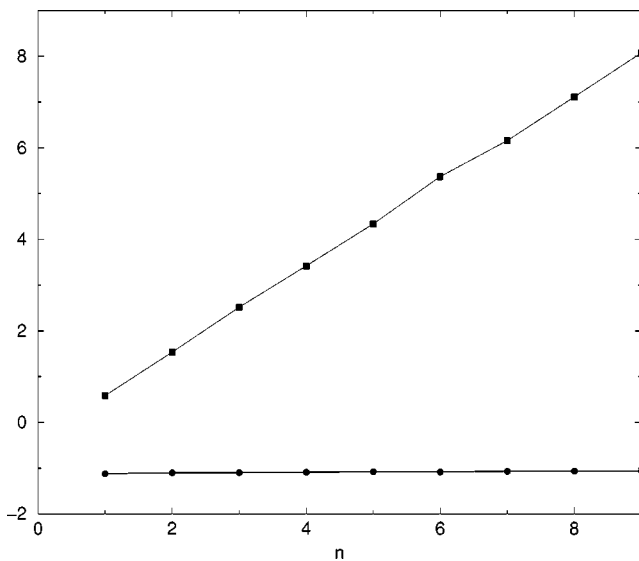


FIG. 9. Values of b (dots) and c (squares) in a fit of $N_n(s)$ for Dirichlet boundary conditions under the form $a \exp(bs)s^c$.

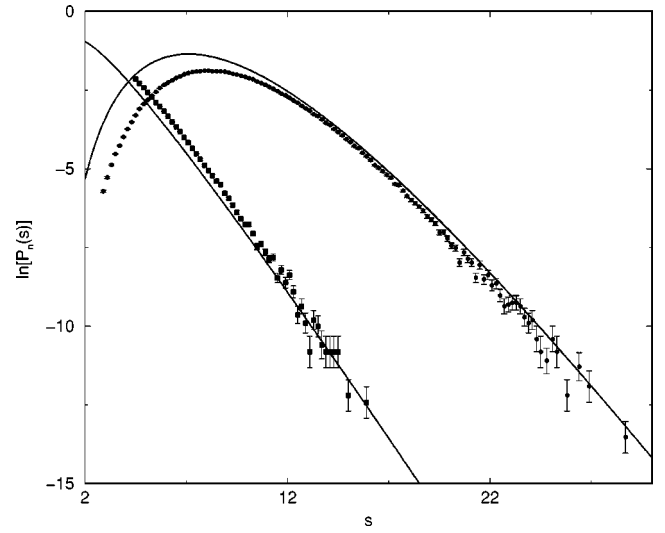


FIG. 10. $P_2(s)$ (the left curve) and $P_8(s)$ (the right curve) for a billiard with Dirichlet boundary condition.

$$P_n(s) = \frac{s^{n-1}}{(n-1)!} e^{-s}, \quad (96)$$

which depends neither on the residues nor on the boundary conditions. For finite values of s there are slowly decreasing corrections to these formulas indicated in Eqs. (75) and (89) which are important for accurate comparison with results of numerical calculations.

The above results together with the results of Ref. [13] prove that spectral statistics of generic rectangular billiards with a small-size scattering center inside is of special (intermediate) type characterized by two important properties: (i) level repulsion at small s and (ii) exponential decrease of the nearest-neighbor distribution at large s . To the best of our knowledge, this is the first example of a dynamical system where the intermediate character of the spectral statistics can be proved rigorously.

ACKNOWLEDGMENTS

Laboratoire de Physique Théorique et Modèles Statistiques is Unité Mixte de Recherche de l'Université Paris XI et du CNRS (UMR 8626).

APPENDIX

The purpose of this Appendix is the computation of two main integrals,

$$\tilde{J}_1(\alpha_1, \alpha_2) = \left(\int_{-\infty}^0 + \int_1^\infty \right) \left[1 - \exp\left(i \frac{\alpha_1}{1-e} - i \frac{\alpha_2}{e} \right) \right] de \quad (A1)$$

and

$$\tilde{J}_0(\alpha_1, \alpha_2) = \int_0^1 \left[1 - \exp\left(i \frac{\alpha_1}{1-e} - i \frac{\alpha_2}{e} \right) \right] de. \quad (A2)$$

As in [13], we first find the difference of the derivatives over α_1 and α_2 ,

$$\begin{aligned} & (\partial_1 - \partial_2) \tilde{J}_1(\alpha_1, \alpha_2) \\ &= -i \left(\int_{-\infty}^0 + \int_1^{\infty} \right) \frac{de}{e(1-e)} \exp \left(i \frac{\alpha_1}{1-e} - i \frac{\alpha_2}{e} \right), \end{aligned} \quad (A3)$$

where ∂_i denotes the partial derivative with respect to the α_i . Changing the variable $e = t/(1+t)$, one gets

$$(\partial_1 - \partial_2) \tilde{J}_1(\alpha_1, \alpha_2) = e^{i(\alpha_1 - \alpha_2)} \phi_1(\alpha_1, \alpha_2), \quad (A4)$$

where

$$\phi_1(\alpha_1, \alpha_2) = i \int_0^{\infty} \frac{dt}{t} \exp \left(-i\alpha_1 t + i \frac{\alpha_2}{t} \right). \quad (A5)$$

The last integral is well defined for complex α when $\text{Im}(\alpha_1) < 0$ and $\text{Im}(\alpha_2) > 0$. In this domain (see [23]),

$$\phi_1(\alpha_1, \alpha_2) = 2iK_0(2\sqrt{\alpha_1\alpha_2}), \quad (A6)$$

where $K_0(x)$ is the modified Bessel function of the third kind. At real α , the limiting function is discontinuous and depends on the sign of α ,

$$\begin{aligned} & \phi_1(\alpha_1, \alpha_2) \\ &= \begin{cases} -\pi H_0^{(1)}(2\sqrt{-\alpha_1\alpha_2}) & \text{when } \alpha_1 < 0, \alpha_2 > 0 \\ 2iK_0(2\sqrt{\alpha_1\alpha_2}) & \text{when } \alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0 \\ \pi H_0^{(2)}(2\sqrt{-\alpha_1\alpha_2}) & \text{when } \alpha_1 > 0, \alpha_2 < 0 \\ 2iK_0(2\sqrt{\alpha_1\alpha_2}) & \text{when } \alpha_1 < 0, \alpha_2 < 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (A7)$$

The function $\tilde{J}_0(\alpha)$ obeys the similar equation

$$(\partial_1 - \partial_2) \tilde{J}_0(\alpha_1, \alpha_2) = e^{i(\alpha_1 - \alpha_2)} \phi_0(\alpha_1, \alpha_2), \quad (A8)$$

where

$$\begin{aligned} \phi_0(\alpha_1, \alpha_2) &= -i \int_0^{\infty} \frac{dt}{t} \exp \left(i\alpha_1 t - i \frac{\alpha_2}{t} \right) \\ &= -2iK_0(2\sqrt{\alpha_1\alpha_2}), \end{aligned} \quad (A9)$$

which is defined in the region $\text{Im}(\alpha_1) > 0$ and $\text{Im}(\alpha_2) < 0$. At real α , $\phi_0(\alpha) = \phi_1^*(\alpha)$ or explicitly

$$\begin{aligned} & \phi_0(\alpha_1, \alpha_2) \\ &= \begin{cases} -\pi H_0^{(2)}(2\sqrt{-\alpha_1\alpha_2}) & \text{when } \alpha_1 < 0, \alpha_2 > 0 \\ -2iK_0(2\sqrt{\alpha_1\alpha_2}) & \text{when } \alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0 \\ \pi H_0^{(1)}(2\sqrt{-\alpha_1\alpha_2}) & \text{when } \alpha_1 > 0, \alpha_2 < 0 \\ -2iK_0(2\sqrt{\alpha_1\alpha_2}) & \text{when } \alpha_1 < 0, \alpha_2 < 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (A10)$$

We note also the expression for the sum of $\phi_\sigma(\alpha)$,

$$\begin{aligned} & \phi_1(\alpha_1, \alpha_2) + \phi_0(\alpha_1, \alpha_2) \\ &= \pi [\text{sgn}(\alpha_1) - \text{sgn}(\alpha_2)] J_0(2\sqrt{-\alpha_1\alpha_2}), \end{aligned} \quad (A11)$$

where $\text{sgn}(x)$ denotes the sign of x .

The knowledge of $\phi_\sigma(\alpha)$ permits us to write down a linear partial derivative equation for $J_\sigma(\alpha)$,

$$(\partial_1 - \partial_2) \tilde{J}_\sigma(\alpha_1, \alpha_2) = Z_\sigma(\alpha_1, \alpha_2), \quad (A12)$$

where

$$Z_\sigma(\alpha_1, \alpha_2) = e^{i(\alpha_1 - \alpha_2)} \phi_\sigma(\alpha_1, \alpha_2). \quad (A13)$$

The general solution of this equation has the form

$$\begin{aligned} \tilde{J}_\sigma(\alpha_1, \alpha_2) &= \tilde{J}_\sigma(0, \alpha_1 + \alpha_2) \\ &+ \int_0^{\alpha_1} Z_\sigma(t, \alpha_1 + \alpha_2 - t) dt. \end{aligned} \quad (A14)$$

The initial values $\tilde{J}_\sigma(0, \alpha)$ can be computed directly from the definitions (A1) and (A2). By changing the variable e to $t = -1/e$, one gets

$$\begin{aligned} \tilde{J}_1(0, \alpha) &= \left(\int_{-\infty}^0 + \int_1^{\infty} \right) (1 - e^{-i\alpha/e}) de \\ &= \oint_{-1}^{\infty} \frac{dt}{t^2} (1 - e^{i\alpha t}), \end{aligned} \quad (A15)$$

where $\oint$ is the principal value of the integral. Similarly

$$\tilde{J}_0(0, \alpha) = \int_0^1 (1 - e^{-i\alpha/e}) de = \int_1^{\infty} \frac{dt}{t^2} (1 - e^{-i\alpha t}). \quad (A16)$$

The final expressions for $\tilde{J}_\sigma(\alpha)$ are the following:

$$\begin{aligned} \tilde{J}_1(\alpha_1, \alpha_2) &= \oint_{-1}^{\infty} \frac{dt}{t^2} (1 - e^{i(\alpha_1 + \alpha_2)t}) \\ &+ \int_0^{\alpha_1} e^{i(2t - \alpha_1 - \alpha_2)} \phi_1(t, \alpha_1 + \alpha_2 - t) dt \end{aligned} \quad (A17)$$

and

$$\begin{aligned} \tilde{J}_0(\alpha_1, \alpha_2) &= \int_1^{\infty} \frac{dt}{t^2} (1 - e^{-i(\alpha_1 + \alpha_2)t}) \\ &+ \int_0^{\alpha_1} e^{i(2t - \alpha_1 - \alpha_2)} \phi_0(t, \alpha_1 + \alpha_2 - t) dt. \end{aligned} \quad (A18)$$

According to Eqs. (A2) and (A1), the functions $\tilde{J}_0(\alpha)$ and $\tilde{J}_1(\alpha)$ considered as functions of complex α_1 and α_2 are analytical functions in different regions: $\text{Im}(\alpha_1) > 0$ and $\text{Im}(\alpha_2) < 0$ for the former and $\text{Im}(\alpha_1) < 0$ and $\text{Im}(\alpha_2) > 0$ for the latter. They can be continued to complex planes with the cuts represented in Figs. 1(a) and 1(b) for $\tilde{J}_1$ and in Figs. 1(c) and 1(d) for $\tilde{J}_0$. At real values of α_1 and α_2 they have a discontinuity along the axis $\alpha_1 = 0$ and $\alpha_2 = 0$.

The sum $\tilde{J}_0(\alpha) + \tilde{J}_1(\alpha)$ obeys an equation similar to Eq. (A4), where instead of function $\phi_1(\alpha)$ one substitutes the sum (A11),

$$(\partial_1 - \partial_2)[\tilde{J}_1(\alpha_1, \alpha_2) + \tilde{J}_0(\alpha_1, \alpha_2)] = e^{i(\alpha_1 - \alpha_2)} Z(\alpha_1, \alpha_2), \quad (\text{A19})$$

where

$$Z(\alpha_1, \alpha_2) = \pi [\text{sgn}(\alpha_1) - \text{sgn}(\alpha_2)] J_0(2\sqrt{-\alpha_1\alpha_2}). \quad (\text{A20})$$

The solution of these equations can be done exactly as above and it can be represented as a sum of two discontinuous functions,

$$\begin{aligned} \tilde{J}_0(\alpha_1, \alpha_2) + \tilde{J}_1(\alpha_1, \alpha_2) \\ = \text{sgn}(\alpha_1) R(\alpha_1, \alpha_2) + \text{sgn}(\alpha_2) R^*(\alpha_2, \alpha_1), \end{aligned} \quad (\text{A21})$$

where

$$\begin{aligned} R(\alpha_1, \alpha_2) = \pi \int_0^{\alpha_1} J_0[2\sqrt{-t(\alpha_1 + \alpha_2 - t)}] \\ \times e^{i(2t - \alpha_1 - \alpha_2)} dt. \end{aligned} \quad (\text{A22})$$

One can check that this expression coincides with Eq. (A24) of [13].

The following useful symmetry properties can be checked directly from the definitions (A1) and (A2):

$$\begin{aligned} \tilde{J}_\sigma(\alpha_2, \alpha_1) &= \tilde{J}_\sigma(-\alpha_1, -\alpha_2) = \tilde{J}_\sigma^*(\alpha_1, \alpha_2), \\ \phi_\sigma(\alpha_2, \alpha_1) &= \phi_\sigma(-\alpha_1, -\alpha_2) = -\phi_\sigma^*(\alpha_1, \alpha_2), \\ R(-\alpha_1, -\alpha_2) &= -R^*(\alpha_1, \alpha_2). \end{aligned} \quad (\text{A23})$$

For further references we present the behavior of $\tilde{J}_\sigma(\alpha)$ and $\phi_\sigma(\alpha)$ at small real α ,

$$\begin{aligned} \tilde{J}_1(\alpha_1, \alpha_2) &= \frac{\pi}{2}(|\alpha_1| + |\alpha_2|) + i\alpha_1(1 - \gamma - \ln|\alpha_1|) \\ &\quad - i\alpha_2(1 - \gamma - \ln|\alpha_2|), \end{aligned} \quad (\text{A24})$$

$$\begin{aligned} \tilde{J}_0(\alpha_1, \alpha_2) &= \frac{\pi}{2}(|\alpha_1| + |\alpha_2|) - i\alpha_1(1 - \gamma - \ln|\alpha_1|) \\ &\quad + i\alpha_2(1 - \gamma - \ln|\alpha_2|), \end{aligned} \quad (\text{A25})$$

and

$$\begin{aligned} \phi_1(\alpha_1, \alpha_2) &= \frac{\pi}{2}[\text{sgn}(\alpha_1) - \text{sgn}(\alpha_2)] \\ &\quad - i(2\gamma + \ln|\alpha_1| + \ln|\alpha_2|), \end{aligned} \quad (\text{A26})$$

$$\begin{aligned} \phi_0(\alpha_1, \alpha_2) &= \frac{\pi}{2}[\text{sgn}(\alpha_1) - \text{sgn}(\alpha_2)] \\ &\quad + i(2\gamma + \ln|\alpha_1| + \ln|\alpha_2|), \end{aligned} \quad (\text{A27})$$

where γ is the Euler constant.

Due to the above-mentioned analytical properties, these expressions (though they have apparent discontinuities) can be rewritten as the following analytical functions:

$$\begin{aligned} \tilde{J}_1(\alpha_1, \alpha_2) &= i\alpha_1[1 - \gamma - \ln(i\alpha_1)] \\ &\quad - i\alpha_2[1 - \gamma - \ln(-i\alpha_2)], \end{aligned} \quad (\text{A28})$$

$$\begin{aligned} \tilde{J}_0(\alpha_1, \alpha_2) &= -i\alpha_1[1 - \gamma - \ln(-i\alpha_1)] \\ &\quad + i\alpha_2[1 - \gamma - \ln(i\alpha_2)], \end{aligned} \quad (\text{A29})$$

and

$$\phi_1(\alpha_1, \alpha_2) = -i[2\gamma + \ln(i\alpha_1) + \ln(-i\alpha_2)], \quad (\text{A30})$$

$$\phi_0(\alpha_1, \alpha_2) = i[2\gamma + \ln(-i\alpha_1) + \ln(i\alpha_2)], \quad (\text{A31})$$

where we assume the usual definition of the logarithmic function with a cut along the real negative axis.

Similarly as was done in [13] for the sum $\tilde{J}_1(\alpha) + \tilde{J}_0(\alpha)$ one can also obtain higher-order terms of the expansions of $\tilde{J}_\sigma(\alpha)$ in power of α . Both functions $\tilde{J}_1$ and $\tilde{J}_0$ given by Eqs. (A17) and (A18) contain terms proportional to $\ln(\alpha_1 + \alpha_2)$ but one can check by direct series expansions that in the corresponding sums these terms all cancel and the only logarithmic contributions to these functions are the ones presented in Eqs. (A24) and (A25), as it should be to ensure the analytical properties of $\tilde{J}_\sigma(\alpha)$.

-
- [1] C. E. Porter, *Statistical Theories of Spectra: Fluctuations* (Academic Press, New York, 1965)
 - [2] M. L. Mehta, *Random Matrix Theory* (Springer, New York, 1990).
 - [3] O. Bohigas, in *Chaos and Quantum Mechanics*, edited by M.-J. Giannoni, A. Voros, and Z. Zinn-Justin, Les Houches

Summer School Lectures LII, 1989 (North Holland, Amsterdam, 1991), p. 87.

- [4] M.V. Berry and M. Tabor, Proc. R. Soc. London, Ser. A **349**, 101 (1976); J. Phys. A **10**, 371 (1977).
- [5] O. Bohigas, M.-J. Giannoni, and C. Schmit, Phys. Rev. Lett. **52**, 1 (1984).

- [6] J. Marklof, Commun. Math. Phys. **199**, 169 (1998).
- [7] A.V. Andreev *et al.*, Phys. Rev. Lett. **75**, 2304 (1995).
- [8] A.V. Andreev and B.L. Altshuler, Phys. Rev. Lett. **75**, 902 (1995).
- [9] O. Agam, B.L. Altshuler, and A.V. Andreev, Phys. Rev. Lett. **75**, 4389 (1995).
- [10] E.B. Bogomolny and J.P. Keating, Phys. Rev. Lett. **77**, 1472 (1996).
- [11] B.I. Shklovskii *et al.*, Phys. Rev. B **47**, 11 487 (1993).
- [12] E. Bogomolny, U. Gerland, and C. Schmit, Eur. Phys. J. B **19**, 121 (2001).
- [13] E. Bogomolny, U. Gerland, and C. Schmit, Phys. Rev. E **63**, 036206 (2001).
- [14] E. Bogomolny, U. Gerland, and C. Schmit, Phys. Rev. E **59**, R1315 (1999).
- [15] M. Gaudin, Nucl. Phys. **85**, 545 (1966); P.J. Forrester, Phys. Lett. A **173**, 355 (1993).
- [16] S. Albeverio, F. Gesztesy, R. Høegh-Krohn, and H. Holden, *Solvable Models in Quantum Mechanics* (Springer, New York, 1988).
- [17] P. Šeba, Phys. Rev. Lett. **64**, 1855 (1990).
- [18] G. Berkolaiko, E.B. Bogomolny, and J.P. Keating, J. Phys. A **34**, 335 (2001).
- [19] M. Sieber, J. Phys. A **32**, 7679 (1999).
- [20] I.L. Aleiner and K.A. Matveev, Phys. Rev. Lett. **80**, 814 (1998).
- [21] E.B. Bogomolny, P. Leboeuf, and C. Schmit, Phys. Rev. Lett. **85**, 2486 (2000).
- [22] T. Jonckheere, B. Gremaud, and D. Delande, Phys. Rev. Lett. **81**, 2442 (1998).
- [23] H. Bateman and A. Erdélyi, *Higher Transcendental Functions* (McGraw-Hill, New York, 1953), Vol. II.

Article 3

Semiclassical Calculations of the Two-Point Correlation Form Factor for Diffractive Systems

Semiclassical calculations of the two-point correlation form factor for diffractive systems

E Bogomolny and O Giraud

Laboratoire de Physique Théorique et Modèles Statistiques¹, Université de Paris XI, Bât. 100, 91405 Orsay Cedex, France

Received 9 October 2001

Published 22 April 2002

Online at stacks.iop.org/Non/15/993

Recommended by L Bunimovich

Abstract

The computation of the two-point correlation form factor $K(\tau)$ is performed for a rectangular billiard with a small-size impurity inside for both periodic or Dirichlet boundary conditions. It is demonstrated that all terms of perturbation expansion of this form factor in powers of τ can be computed directly from a semiclassical trace formula. The main part of the calculation is the summation of nondiagonal terms in the cross product of classical orbits. When the diffraction coefficient for the scattering on the impurity is a constant our results coincide with the expansion of exact expressions obtained earlier by a different method.

Mathematics Subject Classification: 81Q20, 81Q50, 78A45

1. Introduction

It is widely accepted that statistical properties of the energy levels of a quantum problem are determined mainly by the nature of its classical motion. Thus spectral statistics of classically chaotic systems follow the random matrix predictions [2,3] and spectral statistics of classically integrable models agree with the Poisson statistics [4]. A lot of numerical evidence (see e.g. [5]) and partial analytical arguments [6–19] strongly support these conjectures.

But there are models which (for various reasons) do not fit into the above scheme. A notable example is given by the so-called diffractive systems where one or a few small-size scatters are added to an otherwise smooth model. In classical mechanics point-like singularities affect only a zero-measure set of trajectories which directly hit them but in quantum mechanics singularities often lead to important effects. Though the addition of a scatter to a chaotic system has no effect on its spectral statistics [10] even one small-size impurity changes completely the statistical properties of integrable models [11].

¹ Unité Mixte de Recherche de l'Université Paris XI et du CNRS (UMR 8626).

The difference between chaotic and integrable models can intuitively be understood as follows. In chaotic systems classical trajectories and quantum wave functions cover the whole surface of constant energy and the addition of a few centres of scattering can not change this property. On the other hand, in integrable models trajectories and wave functions are confined to invariant tori and small-size scatters will, in general, induce transitions between different tori, qualitatively changing the nature of motion.

The investigation of integrable models with short-range scatters has been initiated in [11] (see also [12] and references therein) and recently attracts wide attention from both experimental and theoretical points of view. Experimentally, non-hydrogenic atoms in external fields [13] are just a possible realization of such models. Theoretically, these models are rare examples where spectral statistics can be computed analytically.

In [1] the two-point correlation function for a rectangular billiard with a delta-function potential has been computed exactly and in [14] the nearest-neighbour distributions for this model were obtained. The main conclusion of these works is that the spectral statistics of diffractive systems belong to the so-called intermediate type. Intermediate spectral statistics describe level repulsion like random matrix ensembles but the nearest-neighbour distribution has exponential decrease like Poisson statistics. These mixed properties of diffractive systems are similar to spectral statistics of the three-dimensional Anderson model at the metal–insulator transition point [15].

The purpose of this paper is the investigation of spectral statistics of diffractive systems by semiclassical methods. Our starting point is the trace formula for diffractive systems derived in [16, 17] which allows us to express the Green's function and all related quantities as a sum over periodic and diffractive orbits. The two-point correlation function is obtained as usual by smoothing the product of two densities of states over a small energy interval. It has been shown in [18] that the linear, in τ , term in the expansion of the two-point correlation form factor $K(\tau)$ can be obtained by a diagonal approximation, which consists of taking into account only contributions from pairs of orbits with exactly the same length, and summing them using the Hannay–Ozorio de Almeida sum rule [19].

The main difficulty of obtaining the higher-order terms of the expansion of $K(\tau)$ in powers of τ is the necessity to take into account nondiagonal contributions of classical orbits with slightly different actions. The method which permits us to solve this problem for integrable systems was proposed in [20]. Using and simplifying it we construct all terms of perturbation series expansion of the two-point correlation form factor $K(\tau)$ into a series of τ for rectangular billiard with a delta-function impurity for both periodic and Dirichlet boundary conditions. The results agree with the expansion of exact formulae obtained in [1].

The model with a delta-function potential is characterized by a constant diffraction coefficient. It is of interest to consider more general models with a non-constant diffraction coefficient. Though the exact solutions of such models are not known we construct the perturbation series expansion of $K(\tau)$ in this case as well. Such an expansion is possible only if we assume that the diffraction coefficient remains finite for all scattering directions. Though this condition is very natural there are models where it is not fulfilled. Important examples of such systems are pseudo-integrable billiards and billiards with Aharonov–Bohm flux lines for which the diffraction coefficient formally diverges at certain directions (called optical boundaries) (see e.g. [20]). The construction of perturbation series for such models is beyond the scope of this paper.

The plan of the paper is the following. The trace formula for diffractive systems is briefly discussed in section 2. In section 3 the detailed discussion of perturbation series for the form factor of a rectangular billiard with delta-function potential and Dirichlet boundary conditions is presented. The main part of this section is devoted to the summation of nondiagonal

contributions. In section 4 the case of Dirichlet boundary conditions is discussed and in section 5 the case of arbitrary diffraction coefficient is considered. The expansion of the exact expression of $K(\tau)$ for rectangular billiards with constant diffraction coefficient obtained in [1] is derived in the appendix.

2. Trace formula for diffractive systems

The starting point of the modern semiclassical approximation for multi-dimensional quantum systems is the semiclassical approximation for the (advanced) Green's function as a sum over classical trajectories with energy E starting from initial point $\vec{x}$ with momentum in the direction $\vec{n}$ and ending at final point $\vec{y}$ with the momentum in the direction $\vec{n}'$ [21, 22]:

$$G(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_{\text{tr}} G((\vec{x}, \vec{n}), (\vec{y}, \vec{n}')), \quad (1)$$

where the contribution from each trajectory has the form

$$G((\vec{x}, \vec{n}), (\vec{y}, \vec{n}')) = A_{\text{tr}} \exp \left(\frac{i}{\hbar} S_{\text{cl}} - i \frac{\pi}{2} \nu \right). \quad (2)$$

$S_{\text{cl}} = S_{\text{cl}}(E, \vec{x}, \vec{y})$ is the classical action computed along the trajectory,

$$A_{\text{tr}} = \frac{m}{i\hbar(2\pi\hbar)^{(1/2)(f-1)}} \left| \frac{1}{kk'} \det \frac{\partial^2 S_{\text{cl}}}{\partial y \partial y'} \right|^{1/2}, \quad (3)$$

where m is the mass, f is the dimension of the space, y and y' are coordinates perpendicular to the trajectory (respectively at initial and final point), k and k' are initial and final momenta, and ν is a phase (the Maslov index) which, roughly speaking, counts points where simple semiclassical approximation breaks down. Of course, variables $(\vec{x}, \vec{n})$ and $(\vec{y}, \vec{n}')$ are not all independent, and the sum (1) over classical trajectories must take into account, for each given starting point and momentum $(\vec{x}, \vec{n})$, all classically allowed final points and momenta.

For two-dimensional free motion these formulae take an especially simple form and the free Green's function (in the units $m = \frac{1}{2}$ and $\hbar = 1$) reads (see e.g. [24])

$$G(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_{\text{tr}} \frac{e^{ikl - i(\pi/2)\nu - i(3\pi/4)}}{\sqrt{8\pi kl}}, \quad (4)$$

where l is the length of the trajectory.

The knowledge of the Green's function permits us to compute other quantum quantities. In particular the quantum density of states

$$d(E) = \sum_n \delta(E - E_n) \quad (5)$$

may formally be written, using the advanced Green's function, as

$$d(E) = -\frac{1}{\pi} \text{Im} \int d\vec{x} G(\vec{x}, \vec{x}). \quad (6)$$

The contribution from very short trajectories gives the mean level density, $\bar{d}$, and the integration of (4) over the whole space selects periodic orbit contributions [21–23] and determines an oscillating part of level density

$$d(E) = \bar{d} + d^{(\text{osc})}(E). \quad (7)$$

For any two-dimensional billiard

$$\bar{d} = \frac{\mathcal{A}}{4\pi}, \quad (8)$$

where $\mathcal{A}$ is the area of the billiard. The explicit form of $d^{(\text{osc})}(E)$ depends on the system considered (see e.g. [21–23]).

Diffraction systems discussed in the paper are characterized by the existence of singularities which make the classical motion undetermined. Each time a classical trajectory hits a singularity there is no unique way to continue it. Quantum mechanics smoothes out these singularities and associates with each (not too strong) singularity a diffraction coefficient, $\mathcal{D}(\vec{n}, \vec{n}')$, which determines a scattering amplitude on this singularity from the initial direction $\vec{n}$ to the final direction $\vec{n}'$. In the presence of a singularity the Green's function in the whole space has two contributions

$$G(\vec{x}, \vec{x}') = G_0(\vec{x}, \vec{x}') + G_d(\vec{x}, \vec{x}') \quad (9)$$

where $G_0(\vec{x}, \vec{x}')$ is the free Green's function (4) and $G_d(\vec{x}, \vec{x}')$ is the contribution of trajectories that hit the singularity

$$G_d(\vec{x}, \vec{x}') = \sum_{\vec{n}, \vec{n}'} G_0(\vec{x}, (\vec{x}_0, \vec{n})) \mathcal{D}(\vec{n}, \vec{n}') G_0((\vec{x}_0, \vec{n}'), \vec{x}') \quad (10)$$

where $\mathcal{D}(\vec{n}, \vec{n}')$ defined by equation (10) is called the diffraction coefficient. Here the quantity $G_0(\vec{x}, (\vec{x}_0, \vec{n}))$ is a contribution to the Green's function from a classical trajectory starting at point $\vec{x}$ and ending at the singularity $\vec{x}_0$ with momentum in the direction $\vec{n}$; $G_0((\vec{x}_0, \vec{n}'), \vec{x}')$ is a contribution to the Green's function from a classical trajectory starting at point $\vec{x}_0$ with momentum in the direction $\vec{n}'$ and ending at point $\vec{x}'$.

For diffractive systems the density of states (6) can be written as the sum of three terms [16, 17, 25],

$$d(E) = \bar{d} + d_{\text{po}}(E) + d_{\text{do}}(E), \quad (11)$$

where $\bar{d}$ is the mean level density, d_{po} is the contribution of periodic orbits without singularity, and the third term, $d_{\text{do}}(E)$, is a contribution from all classical trajectories starting and ending at the singularity, called diffractive orbits,

$$d_{\text{do}}(E) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\pi m} \frac{\partial}{\partial E} \text{Im} \sum_{\vec{n}_i, \vec{n}'_j} G(\vec{n}_1, \vec{n}'_1) \mathcal{D}(\vec{n}'_1, \vec{n}_2) \cdots G(\vec{n}_m, \vec{n}'_m) \mathcal{D}(\vec{n}'_m, \vec{n}_1), \quad (12)$$

where $G(\vec{n}, \vec{n}')$ is now the contribution to the Green's function from a classical trajectory starting at the singular point with initial momentum in direction $\vec{n}$ and ending at it with final momentum in direction $\vec{n}'$.

For elastic scattering the diffraction coefficient cannot be arbitrary but has to obey the optical theorem which is the manifestation of the quantum mechanical unitarity. In the most general form the optical theorem in two dimensions is [26]

$$\mathcal{D}(\vec{n}, \vec{n}') - \bar{\mathcal{D}}(\vec{n}', \vec{n}) = -\frac{i}{4\pi} \int \mathcal{D}(\vec{n}, \vec{n}'') \bar{\mathcal{D}}(\vec{n}', \vec{n}'') d\phi'', \quad (13)$$

where $d\phi''$ is the angle giving the direction of $\vec{n}''$.

In particular, a constant diffraction coefficient should have the form

$$\mathcal{D} = \frac{\lambda}{1 + (i/4)\lambda}, \quad (14)$$

with real λ .

3. Periodic boundary conditions

Let us consider a rectangular billiard with sides a and b and with a point-like scatter at a point (x_0, y_0) inside the rectangle. We always assume that the ratio a^2/b^2 is a ‘good’ (diophantine) irrational number. This generic requirement is necessary to avoid ‘accidental’ degeneracies of periodic orbit lengths and under this condition it is possible to prove [9] that the two-point correlation function of such a rectangular billiard in the ‘free’ case (i.e. without scatter) agrees with the Poisson statistics. In this section we impose periodic boundary conditions.

Figure 1 shows a classical periodic orbit in the rectangle. Since opposite sides of the rectangle are identified, one can unfold a classical trajectory to a straight line on the plane tiled with rectangles; the images of the point-like scatter have coordinates $\{x_0 + Ma, y_0 + Nb\}$, $M, N \in \mathbb{Z}$.

The unperturbed energy levels of a rectangular billiard with periodic boundary conditions are

$$E = \left(\frac{2\pi}{a}n\right)^2 + \left(\frac{2\pi}{b}m\right)^2 \quad (15)$$

for all integers $m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

When $mn \neq 0$, energy levels have multiplicity 4. To remove this trivial degeneracy it is convenient to consider nondegenerate states only. Asymptotically it gives the factor 1/4 in the periodic orbit density of states and to be consistent with [20] and equations (6) and (10) it is necessary to multiply the diffraction coefficient by $g = 4$ (see below).

Therefore in our case the smooth part will be

$$\bar{d} = \frac{\mathcal{A}}{16\pi}, \quad (16)$$

where $\mathcal{A} = ab$ is the area of the rectangle. The contribution of the periodic orbits to the density of states is given by [23]

$$d_{\text{po}}(E) = \sum_{p^+} \frac{\mathcal{A}_p}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{8\pi k l_p}} e^{ikl_p - i(\pi/2)\nu_p - i(\pi/4)} + \text{c.c.} \quad (17)$$

where

$$l_p = \sqrt{(Ma)^2 + (Nb)^2} \quad (18)$$

is the length of a periodic orbit. In all integrable billiards periodic orbits are not isolated but belong to families which cover an area $\mathcal{A}_p$ (see figure 1). For the rectangular billiard with

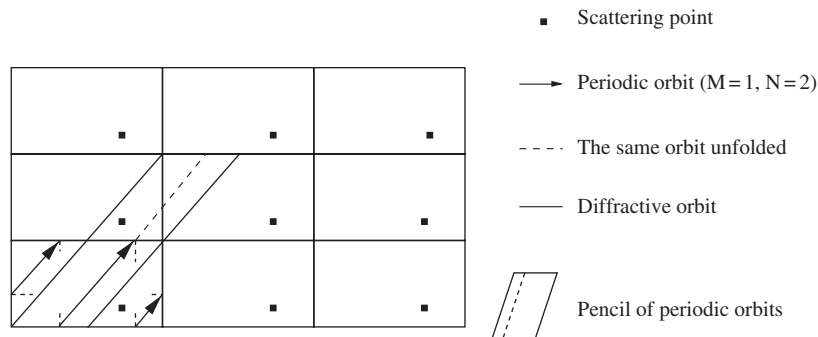


Figure 1. An unfolded trajectory in the rectangle.

periodic boundary conditions the area covered by any family of periodic orbits is $\mathcal{A}_p = \mathcal{A}$. Since $d_{\text{po}}(E)$ corresponds to the nondegenerate density of states, the summation in (17) is performed over all periodic orbits of length l_p with $M, N \geq 0$ (which corresponds to division by 4 of the density (6)); this is expressed by the index p^+ .

3.1. Diffractive density of states

The third term in the density (11) is the ‘density of diffractive orbits’ (12), i.e. the contribution of classical trajectories starting and ending at the singularity. The diffraction coefficient for our model is a constant given by (14). The Green’s functions in (12) can be expressed as a sum over all diffractive orbits, i.e. over all vectors

$$\vec{l}_d = (Ma, Nb) \quad (19)$$

linking two images of the scatter in the plane tiled with rectangles:

$$G = \sum_{\vec{n}, \vec{n}'} G(\vec{n}, \vec{n}') = \sum_{\vec{l}_d} \frac{e^{ikl_d - i(\pi/2)\nu_d - i(3\pi/4)}}{\sqrt{8\pi k l_d}}, \quad (20)$$

where l_d is given by an expression identical to (18):

$$l_d = \sqrt{(Ma)^2 + (Nb)^2}. \quad (21)$$

Note that when $MN \neq 0$ there are $g = 4$ diffractive orbits with exactly the same lengths corresponding to $\pm M, \pm N$. As the Green’s functions enter in the diffractive trace formula (12) always multiplied by the diffraction coefficient it is convenient to restrict the summation in (20) to $M, N \geq 0$ and to multiply the diffraction coefficient by $g = 4$.

Each term in (12) involving m Green’s functions gives the following contribution to the density of states:

$$\begin{aligned} d_{\text{do}}^{(m)}(E) &= \frac{(g\mathcal{D})^m}{4im\pi k} \frac{\partial}{\partial k} \left(\sum_{\vec{n}, \vec{n}'} G(\vec{n}, \vec{n}') \right)^m + \text{c.c.} \\ &= \frac{(g\mathcal{D})^m}{4im\pi k} \frac{\partial}{\partial k} \sum_{\vec{l}_1, \dots, \vec{l}_m} \frac{e^{ikl_1 - 3i\pi/4}}{\sqrt{8\pi k l_1}} \dots \frac{e^{ikl_m - 3i\pi/4}}{\sqrt{8\pi k l_m}} + \text{c.c.} \end{aligned} \quad (22)$$

$\vec{l}_1, \dots, \vec{l}_m$ are m diffractive orbits vectors and l_j are their lengths. The Maslov index in the periodic case is equal to zero.

The method which permits to treat such sums has been proposed in [20]. Its main content is the existence in the sums over orbits $\vec{l}_j$ of saddle-point manifolds which correspond to vectors $\vec{l}_j$ almost parallel to a given vector $\vec{L}$ (see figure 2).

When the m th power of the Green’s function, G^m , is considered we can distinguish different saddle point manifolds [20]. The first corresponds to the case when all m vectors $\vec{l}_1, \dots, \vec{l}_m$ are close to a unique fixed vector $\vec{L}$. The others are given by contributions where the $\vec{l}_j$, $1 \leq j \leq m$, are gathered into p groups ($2 \leq p \leq m$) with the following properties:

- (i) within each group all vectors are almost parallel to a vector $\vec{L}_i$;
- (ii) the p vectors $\vec{L}_i$ are quite far from each other (and in particular their lengths are different).

Let us first order vectors $\vec{L}_1, \dots, \vec{L}_p$ by a certain manner, e.g. according to their lengths

$$L_1 < L_2 < \dots < L_p. \quad (23)$$

Because it is assumed that all L_j are different, it is always possible.

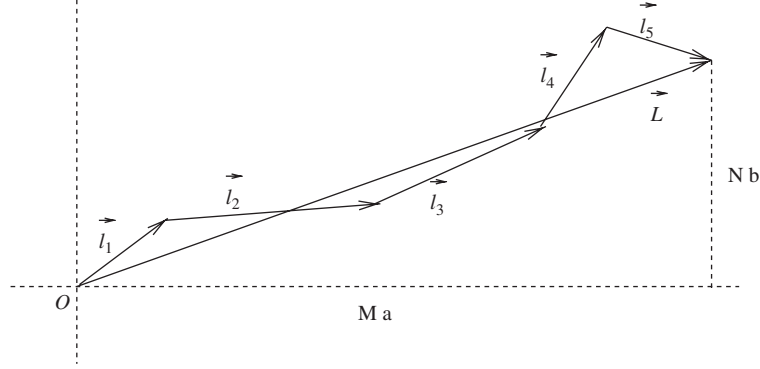


Figure 2. A saddle point contribution to $G^m(\vec{L})$.

Then following [20] one can write the formal expression:

$$G^m = \sum_{p=1}^m \sum_{\vec{L}_1, \dots, \vec{L}_p} G_p^m(\vec{L}_1, \dots, \vec{L}_p), \quad (24)$$

where G is given by (20) and

$$G_p^m(\vec{L}_1, \dots, \vec{L}_p) = \sum_{\substack{m_1 + \dots + m_p = m \\ m_i \geq 1}} N(m_1, \dots, m_p) \sum_{\vec{l}_1, \dots, \vec{l}_m} \frac{e^{ikl_1 - 3i\pi/4}}{\sqrt{8\pi kl_1}} \dots \frac{e^{ikl_m - 3i\pi/4}}{\sqrt{8\pi kl_m}} \\ \times \delta(\vec{l}_1 + \dots + \vec{l}_{m_1} - \vec{L}_1) \dots \delta(\vec{l}_{m_1 + \dots + m_{p-1} + 1} + \dots + \vec{l}_m - \vec{L}_p) \quad (25)$$

for any partition $m_1 + \dots + m_p = m$ of m into a sum of p integers. It is assumed that vectors $\vec{l}_j$ all have positive components. $N(m_1, \dots, m_p)$ is the number of possible permutations of the $\vec{l}_j$ and will be discussed later.

The meaning of this representation is the following (for more details see [20]). The amplitudes corresponding to vectors almost parallel (i.e. belonging to the same group) should be summed coherently but the ones with different vectors $\vec{L}_j$ (that is from different groups) are noncoherent. Therefore after a smoothing over a small energy window only the square of the amplitudes of noncoherent contributions will survive.

Let us consider at first the case where $m = 2$ and $p = 1$ (see figure 3)

$$G_1^2(\vec{L}) = \sum_{\vec{l}_1, \vec{l}_2} \frac{e^{ikl_1 - 3i\pi/4}}{\sqrt{8\pi kl_1}} \frac{e^{ikl_2 - 3i\pi/4}}{\sqrt{8\pi kl_2}} \delta(\vec{l}_1 + \vec{l}_2 - \vec{L}) \quad (26)$$

(in this case the symmetry factor $N(2)$ is equal to 1). We have to sum products of two Green's functions over all vectors $\vec{l}_1 = (m_1 a, n_1 b)$ and $\vec{l}_2 = (m_2 a, n_2 b)$ satisfying the condition

$$\vec{l}_1 + \vec{l}_2 = \vec{L}. \quad (27)$$

It means that we sum over all positive integers m_1, n_1, m_2, n_2 such that this condition is satisfied. Changing the sum into an integral, we have to integrate over m_i and n_i ($i = 1, 2$). In the coordinates (x, y) where $\vec{L} = (0, L)$ (see figure 3) we set $\vec{l}_1 = (x, y)$, so that $\vec{l}_2 = (L - x, y)$: since $dm_1 dn_1 = dx dy / \mathcal{A}$, we get

$$G_1^2(\vec{L}) = \int dm_i dn_i \frac{e^{ikl_1 - 3i\pi/4}}{\sqrt{8\pi kl_1}} \frac{e^{ikl_2 - 3i\pi/4}}{\sqrt{8\pi kl_2}} \delta(\vec{l}_1 + \vec{l}_2 - \vec{L}) \\ = \frac{1}{\mathcal{A}} \int_0^L dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \frac{e^{ikl_1 - 3i\pi/4}}{\sqrt{8\pi kl_1}} \frac{e^{ikl_2 - 3i\pi/4}}{\sqrt{8\pi kl_2}} \quad (28)$$

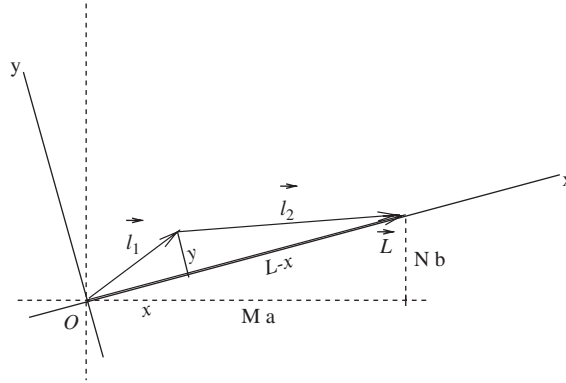


Figure 3. Contributions to the product of two Green's functions.

(the condition $0 \leq x \leq L$ is necessary to have $\vec{l}_1$ and $\vec{l}_2$ in the upper right quadrant). In the semiclassical limit where $k \rightarrow \infty$ we use

$$l_1 + l_2 \simeq L + \frac{L}{2x(L-x)} y^2 \quad (29)$$

and after performing the integrals

$$G_1^2(\vec{L}) = \frac{L}{2ik\mathcal{A}} \frac{e^{ikL-3i\pi/4}}{\sqrt{8\pi kL}}. \quad (30)$$

More generally this method can be iterated to get

$$G_1^m(\vec{L}) = \left(\frac{L}{2ik\mathcal{A}} \right)^{m-1} \frac{1}{(m-1)!} \frac{e^{ikL-3i\pi/4}}{\sqrt{8\pi kL}}. \quad (31)$$

The saddle-point manifold in this case is the space of sets of m vectors almost parallel to $\vec{L}$ such that their sum is equal to $\vec{L}$ (see figure 2). This result can also be obtained, almost without calculations, by using Stokes' theorem.

It may be noticed that the part of the Green's function corresponding to the sum of contributions G_1^m , $\sum_{m=1}^{\infty} (g\mathcal{D})^{m-1} G_1^m(\vec{L})$, is the perturbation series expansion of the Green's function and from (31) one gets

$$\sum_{m=1}^{\infty} (g\mathcal{D})^{m-1} G_1^m(\vec{L}) = \exp\left(\frac{\rho g\mathcal{D}}{2ik} L\right) G(L), \quad (32)$$

where $\rho = 1/\mathcal{A}$ is the density of scatters and

$$G(L) = \frac{e^{ikL-3i\pi/4}}{\sqrt{8\pi kL}} \quad (33)$$

is the usual contribution to the free Green's function of a classical trajectory of length L . The result (32) is exactly the exponential attenuation one expects for the coherent propagation of a particle in a diffractive medium with coefficient of diffraction $\mathcal{D}$.

The terms $G_p^m(\vec{L}_1, \dots, \vec{L}_p)$ can be computed (see [20]) by the same method by considering all possible partitions of the m vectors into p groups of almost parallel vectors. But in this case a combinatorial factor which counts the exact degeneracies has to be taken into account. For a given partition of m into a sum of p integers $m_1, \dots, m_p$,

$$m_1 + \dots + m_p = m, \quad (34)$$

we obtain a saddle point manifold in the sum (25) by choosing m_1 vectors parallel to $\vec{L}_1$, m_2 vectors parallel to $\vec{L}_2$, and so on. But the numbers m_i do not fix a diffractive trajectory uniquely. Trajectories built from the same set of primitive diffractive orbits connected in a different order have exactly the same lengths and numbers m_i .

All such trajectories correspond to one of the permutation of the following sequence of p symbols:

$$\underbrace{1 \dots 1}_{m_1} \underbrace{2 \dots 2}_{m_2} \dots \underbrace{p \dots p}_{m_p} \quad (35)$$

where it is assumed that in the sequence there exist m_1 symbols of type 1, m_2 symbols of type 2, etc, and finally m_p symbols of type p . Each symbol j corresponds to a different vector $\vec{L}_j$ defining a certain primitive diffractive orbit and a permutation of the sequence (35) describes how a composite diffractive orbit is built.

For example, in figure 4 trajectories with $m = 4$ and $p = 2$ are depicted. Figure 4(a) corresponds to all partitions with $m_1 = 3$ and $m_2 = 1$:

$$1112 \ 1121 \ 1211 \ 2111 \quad (36)$$

and figure 4(b) represents partitions with $m_1 = m_2 = 2$:

$$1122 \ 1212 \ 1221 \ 2211 \ 2121 \ 2112. \quad (37)$$

In these figures trajectories of types 1 and 2 are represented respectively by horizontal and vertical lines. Since the diffraction coefficient is a constant the corresponding saddle point manifolds (consisting of trajectories close to these exactly degenerate ones) all give the same contribution to the density d_{do} ; therefore the contribution from one saddle point has to be multiplied by their number which is the number of partitions of m into p groups with m_i elements in the i th group,

$$N(m_1, \dots, m_p) = \frac{(m_1 + \dots + m_p)!}{m_1! \dots m_p!}. \quad (38)$$

These exact multiplicities of diffraction orbits clearly demonstrate the difference between scattering on regular and random arrays. For a random distribution of scattering points all trajectories as at figure 4 will have different lengths but, because in our model all points of diffraction are copies of the same scattering point, these trajectories have equal lengths. Finally

$$G_p^m(\vec{L}_1, \dots, \vec{L}_p) = \sum_{\substack{m_1 + \dots + m_p = m \\ m_i \geq 1}} \frac{m!}{m_1! \dots m_p!} \prod_{i=1}^p \left(\frac{L_i}{2ik\mathcal{A}} \right)^{m_i-1} \frac{G(L_i)}{(m_i-1)!}, \quad (39)$$

where $G(L)$ is defined in (33).

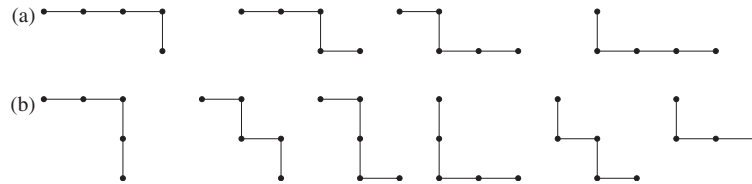


Figure 4. Trajectories with $m = 4$ and $p = 2$ with exactly the same length. (a) $m_1 = 3, m_2 = 1$; (b) $m_1 = 2, m_2 = 2$.

According to equation (22), the density of diffractive orbits is the derivative of the powers of the Green's function. To get the leading term in the semiclassical approximation it is necessary to differentiate only the exponent and the diffractive density of states takes the form

$$d_{\text{do}}(E) = \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{L_1 < \dots < L_p} d_{\text{do}}^{(p)}(L_1, \dots, L_p) G(L_1) \cdots G(L_p) + \text{c.c.}, \quad (40)$$

where $\vec{L}_1, \dots, \vec{L}_p$ are summed over the upper-right quadrant and

$$\begin{aligned} d_{\text{do}}^{(p)}(L_1, \dots, L_p) &= \frac{L_1 + \dots + L_p}{4\pi k} \sum_{m=p}^{\infty} \frac{1}{m} \sum_{\substack{m_1 + \dots + m_p = m \\ m_i \geq 1}} R(m_1, \dots, m_p) \\ &\times \left(\frac{L_1}{2ik\mathcal{A}} \right)^{m_1-1} \frac{1}{(m_1-1)!} \cdots \left(\frac{L_p}{2ik\mathcal{A}} \right)^{m_p-1} \frac{1}{(m_p-1)!}, \end{aligned} \quad (41)$$

where

$$R(m_1, \dots, m_p) = (g\mathcal{D})^{m_1 + \dots + m_p} \frac{(m_1 + \dots + m_p)!}{m_1! \cdots m_p!}; \quad (42)$$

$d_{\text{do}}^{(p)}(L_1, \dots, L_p)$ is the contribution of all diffractive trajectories (like those in figure 4) built from m_1 vectors $\vec{L}_1$, m_2 vectors $\vec{L}_2$, etc.

The term with $p = 1$ is

$$d_{\text{do}}^{(1)}(L) = \frac{i\mathcal{A}}{2\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} \left(\frac{g\mathcal{D}L}{2ik\mathcal{A}} \right)^m = \frac{i\mathcal{A}}{2\pi} \left(\exp \left(\frac{g\mathcal{D}}{2ik\mathcal{A}} L \right) - 1 \right). \quad (43)$$

Since the contribution of periodic orbits (17) can be rewritten

$$\sum_L \frac{i\mathcal{A}}{2\pi} G(L), \quad (44)$$

one gets, adding all contributions,

$$d^{(\text{osc})}(E) = \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{L_1 < \dots < L_p} d_p(L_1, \dots, L_p) G(L_1) \cdots G(L_p) + \text{c.c.}, \quad (45)$$

where

$$d_1(L) = \frac{i\mathcal{A}}{2\pi} \exp \left(\frac{g\mathcal{D}}{2ik\mathcal{A}} L \right), \quad (46)$$

and $d_p(L_1, \dots, L_p) = d_{\text{do}}^{(p)}(L_1, \dots, L_p)$ for $p \geq 2$.

3.2. Two-point correlation form factor

The two-point correlation function is related with the level density by the usual formula

$$R_2(\epsilon) = \left\langle d \left(E + \frac{\epsilon}{2} \right) d \left(E - \frac{\epsilon}{2} \right) \right\rangle, \quad (47)$$

where the brackets denote an energy averaging around E over an interval of energy much larger than the mean level spacing $1/\bar{d}$ and much smaller than energy E .

The two-point correlation form factor is defined as the Fourier transform of the connected part of $R_2(\epsilon)$:

$$K(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\epsilon}{\bar{d}} \left\langle d^{(\text{osc})} \left(E + \frac{\epsilon}{2} \right) d^{(\text{osc})} \left(E - \frac{\epsilon}{2} \right) \right\rangle e^{2i\pi\bar{d}\epsilon\tau} \quad (48)$$

(the factors are chosen so that τ and $K(\tau)$ are dimensionless).

The advantage of the representation (45) is that it is a sum over saddle points (each set of vectors $(\vec{L}_1, \dots, \vec{L}_p)$ for $p \geq 1$ is a saddle point) which are uncorrelated, so we can apply the usual diagonal approximation to this sum: in the cross product (48) only squares of terms corresponding to a given saddle point will give a contribution.

Using the expansion of momentum $\sqrt{E + \epsilon} \simeq \sqrt{E} + \epsilon/(2\sqrt{E})$ we get

$$R_2(\epsilon) = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{(8\pi k)^p} \sum_{L_1 < \dots < L_p} |d_p(L_1, \dots, L_p)|^2 \frac{e^{i\epsilon(L_1 + \dots + L_p)/(2k)}}{L_1 \dots L_p} + \text{c.c.}, \quad (49)$$

where $d_p(L_1, \dots, L_p)$ are defined in (45).

As all quantities depend only of the lengths of vectors $\vec{L}_i$ and $L_i \rightarrow \infty$ one can substitute the summation over $\vec{L}_i$ by the integration with the density,

$$\rho(l) = \int_0^{\infty} dM dN \delta(l - \sqrt{(Ma)^2 + (Nb)^2}) = \frac{\pi l}{2\mathcal{A}}. \quad (50)$$

(Recall that we consider vectors in the upper-right quadrant with positive M, N .)

Because

$$\sum_{L_1 < \dots < L_p} = \frac{1}{p!} \sum_{L_1, \dots, L_p} \quad (51)$$

for any symmetric summand one obtains

$$R_2(\epsilon) = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p!} \int_0^{\infty} \frac{dL_1}{16\mathcal{A}k} \dots \int_0^{\infty} \frac{dL_p}{16\mathcal{A}k} |d_p(L_1, \dots, L_p)|^2 e^{i\epsilon(L_1 + \dots + L_p)/(2k)} + \text{c.c.} \quad (52)$$

The two-point correlation form factor has a similar form

$$K(\tau) = \sum_{p=1}^{\infty} K_p(\tau), \quad (53)$$

where

$$K_p(\tau) = \frac{4\pi k}{\bar{d}p!} \int_0^{\infty} \frac{dL_1}{16\mathcal{A}k} \dots \int_0^{\infty} \frac{dL_p}{16\mathcal{A}k} |d_p(L_1, \dots, L_p)|^2 \times \delta(L_1 + \dots + L_p - 4\pi \bar{d}k\tau), \quad (54)$$

and $\bar{d} = \mathcal{A}/16\pi$.

The term with $p = 1$ is especially simple (see (46))

$$K_1(\tau) = \left| \exp\left(-i \frac{\mathcal{D}g}{8} \tau\right) \right|^2. \quad (55)$$

Using the optical theorem (13) this expression can be rewritten in the following form:

$$K_1(\tau) = \exp\left(-\frac{|\mathcal{D}|^2 g}{16} \tau\right). \quad (56)$$

Substituting (41) into (54) one obtains the contributions from terms with $p \geq 2$ (we define τ_i by $L_i = 4\pi k \bar{d} \tau_i$):

$$\begin{aligned} K_p(\tau) = & \frac{\tau^2}{p!} \int_0^{\infty} d\tau_1 \dots \int_0^{\infty} d\tau_p \sum_{m, n \geq p} \sum_{\substack{m_1 + \dots + m_p = m \\ n_1 + \dots + n_p = n}} \frac{(8i)^{-m} (-8i)^{-n}}{mn} \\ & \times R(m_1, \dots, m_p) \bar{R}(n_1, \dots, n_p) \left[\prod_{i=1}^p \frac{\tau_i^{m_i + n_i - 2}}{(m_i - 1)!(n_i - 1)!} \right] \delta(\tau_1 + \dots + \tau_p - \tau) \end{aligned} \quad (57)$$

where all $m_i, n_i \geq 1$. The remaining integral has the form

$$J(\tau) = \int_0^\infty d\tau_1 \cdots d\tau_p \tau_1^{m_1+n_1-2} \cdots \tau_p^{m_p+n_p-2} \delta(\tau_1 + \cdots + \tau_p - \tau) \quad (58)$$

and can easily be computed by the Laplace transform

$$J(\tau) = \frac{\tau^{m+n-p-1}}{(m+n-p-1)!} \prod_{r=1}^p (m_r + n_r - 2)!. \quad (59)$$

With equations (57)–(59) one obtains the contribution to the form factor:

$$K_p(\tau) = \frac{1}{p!} \sum_{m,n \geq p} \sum_{\substack{m_1+\cdots+m_p=m \\ m_i \geq 1}} \sum_{\substack{n_1+\cdots+n_p=n \\ n_i \geq 1}} \frac{1}{mn} R(m_1, \dots, m_p) R(n_1, \dots, n_p) \\ \times \prod_{r=1}^p \left[\frac{(m_r + n_r - 2)!}{(m_r - 1)!(n_r - 1)!} \right] \frac{(8i)^{-m} (-8i)^{-n}}{(m+n-p-1)!} \tau^{m+n-p+1}. \quad (60)$$

Adding all factors together we finally get the complete perturbation series expansion of the two-point correlation form factor for rectangular billiard with a delta-function impurity and periodic boundary conditions:

$$K(\tau) = e^{-|\mathcal{D}|^2 g \tau / 16} + \sum_{p=2}^{\infty} \frac{1}{p!} \sum_{m,n \geq 0} A_{mnp} \left(\frac{-i\mathcal{D}g}{8} \right)^{m+p} \left(\frac{i\bar{\mathcal{D}}g}{8} \right)^{n+p} \tau^{m+n+p+1}, \quad (61)$$

where we have defined the rational numbers

$$A_{mnp} = \frac{(m+p-1)!(n+p-1)!}{(m+n+p-1)!} \sum_{m_i, n_j \geq 0} \prod_{i=1}^p \left[\frac{C_{m_i+n_i}^{m_i}}{(m_i+1)!(n_i+1)!} \right] \quad (62)$$

(the sum is taken over all nonnegative integers m_i and n_j satisfying $m_1 + \cdots + m_p = m$ and $n_1 + \cdots + n_p = n$). Recall that in our case $g = 4$. This result coincides with the expansion of the exact formula derived in [1] (see the appendix).

When $\tau \rightarrow 0$, $K(\tau) \rightarrow 1$, as expected for generic integrable billiards [18].

The special case $\mathcal{D} = -4i$ obtained for $\lambda \rightarrow \infty$ in (14) corresponds to spectral statistics of the star graphs [27] where equation (61) for this value of the diffraction coefficient yields

$$K(\tau) = e^{-4\tau} + \sum_{p=2}^{\infty} \frac{(-2)^{p-1}}{p!} \sum_{m,n \geq 0} A_{mnp} (-2\tau)^{m+n+p+1} \quad (63)$$

and can be derived by another method [28].

4. Dirichlet boundary conditions

Let us consider now the case where we impose Dirichlet conditions on the boundary of a rectangular billiard, which means that the eigenfunctions of the quantum problem vanish on the boundary. It is well known that for these boundary conditions the classical motion corresponds to the specular reflection on the boundary. For example, figure 5 shows a periodic orbit in the rectangle. One can unfold the trajectory to a straight line on the plane tiled with rectangles; the images of the point-like scatter have coordinates $\{(\epsilon_1 x_0 + 2M)a, (\epsilon_2 y_0 + 2N)b\}$, where, as before, (x_0, y_0) are coordinates of the scatter, M, N are in $\mathbb{Z}$ and ϵ_1 and ϵ_2 take the values ± 1 .

The density of states still contains three terms:

$$d(E) = \bar{d} + d_{\text{po}}(E) + d_{\text{do}}(E) \quad (64)$$

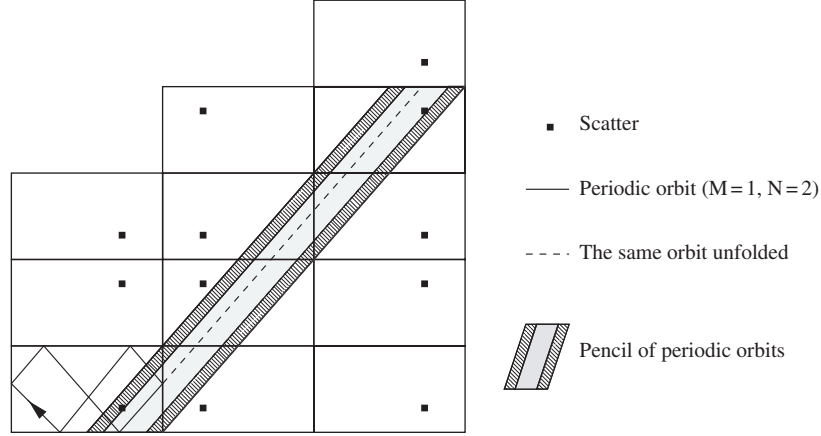


Figure 5. An unfolded trajectory in the rectangle.

but in this case the sum (5) over the eigenvalues is not degenerate any more. Therefore the smooth part is

$$\bar{d} = \frac{\mathcal{A}}{4\pi}, \quad (65)$$

where $\mathcal{A} = ab$ is the area of the rectangle. The density of periodic orbits is given by an expression similar to (17):

$$d_{\text{po}}(E) = g \sum_{p^*} \frac{\mathcal{A}}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{8\pi k l_p}} e^{i k l_p - i(\pi/2) v_p - i(\pi/4)} + \text{c.c.}, \quad (66)$$

where the summation is still performed over all periodic orbits of length l_p with $M, N \geq 0$. But here

$$l_p = \sqrt{(2Ma)^2 + (2Nb)^2}, \quad (67)$$

and for the rectangular billiard with Dirichlet boundary conditions the multiplicity of periodic orbit lengths is $g = 4$ for $MN \neq 0$.

The density of diffractive orbits is given by the usual formula (12) with diffraction coefficients (14). The Green's function in (12) can be expressed as a sum over all diffractive orbits, i.e. all vectors linking two images of the scatter in the plane tiled with rectangles:

$$G = \sum_{\vec{n}, \vec{n}'} G(\vec{n}, \vec{n}') = \sum_{\vec{l}_d} \frac{e^{i k l_d - i(\pi/2) v_d - i(3\pi/4)}}{\sqrt{8\pi k l_d}}, \quad (68)$$

where the sum is taken over $M, N \in \mathbb{Z}$ since there is no degeneracy of the energy levels any more; l_d is the length of a trajectory going from (x_0, y_0) to an image of the scatter.

As in the periodic case we could restrict our investigation to $M, N \geq 0$ but now we have to consider the 16 vectors whose lengths are almost equal. Those are vectors linking (x_0, y_0) to $(\pm 2Ma \pm x_0, \pm 2Nb \pm y_0)$. The lengths of these orbits are slightly different and can be expanded to the first order in $1/M, 1/N$. The vector linking (x_0, y_0) to $(2Ma + \epsilon_1 x_0, 2Nb + \epsilon_2 y_0)$ (with $\epsilon_i = \pm 1$) has a length

$$\begin{aligned} l_d &= \sqrt{(2Ma + (\epsilon_1 - 1)x_0)^2 + (2Nb + (\epsilon_2 - 1)y_0)^2} \\ &\simeq l_p + (\epsilon_1 - 1) \frac{2Max_0}{l_p} + (\epsilon_2 - 1) \frac{2Nby_0}{l_p}, \end{aligned} \quad (69)$$

where l_p is given by (67). Taking into account that for this trajectory and the Dirichlet boundary conditions the phase $\exp(-\frac{1}{2}i\pi v_d) = \epsilon_1 \epsilon_2$ the terms corresponding to a given (M, N) in the Green's function (68) can be gathered together. There are 16 types of such orbits corresponding to $\epsilon_1, \epsilon_2 = \pm 1$ and all possible changes of signs of M and N (see figure 9). Their sum is

$$\sum_{i=1}^{16} e^{ikl_i - i(\pi/2)v_i} = 16e^{ikl_p} \sin^2(\phi_1) \sin^2(\phi_2), \quad (70)$$

where

$$\phi_1 = 2k \frac{M}{l_p} x_0 a = kx_0 \cos \varphi, \quad (71)$$

$$\phi_2 = 2k \frac{N}{l_p} y_0 b = ky_0 \sin \varphi \quad (72)$$

and φ is the angle between the periodic orbit vector $\vec{L}$ and the horizontal side of the rectangle. For Neumann boundary conditions the sine function in the above expression should be substituted by the cosine function.

Therefore the difference between billiards with periodic boundary conditions considered in the previous section and the Dirichlet case is the factor $r(\varphi)$ in (68):

$$\sum_{\vec{n}, \vec{n}'} G(\vec{n}, \vec{n}') = g \sum_p \frac{e^{ikl_p - i(3\pi/4)}}{\sqrt{8\pi k l_p}} r(\varphi), \quad (73)$$

where the sum is taken over orbits with $M, N \geq 0$ and $g = 4$. Here we have set

$$r(\varphi) = 4 \sin^2 \phi_1(\varphi) \sin^2 \phi_2(\varphi). \quad (74)$$

Compared to the problem with periodic boundary conditions, the Green's function (25) is modified by a product of factors $r(\varphi_i)$, where φ_i is the angle between the periodic orbit $\vec{L}_i$ and the horizontal side of the rectangle. One can also leave the Green's function unchanged but substitute the constant diffraction coefficient $\mathcal{D}$ by an effective coefficient, $S(\varphi)$, defined by

$$S(\varphi) = \mathcal{D}r(\varphi), \quad (75)$$

and taken at the saddle point. The quantities $G_p^m(\vec{L}_1, \dots, \vec{L}_p)$ defined by equation (25) are unchanged, and performing the same steps as in the previous section one obtains the formula for the density of states quite similar to equations (41) and (45):

$$d^{(\text{osc})}(E) = \sum_{p=1}^{\infty} d_p(L_1, \dots, L_p) G(L_1) \cdots G(L_p) + \text{c.c.}, \quad (76)$$

where

$$d_1(L) = \frac{i\mathcal{A}}{2\pi} \exp\left(\frac{g\mathcal{D}r(\varphi)L}{2ik\mathcal{A}}\right) \quad (77)$$

and $d_p(L_1, \dots, L_p)$ is given by equation (41) with

$$R(m_1, \dots, m_p) = (g\mathcal{D})^{m_1 + \dots + m_p} \frac{(m_1 + \dots + m_p)!}{m_1! \cdots m_p!} r(\varphi_1)^{m_1} \cdots r(\varphi_p)^{m_p}. \quad (78)$$

The next steps of the computation of the two-point correlation form factor are almost the same as above. The only difference with the periodic case is the necessity to know the density of periodic orbits, $\rho(l, \varphi)$, with fixed length and angle. Like in (50) one gets

$$\rho(l, \varphi) = \frac{l}{4\mathcal{A}}. \quad (79)$$

In the semiclassical limit $k \rightarrow \infty$ under the assumption that the ratio $(x_0 a)/(y_0 b)$ is an irrational number the factors ϕ_1 and ϕ_2 in (71) and (72) are equivalent to independent random variables uniformly distributed between 0 and $\frac{1}{2}\pi$. It means that

$$\langle f \rangle = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} f(\phi_1(\varphi), \phi_2(\varphi)) d\varphi = \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} f(\phi_1, \phi_2) d\phi_1 d\phi_2 \quad (80)$$

for any smooth function $f(\phi_1, \phi_2)$.

The integration over the angle φ therefore gives for any integer n ,

$$\langle r(\varphi)^n \rangle = \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} d\phi_1 d\phi_2 r^n(\phi_1, \phi_2), \quad (81)$$

where we have set

$$r(\phi_1, \phi_2) = 4 \sin^2 \phi_1 \sin^2 \phi_2. \quad (82)$$

Of course, the introduction of $r(\phi_1, \phi_2)$ is just a convenient way to perform the generalized diagonal approximation where one takes into account not only trajectories with exactly the same lengths but also ones which have equal lengths up to the first-order expansion as in equation (69) (see [20]).

The only necessary integral is thus

$$\langle r^n \rangle = \frac{(C_{2n}^n)^2}{4^n} = \left(\frac{(2n)!}{2^n (n!)^2} \right)^2. \quad (83)$$

The final expression for the two-point correlation form factor of the rectangular billiard with Dirichlet boundary conditions is similar to equation (61)

$$K(\tau) = \langle e^{-|D|^2 g r \tau / 16} \rangle + \sum_{p=2}^{\infty} \frac{1}{p!} \sum_{m,n \geq 0} A_{mnp} \left(\frac{-ig\mathcal{D}}{8} \right)^{m+p} \left(\frac{ig\bar{\mathcal{D}}}{8} \right)^{n+p} \tau^{m+n+p+1}, \quad (84)$$

where

$$A_{mnp} = \frac{(m+p-1)!(n+p-1)!}{(m+n+p-1)!} \sum_{m_i, n_j \geq 0} \prod_{i=1}^p \left[\frac{C_{m_i+n_i}^{m_i} \langle r^{m_i+n_i+2} \rangle}{(m_i+1)!(n_i+1)!} \right]. \quad (85)$$

The sum here is taken as before over all nonnegative m_i and n_j satisfying $m_1 + \dots + m_p = m$ and $n_1 + \dots + n_p = n$ and the mean value $\langle \dots \rangle$ is evaluated in (83). Note that only the value of A_{mnp} differs between the periodic case (61) and equation (84); and if r is set equal to 1, (85) reduces to (62). In the appendix it is demonstrated that this expansion agrees with the exact results obtained in [1].

5. Nonconstant diffraction coefficient

In the previous sections we have assumed that the diffraction coefficient that appears in the expression of the density of diffractive orbits (12) is a constant (14) for a point-like scatter. In this section we consider the general case when this diffraction coefficient depends on scattering angles.

Let a trajectory hit the singularity with momentum in the direction $\vec{n}$ and leave it with momentum in the direction $\vec{n}'$. The diffraction coefficient $\mathcal{D}(\vec{n}, \vec{n}')$ is a certain function obeying the optical theorem (13).

5.1. Periodic boundary conditions

Trajectories with equal length play a very important role in the computation of the form factor. In the rectangular billiard with periodic boundary conditions the lengths of periodic and diffractive orbits are given by

$$l = \sqrt{(Ma)^2 + (Nb)^2} \quad (86)$$

and orbits with M, N of different signs are degenerated though geometrically they are different. When the diffraction coefficient is a constant all such trajectories give the same contribution but when it depends on initial and final directions their contribution will be different.

In the rectangular billiard orbits that hit or leave the singularity with any of the four angles,

$$g_\alpha(\varphi) = \varphi, -\varphi, -\pi + \varphi, \pi - \varphi, \quad (87)$$

all have the same lengths (see figure 6). Let us assume that $0 \leq \varphi < \pi/2$ and label these angles respectively by $\alpha = 1, 2, 3$ and 4 . To take into account trajectories with equal length it is convenient to label them by two quantities (φ, α) , where the angle φ is uniquely related with the length of the trajectory and belongs to the upper-right quadrant, $0 \leq \varphi < \pi/2$, and the index $\alpha = 1, 2, 3, 4$ describes the form of the trajectory and determines which of the four angles, equation (87), is the geometrical angle between the trajectory and the horizontal.

Let us denote by $D_{\alpha\beta}(\varphi, \varphi')$ the diffraction coefficient $\mathcal{D}(g_\alpha(\varphi), g_\beta(\varphi'))$ corresponding to a scattering process where the trajectory arrives with angle *opposite to* (φ, α) and leaves the scatter with angle (φ', β) . The explicit form of the matrix $D(\varphi, \varphi')$ is the following:

$$D(\varphi, \varphi') = \begin{pmatrix} \mathcal{D}(\varphi, \varphi') & \mathcal{D}(\varphi, -\varphi') & \mathcal{D}(\varphi, -\pi + \varphi') & \mathcal{D}(\varphi, \pi - \varphi') \\ \mathcal{D}(-\varphi, \varphi') & \mathcal{D}(-\varphi, -\varphi') & \mathcal{D}(-\varphi, -\pi + \varphi') & \mathcal{D}(-\varphi, \pi - \varphi') \\ \mathcal{D}(-\pi + \varphi, \varphi') & \mathcal{D}(-\pi + \varphi, -\varphi') & \mathcal{D}(-\pi + \varphi, -\pi + \varphi') & \mathcal{D}(-\pi + \varphi, \pi - \varphi') \\ \mathcal{D}(\pi - \varphi, \varphi') & \mathcal{D}(\pi - \varphi, -\varphi') & \mathcal{D}(\pi - \varphi, -\pi + \varphi') & \mathcal{D}(\pi - \varphi, \pi - \varphi') \end{pmatrix}. \quad (88)$$

For instance (see figure 7) if the trajectory leaves the scatter with an angle $-\varphi$ (which in our notation is angle 2), it will come back with an angle $\pi - \varphi$, so it hits the singularity with an angle

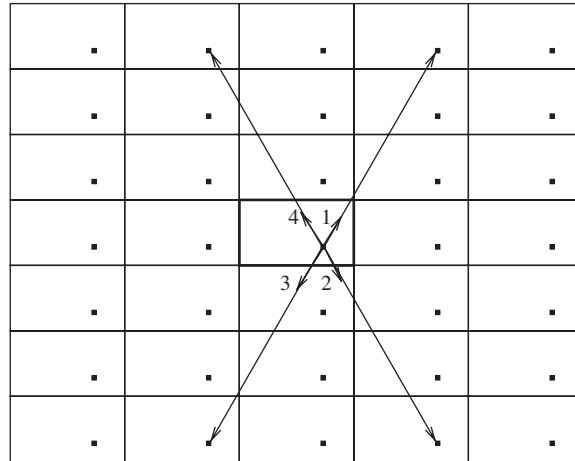


Figure 6. Four trajectories of same length in the rectangle with periodic boundary conditions.

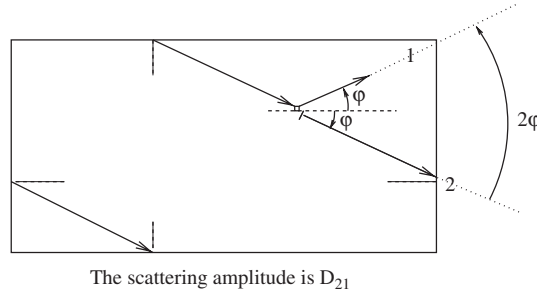


Figure 7. A periodic trajectory in the rectangle with periodic boundary conditions.

opposite to $\alpha = 2$. If it leaves again with an angle, say φ (angle 1), then the scattering amplitude between the incoming and the outgoing trajectory will be proportional to $\mathcal{D}(-\varphi, \varphi)$, which is just $D_{21}(\varphi, \varphi)$. The advantage of the matrix representation of the diffraction coefficient is that different variables φ describe orbits with different lengths. The proliferation of diffractive orbits with the same lengths is taken into account automatically by matrix multiplication.

We now consider a trajectory made of several periodic orbits. Each time the trajectory leaves the scatter with angle α , $1 \leq \alpha \leq 4$, it comes back on the scatter with the unique angle corresponding to an additional phase π , and then it leaves the scatter again with any angle β , $1 \leq \beta \leq 4$. In the general formula (12) we sum over all initial and final vectors $\vec{n}_i, \vec{n}_j$ with the only condition that the trajectory is closed, which means that the outgoing angle of the first diffractive trajectory must correspond to the incoming angle of the last diffractive trajectory (more precisely, they must differ by π). Suppose that we consider a multiple diffractive trajectory consisting of m diffractive orbits beginning and ending at the singularity and such that all unfolded diffractive orbits are almost parallel to an angle φ in the upper-right quadrant. Such trajectory will therefore contain a coefficient $D_{\alpha_1\alpha_2}(\varphi, \varphi)D_{\alpha_2\alpha_3}(\varphi, \varphi) \cdots D_{\alpha_m\alpha_1}(\varphi, \varphi)$. Since we have to take into account the degeneracy of the lengths and gather together all terms corresponding to trajectories of same total length $l_1 + \cdots + l_m$, we have to sum over all possible incoming or outgoing angles:

$$\sum_{\substack{1 \leq \alpha_i \leq 4 \\ 1 \leq i \leq m}} D_{\alpha_1\alpha_2}(\varphi, \varphi)D_{\alpha_2\alpha_3}(\varphi, \varphi) \cdots D_{\alpha_m\alpha_1}(\varphi, \varphi) = \text{tr}(D^m(\varphi, \varphi)). \quad (89)$$

Note that all angles are equal as we consider trajectories with equal lengths. Of course, when $\mathcal{D}$ is a constant $\text{tr}(D^m(\varphi, \varphi)) = (4\mathcal{D})^m$ for all integer $m \geq 1$.

When the degeneracy has been taken into account the computation is the same as in section 3 but $(g\mathcal{D})^m$ is replaced by $\text{tr}(D^m(\varphi, \varphi))$ for $m \geq 1$. The summation of such nondiagonal terms leads to the multiplication of the Green's function contribution $G(L)$ (given by (33)) by an attenuation factor similar to the one in equation (32),

$$\left[1 + \text{tr} \left(\exp \left(\frac{\rho D(\varphi, \varphi)}{2ik} L \right) - 1 \right) \right] G(L), \quad (90)$$

where as above $\rho = 1/\mathcal{A}$ is the density of diffraction points.

The higher-order terms in the density of states come from the contributions of higher-order saddle-point manifolds. Let us consider a composite trajectory consisting in m diffractive orbits, among which m_1 are almost parallel to the direction φ_1 , m_2 to the direction φ_2 , and more generally m_i are almost parallel to the direction φ_i for $1 \leq i \leq p$. Each of such trajectories is a permutation of sequence (35) but contrary to the previous section for each diffractive orbit there is an additional label $\alpha_i = 1, 2, 3, 4$ corresponding to one of the four angles (87).

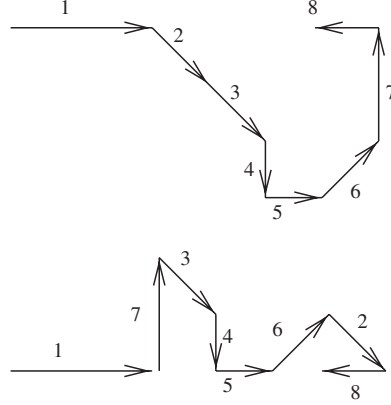


Figure 8. Diffractive trajectories for $m = 8$, $p = 2$, $m_1 = 5$, $m_2 = 3$ with the same length.

The total number of different saddle point trajectories for p , m fixed and given m_i and angle (φ_i, α_i) , $1 \leq i \leq p$, is

$$4^m \frac{m!}{m_1! \cdots m_p!}, \quad (91)$$

the coefficient 4 taking into account the fact that each orbit is four times degenerate (we will always consider $0 \leq \varphi < \pi/2$).

For instance in figure 8 there are two families of vectors, parallel to $\varphi_1 = 0$ or its images, or parallel to $\varphi_2 = \pi/4$ or its images. In this figure two diffractive orbits are represented: orbits 1, 4, 5, 7, 8 are of type 1 and orbits 2, 3, 6 are of type 2. But since now the scattering amplitude $\mathcal{D}$ is not a constant, the saddle points will give different contributions depending on the geometrical form of diffractive orbits.

The k th orbit is determined by a pair $(\varphi_{i_k}, \alpha_k)$ with $\alpha_k = 1, \dots, 4$ and $0 \leq \varphi_{i_k} < \pi/2$.

For a trajectory with p possible angles, φ_{i_k} can take p different values $\{\varphi_1, \dots, \varphi_p\}$. Each diffraction on the scatter gives a coefficient whose generic form is $D_{\alpha_k, \alpha_{k+1}}(\varphi_{i_k}, \varphi_{i_{k+1}})$, since the coefficient $D_{ij}(\varphi, \varphi')$ is the scattering amplitude corresponding to a diffraction where an orbit leaves the scatter with the image of type i of the angle φ , and comes back and leaves again with the image j of the angle φ' . In order to take into account all trajectories we have to sum over all α_k , $1 \leq \alpha_k \leq 4$, and all i_k , $1 \leq i_k \leq p$, for $1 \leq k \leq m$ (of course, due to the fact that all orbits are periodic, the index $i_{m+1} = i_1$).

Thus for fixed m_i and φ_i the sum over all possible scatterings of the scattering amplitudes gives

$$R((m_1, \varphi_1), \dots, (m_p, \varphi_p)) = \sum_{\text{perm}} \text{tr}(D(\varphi_{i_1}, \varphi_{i_2}) D(\varphi_{i_2}, \varphi_{i_3}) \cdots D(\varphi_{i_m}, \varphi_{i_1})), \quad (92)$$

where the summation is performed over all permutations $(i_1, \dots, i_m)$ of the sequence (35).

For example, for the case considered, $m = 4$ and $m_1 = m_2 = 2$ (see figure 4(b) and (37))

$$\begin{aligned} R((2, \varphi_1), (2, \varphi_2)) = & \text{tr}(D(\varphi_1, \varphi_1) D(\varphi_1, \varphi_2) D(\varphi_2, \varphi_2) D(\varphi_2, \varphi_1)) \\ & + \text{tr}(D(\varphi_1, \varphi_2) D(\varphi_2, \varphi_1) D(\varphi_1, \varphi_2) D(\varphi_2, \varphi_1)) \\ & + \text{tr}(D(\varphi_1, \varphi_2) D(\varphi_2, \varphi_2) D(\varphi_2, \varphi_1) D(\varphi_1, \varphi_1)) \\ & + \text{tr}(D(\varphi_2, \varphi_2) D(\varphi_2, \varphi_1) D(\varphi_1, \varphi_1) D(\varphi_1, \varphi_2)) \\ & + \text{tr}(D(\varphi_2, \varphi_1) D(\varphi_1, \varphi_2) D(\varphi_2, \varphi_1) D(\varphi_1, \varphi_2)) \\ & + \text{tr}(D(\varphi_2, \varphi_1) D(\varphi_1, \varphi_1) D(\varphi_1, \varphi_2) D(\varphi_2, \varphi_2)). \end{aligned} \quad (93)$$

The quantity $R((m_1, \varphi_1), \dots, (m_p, \varphi_p))$ replaces the corresponding quantity (42) in equation (41) and reduces to it if $\mathcal{D}$ is a constant.

The rest of the calculations is exactly the same as above and finally one gets the expression (45) where

$$d_1(\vec{L}) = \frac{iA}{2\pi} \left[1 + \text{tr} \left(\exp \left(\frac{D(\varphi, \varphi)}{2ikA} L \right) - 1 \right) \right] \quad (94)$$

and $d_p(\vec{L}_1, \dots, \vec{L}_p)$ is the same as (41) with $R(m_1, \dots, m_p)$ replaced by R given by (92).

Using equation (60) and replacing (42) by (92) we obtain that the two-point correlation form factor for the considered case is given by the following formulae:

$$K(\tau) = \left\langle \left| 1 + \text{tr} \left(\exp \left(-i \frac{D(\varphi, \varphi)}{8} \tau \right) - 1 \right) \right|^2 \right\rangle + \sum_{p=2}^{\infty} \frac{1}{p!} \sum_{m, n \geq p} A_{mnp} \tau^{m+n-p+1} \quad (95)$$

with

$$A_{mnp} = \frac{(-i/8)^m (i/8)^n}{mn(m+n-p-1)!} \sum_{\substack{m_i=m \\ m_i \geq 1}} \sum_{\substack{n_j=n \\ n_j \geq 1}} \prod_{i=1}^p \left[\frac{(m_i + n_i - 2)!}{(m_i - 1)!(n_i - 1)!} \right] \\ \times \langle R((m_1, \varphi_1), \dots, (m_p, \varphi_p)) \bar{R}((n_1, \varphi_1), \dots, (n_p, \varphi_p)) \rangle, \quad (96)$$

where $R((m_1, \varphi_1), \dots, (m_p, \varphi_p))$ is defined in equation (92). The sum is taken over all partitions of m and n into sums of integers m_i and n_j greater than 1 satisfying $m_1 + \dots + m_p = m$ and $n_1 + \dots + n_p = n$.

The symbol $\langle \dots \rangle$ means the integration over all indicated angle variables from 0 to $\pi/2$,

$$\langle f(\varphi_1, \dots, \varphi_k) \rangle = \left(\frac{2}{\pi} \right)^k \int_0^{\pi/2} d\varphi_1 \dots \int_0^{\pi/2} d\varphi_k f(\varphi_1, \dots, \varphi_k). \quad (97)$$

5.2. Dirichlet boundary conditions

Dirichlet boundary conditions give rise to a slight complication as there are now 16 diffractive orbits associated with each couple of positive integers (M, N) (see figure 9). In equation (12) the contribution of a multiple diffractive trajectory consisting in m diffractive orbits beginning and ending at the singularity and parallel to a fixed direction φ contains products of diffraction coefficients $\mathcal{D}(\varphi_i, \varphi_j)$ and terms $\exp(ikl_i)$ coming from the Green's function where l_i is the length of one of the 16 orbits. If we expand l_i for large M, N each term $\exp(ikl_i)$ can be written according to (69) as

$$\epsilon_1 \epsilon_2 e^{ikl_i - i(\pi/2)v_i} = e^{ikl_p} e^{i(\epsilon_1 - 1)kx_0 \cos \varphi + i(\epsilon_2 - 1)ky_0 \sin \varphi}, \quad (98)$$

where l_p is the length (67) of the closest periodic orbit and $\epsilon_1, \epsilon_2 = \pm 1$. As in the previous section we will denote respectively by 1, 2, 3, and 4 the angles $\varphi, -\varphi, -\pi + \varphi$ and $\pi - \varphi$ corresponding to the symmetry group of the rectangle.

For the periodic case (see figure 6) a trajectory which leaves the scatter with angle (φ, α) comes back to it with an angle which is necessarily the angle opposite to the angle α . Therefore, for periodic boundary conditions the free motion between scatters is fixed and the proliferation of diffractive orbits only comes from the scattering process.

For the Dirichlet boundary conditions (see figure 9) with a small change of the initial angle the trajectory (φ, α) can come back to the scatter with any of the four angles, equation (87), corresponding to φ , which leads to another source of diffractive orbits with almost the same length.

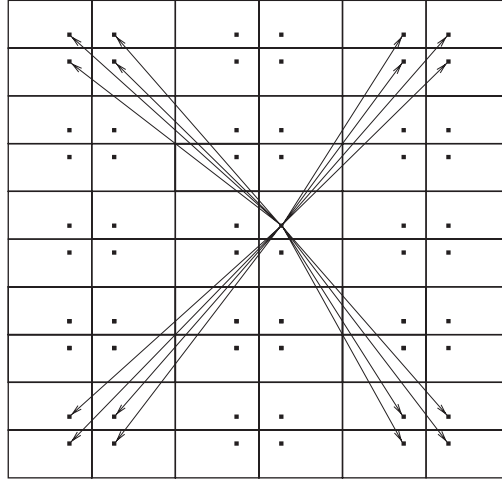


Figure 9. The 16 trajectories of almost same length in the rectangle with Dirichlet boundary conditions.

Let us denote by $T_{\alpha\beta}(\varphi)$ the coefficient corresponding to a diffractive orbit leaving the diffractive centre with an angle (φ, α) and coming back with angle *opposite to* (φ, β) . Each $T_{\alpha\beta}(\varphi)$ is a product of two factors of the type

$$\epsilon_1 \epsilon_2 \exp[i(\epsilon_1 - 1)\phi_1 + i(\epsilon_2 - 1)\phi_2], \quad (99)$$

where angles $\phi_i = \phi_i(\varphi)$ were defined in (71) and (72), and $\epsilon_i = \pm 1$. The matrix $T = T(\varphi)$ describes the free motion modification of the Green's function and simple calculations show that it has the following form:

$$T(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & \bar{b} & \bar{a}\bar{b} & \bar{a} \\ b & 1 & \bar{a} & b\bar{a} \\ ab & a & 1 & b \\ a & a\bar{b} & \bar{b} & 1 \end{pmatrix}, \quad (100)$$

where $a = -e^{2i\phi_1}$ and $b = -e^{2i\phi_2}$.

It can be checked that

$$T_{\alpha\beta}(\varphi) = V_\alpha(\varphi) \bar{V}_\beta(\varphi), \quad (101)$$

where $V_i(\phi_1(\varphi), \phi_2(\varphi))$ is the vector defined by

$$V(\vec{\phi}) = \begin{pmatrix} \exp(-i\phi_1 - i\phi_2) \\ -\exp(-i\phi_1 + i\phi_2) \\ \exp(i\phi_1 + i\phi_2) \\ -\exp(i\phi_1 - i\phi_2) \end{pmatrix}. \quad (102)$$

Any diffractive trajectory can be specified by fixing the initial and the final angles for each scattering. If the trajectory leaves the scatter with an angle (φ, k) and comes back to it with angle $(\varphi, l + \pi)$ (i.e. an angle opposite to l) it is attributed a coefficient $T_{kl}(\varphi)$ (equation (100)). If then it scatters to an angle (φ', j) it gets the coefficient $D_{lj}(\varphi, \varphi')$ defined in (88) and so on (see figure 10). For example, a diffractive trajectory consisting of m diffractive orbits parallel to the direction φ will be associated to a pre-factor

$$\sum T_{\alpha_1\alpha'_1} D_{\alpha'_1\alpha_2} T_{\alpha_2\alpha'_2} \cdots T_{\alpha_m\alpha'_m} D_{\alpha'_m\alpha_1} = \text{tr}(TD)^m. \quad (103)$$

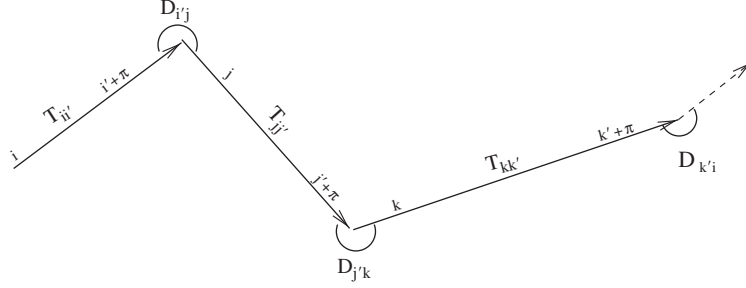


Figure 10. An example of periodic trajectory for $m = 3$.

As in section 4, assuming that the ratio $(x_0 a)/(y_0 b)$ is an irrational number then as $k \rightarrow \infty$ angles ϕ_1 and ϕ_2 act as independent random variables uniformly distributed between 0 and $\pi/2$.

To take into account higher-order contributions we have to sum over all possible types of vectors $(\alpha_i, \alpha'_j = 1-4)$ and all possible angles $\varphi_{i_k} \in \{\varphi_1, \dots, \varphi_p\}$ in terms like

$$\sum_{\alpha_i, \alpha'_j} D_{\alpha_1, \alpha'_1}(\varphi_{i_1}, \varphi_{i_2}) T_{\alpha'_1, \alpha_2}(\varphi_{i_2}, \varphi_{i_3}) D_{\alpha_2, \alpha'_2}(\varphi_{i_2}, \varphi_{i_3}) T_{\alpha'_2, \alpha_3}(\varphi_{i_3}, \dots) \dots$$

$$= \text{tr}(D(\varphi_{i_1}, \varphi_{i_2}) T(\varphi_{i_2}) D(\varphi_{i_2}, \varphi_{i_3}) T(\varphi_{i_3}) \dots) \quad (104)$$

under the constraint that each angle φ_i appears exactly m_i times. Using the property (101) one can rewrite the above expression by introducing the effective diffraction coefficient S defined by

$$S(\varphi, \varphi') = {}^t \bar{V}_\alpha(\varphi) D_{\alpha\beta}(\varphi, \varphi') V_\beta(\varphi'), \quad (105)$$

which describes all possibilities of scattering and free motion between the scatter. Since $S(\varphi, \varphi')$ is a number we get

$$\text{tr}(D(\varphi_{i_1}, \varphi_{i_2}) T(\varphi_{i_2}) D(\varphi_{i_2}, \varphi_{i_3}) T(\varphi_{i_3}) \dots) = S(\varphi_{i_1}, \varphi_{i_2}) S(\varphi_{i_2}, \varphi_{i_3}) \dots S(\varphi_{i_m}, \varphi_{i_1}). \quad (106)$$

Let us define a quantity similar to equation (92):

$$R((m_1, \varphi_1), \dots, (m_p, \varphi_p)) = \sum_{\text{perm}} S(\varphi_{i_1}, \varphi_{i_2}) S(\varphi_{i_2}, \varphi_{i_3}) \dots S(\varphi_{i_m}, \varphi_{i_1}), \quad (107)$$

where the sum is taken over all permutations $(i_1, \dots, i_m)$ of the sequence (35) and it is implicitly assumed that the set φ_i contains m_1 terms of φ_1, m_2 terms of $\varphi_2, \dots, m_p$ terms of φ_p . It can be checked that equation (107) reduces to (78) if $\mathcal{D}$ is a constant, since we have

$$\sum_{i,j} {}^t \bar{V}_i(\varphi) V_j(\varphi) = gr(\varphi), \quad (108)$$

with $g = 4$ and $r(\varphi)$ given by (74). The final expression for the two-point correlation form factor, $K(\tau)$, follows from exactly the same consideration as in previous sections. It reads

$$K(\tau) = \left\langle \left| \exp \left(-i \frac{S(\varphi, \varphi)}{8} \tau \right) \right|^2 \right\rangle + \sum_{p=2}^{\infty} \frac{1}{p!} \sum_{m, n \geq p} A_{mnp} \tau^{m+n-p+1}, \quad (109)$$

where

$$A_{mnp} = \frac{(-i/8)^m (i/8)^n}{mn(m+n-p-1)!} \sum_{\substack{m_i=m \\ m_i \geq 1}} \sum_{\substack{n_j=n \\ n_j \geq 1}} \prod_{i=1}^p \left[\frac{(m_i + n_i - 2)!}{(m_i - 1)!(n_i - 1)!} \right]$$

$$\times \langle R((m_1, \varphi_1), \dots, (m_p, \varphi_p)) \bar{R}((n_1, \varphi_1), \dots, (n_p, \varphi_p)) \rangle. \quad (110)$$

As usual, the sum is taken over all partitions of m and n into sums of p positive integers. The symbol $\langle\langle \dots \rangle\rangle$ denotes the double average over random phases ϕ_i as in equation (81) and geometrical angles φ_j as in equation (97).

6. Conclusion

We have discussed the spectral statistics of a rectangular billiard with a small-size impurity inside and developed the method which permits the explicit construction of perturbation expansion of the two-point correlation form factor for this system, $K(\tau)$, into series of τ :

$$K(\tau) = \sum_n c_n \tau^n. \quad (111)$$

Using the method of [20] we demonstrate that after the summation over diffractive orbits with approximately the same lengths the oscillating part of the density of states can be written in the form (45):

$$d^{(\text{osc})}(E) = \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{L_1 < \dots < L_p} d_p(\vec{L}_1, \dots, \vec{L}_p) G(L_1) \cdots G(L_p) + \text{c.c.}, \quad (112)$$

with

$$d_p(\vec{L}_1, \dots, \vec{L}_p) = \frac{L_1 + \dots + L_p}{4\pi k} \sum_{m=p}^{\infty} \frac{1}{m} \sum_{\substack{m_1 + \dots + m_p = m \\ m_i \geq 1}} R((m_1, \varphi_1), \dots, (m_p, \varphi_p)) \\ \times \left(\frac{L_1}{2ik\mathcal{A}} \right)^{m_1-1} \frac{1}{(m_1-1)!} \cdots \left(\frac{L_p}{2ik\mathcal{A}} \right)^{m_p-1} \frac{1}{(m_p-1)!}, \quad (113)$$

where the summation is taken over all partitions of m into sums of p positive integers $m = m_1 + \dots + m_p$ and $R((m_1, \varphi_1), \dots, (m_p, \varphi_p))$ (107) is the contribution of all diagrams describing the scattering process of composite diffractive orbits consisting of m_1 orbits of type 1, m_2 orbits of type 2, and so on.

To construct such diagrams it is convenient first to write down all permutations of the sequence (35) of m elements with m_i elements of type i . The total number of these permutations is

$$N(m_1, \dots, m_p) = \frac{m!}{m_1! \cdots m_p!}. \quad (114)$$

Each symbol i represents the angle φ_i and the constructed sequence of symbols is considered as the representation of the scattering process. The symmetry group of the rectangular billiard leads to the necessity to consider together all symmetry partners of a given trajectory, that is all possible choices for each diffractive orbit.

For periodic boundary conditions there are 4 different possibilities (87) as indicated at figure 6, whereas for Dirichlet conditions it gives rise to 16 trajectories with approximately the same lengths as at figure 9. To take into account all these degenerate and almost degenerate trajectories it is useful to use the matrix formalism developed in the previous sections. All the scattering processes between two consecutive angles φ and φ' are described by the matrix $D(\varphi, \varphi')$ defined in equation (88) for periodic boundary conditions, and by the quantity $S(\varphi, \varphi')$ defined in equation (105) for Dirichlet ones.

The quantity $R((m_1, \varphi_1), \dots, (m_p, \varphi_p))$ is the sum of such contributions for all permutations of our standard sequence (35), i.e. all possible orderings of the sequence of diffractive orbits.

The knowledge of $R((m_1, \varphi_1), \dots, (m_p, \varphi_p))$ easily permits the computation of the two-point correlation form factor in all cases. The advantage of the representation (112) is that different terms in it are noncoherent and the two-point correlation function is simply given by the sum of the squares of each terms as in equation (49). This ‘generalized diagonal approximation’ leads to explicit formulae for the form factor equations (95) and (96) for the periodic boundary conditions and equations (109) and (110) for the Dirichlet ones which solve the problem of the summation over nondiagonal terms for integrable systems.

Note added in proof. In this paper we have only considered the case when the ratios of the coordinates of the scattering point, x_0, y_0 , to the corresponding sides, a, b , of the rectangular billiard, x_0/a and y_0/b are both irrational (diophantine) numbers. One can prove [29] that our formulae also remain valid when one or both of these ratios are rational numbers provided the mean values in equations (81) and (97) are defined as in equation (84) of [14].

Appendix

The exact expression for the two-point correlation function, $R_2(\epsilon)$, for a rectangular billiard perturbed by a small-size impurity with constant diffraction coefficient has been derived in [1]. The aim of this appendix is to obtain its perturbation expansion for large ϵ and the corresponding expansion of the two-point correlation form factor, $K(\tau)$, into series of τ .

According to equation (143) in [1] (with slight changing of the notations) the two-point correlation function can be written as multiple integrals:

$$R_2(\epsilon) - 1 = \int_0^\infty d\alpha_1 \int_0^\infty d\alpha_2 e^{-\pi\epsilon \langle J(r\alpha_1, r\alpha_2) \rangle} [\langle r J_0(2r\sqrt{\alpha_1\alpha_2}) e^{ir(\alpha_1+\alpha_2)} \rangle^2 + \langle r J_1(2r\sqrt{\alpha_1\alpha_2}) e^{ir(\alpha_1+\alpha_2)} \rangle^2] + \text{c.c.}, \quad (115)$$

where

$$J(\alpha_1, \alpha_2) = (\alpha_1 - \alpha_2) \left(1 + \frac{i}{\pi v'} + 2ie^{i\alpha_2} \int_{\alpha_1}^\infty J_0(2\sqrt{\alpha_2 t}) e^{it} dt \right) - i[\alpha_1 J_0(2\sqrt{\alpha_1\alpha_2}) + \sqrt{\alpha_1\alpha_2} J_1(2\sqrt{\alpha_1\alpha_2})] e^{i(\alpha_1+\alpha_2)}. \quad (116)$$

Here $J_0(x)$ and $J_1(x)$ are the usual Bessel functions. The renormalized coupling constant v' is connected with the diffraction coefficient, $\mathcal{D}$, by the relation

$$\mathcal{D} = \frac{1}{(i/4) + (1/4\pi v')}. \quad (117)$$

The variable $r = r(\phi_1, \phi_2)$ depends on the boundary conditions (see [1])

$$r(\phi_1, \phi_2) = \begin{cases} 1 & \text{for periodic boundary conditions,} \\ 4 \sin^2(\phi_1) \sin^2(\phi_2) & \text{for Dirichlet boundary conditions,} \\ 4 \cos^2(\phi_1) \cos^2(\phi_2) & \text{for Neumann boundary conditions,} \end{cases} \quad (118)$$

where ϕ_1 and ϕ_2 are independent angles distributed uniformly between 0 and $\pi/2$. The symbol $\langle \dots \rangle$ denotes the mean values over these angles:

$$\langle f(\phi_1, \phi_2) \rangle = \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\pi/2} d\phi_1 \int_0^{\pi/2} d\phi_2 f(\phi_1, \phi_2). \quad (119)$$

In particular we have $\langle r(\phi_1, \phi_2) \rangle = 1$. Changing variables ϵ to x and α_1, α_2 to $\alpha_1/x, \alpha_2/x$, one gets

$$R_2(x) - 1 = \int_0^\infty d\alpha_1 \int_0^\infty d\alpha_2 e^{-\pi x \langle J(r\alpha_1/x, r\alpha_2/x) \rangle} \left[\left\langle r J_0\left(\frac{2r\sqrt{\alpha_1\alpha_2}}{x}\right) e^{ir(\alpha_1+\alpha_2)/x} \right\rangle^2 + \left\langle r J_1\left(\frac{2r\sqrt{\alpha_1\alpha_2}}{x}\right) e^{ir(\alpha_1+\alpha_2)/x} \right\rangle^2 \right] + \text{c.c.} \quad (120)$$

To compute the expansion of the above expressions into powers of $1/x$ it is convenient to use the transformations proposed in [27].

From (116) it follows that

$$\left(\frac{\partial}{\partial\alpha_1} + \frac{\partial}{\partial\alpha_2}\right) x J\left(\frac{\alpha_1}{x}, \frac{\alpha_2}{x}\right) = 2J_0\left(\frac{2\sqrt{\alpha_1\alpha_2}}{x}\right) e^{i(\alpha_1+\alpha_2)/x} \quad (121)$$

and

$$\frac{\partial}{\partial x} x J\left(\frac{\alpha_1}{x}, \frac{\alpha_2}{x}\right) = -2i \frac{\sqrt{\alpha_1\alpha_2}}{x} J_1\left(\frac{2\sqrt{\alpha_1\alpha_2}}{x}\right) e^{i(\alpha_1+\alpha_2)/x}. \quad (122)$$

Using the fact that $J'_0(x) = -J_1(x)$ and $J'_1(x) = J_0(x) - J_1(x)/x$, one can check that

$$\left(\frac{\partial}{\partial\alpha_1} + \frac{\partial}{\partial\alpha_2}\right)^2 x J\left(\frac{\alpha_1}{x}, \frac{\alpha_2}{x}\right) = \frac{x^2}{\alpha_1\alpha_2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} x J\left(\frac{\alpha_1}{x}, \frac{\alpha_2}{x}\right). \quad (123)$$

Therefore,

$$\begin{aligned} & \left[\left(\frac{\partial}{\partial\alpha_1} + \frac{\partial}{\partial\alpha_2}\right)^2 - \frac{x^2}{\alpha_1\alpha_2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right] e^{-\pi x \langle J(r\alpha_1/x, r\alpha_2/x) \rangle} \\ &= \pi^2 \left[\left(\left(\frac{\partial}{\partial\alpha_1} + \frac{\partial}{\partial\alpha_2}\right) x \left\langle J\left(\frac{r\alpha_1}{x}, \frac{r\alpha_2}{x}\right) \right\rangle \right)^2 \right. \\ & \quad \left. - \frac{x^2}{\alpha_1\alpha_2} \left(\frac{\partial}{\partial x} x \left\langle J\left(\frac{r\alpha_1}{x}, \frac{r\alpha_2}{x}\right) \right\rangle \right)^2 \right] e^{-\pi x \langle J(r\alpha_1/x, r\alpha_2/x) \rangle} \end{aligned} \quad (124)$$

and according to equations (121) and (122) the previous equation can be transformed as follows

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4\pi^2} \left[\left(\frac{\partial}{\partial\alpha_1} + \frac{\partial}{\partial\alpha_2}\right)^2 - \frac{x^2}{\alpha_1\alpha_2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right] e^{-\pi x \langle J(r\alpha_1/x, r\alpha_2/x) \rangle} \\ &= [\langle r J_0(\zeta) e^{ir(\alpha_1+\alpha_2)/x} \rangle^2 + \langle r J_1(\zeta) e^{ir(\alpha_1+\alpha_2)/x} \rangle^2] e^{-\pi x \langle J(r\alpha_1/x, r\alpha_2/x) \rangle}, \end{aligned} \quad (125)$$

where $\zeta = 2r\sqrt{\alpha_1\alpha_2}/x$.

The right-hand side of this expression is the pre-factor which appears in equation (120) and, consequently, one can express the two-point correlation function in the form

$$R_2(x) - 1 = \int_0^\infty \frac{d\alpha_1 d\alpha_2}{4\pi^2 x^2} \left[\left(\frac{\partial}{\partial\alpha_1} + \frac{\partial}{\partial\alpha_2}\right)^2 - \frac{x^2}{\alpha_1\alpha_2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right] e^{-\pi x \langle J(r\alpha_1/x, r\alpha_2/x) \rangle} + \text{c.c.} \quad (126)$$

The derivatives with respect to α_1 and α_2 can be computed by integration by parts. It gives

$$\int_0^\infty d\alpha_1 \frac{\partial}{\partial\alpha_1} \left(\frac{\partial}{\partial\alpha_1} + \frac{\partial}{\partial\alpha_2} \right) e^{-\pi x \langle J(r\alpha_1/x, r\alpha_2/x) \rangle} = 2\pi \langle r e^{ir\alpha_2/x} \rangle e^{-\pi\alpha_2(1-i/\pi v')} \quad (127)$$

and

$$\int_0^\infty d\alpha_2 \frac{\partial}{\partial\alpha_2} \left(\frac{\partial}{\partial\alpha_1} + \frac{\partial}{\partial\alpha_2} \right) e^{-\pi x \langle J(r\alpha_1/x, r\alpha_2/x) \rangle} = 2\pi \langle r e^{ir\alpha_1/x} \rangle e^{-\pi\alpha_1(1+i/\pi v')}. \quad (128)$$

Therefore

$$\begin{aligned} R_0(x) &= \int_0^\infty \frac{d\alpha_1 d\alpha_2}{4\pi^2 x^2} \left(\frac{\partial}{\partial\alpha_1} + \frac{\partial}{\partial\alpha_2} \right)^2 e^{-\pi x \langle J(r\alpha_1/x, r\alpha_2/x) \rangle} + \text{c.c.} \\ &= \frac{1}{\pi x} \left\langle \frac{ir(r+i\pi x)}{(r+i\pi x)^2 - (x/v')^2} \right\rangle + \text{c.c.} \end{aligned} \quad (129)$$

We are interested in the Fourier transform

$$K(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} dx (R_2(x) - 1) e^{2i\pi \tau x} \quad (130)$$

of the two-point correlation function.

The term (129) gives the following contribution:

$$K_0(\tau) = \langle e^{2i\pi \tau x_+} + e^{2i\pi \tau x_-} \rangle - 2, \quad (131)$$

where

$$x_{\pm} = \frac{r}{\pm 1/v' - i\pi} \quad (132)$$

are the poles in (129). Using the definition (117) of $\mathcal{D}$, equations (131) and (132) lead to

$$K_0(\tau) = \langle e^{-(ir\mathcal{D}g/8)\tau} + e^{(ir\bar{\mathcal{D}}g/8)\tau} \rangle - 2, \quad (133)$$

where we introduce $g = 4$ to be consistent with notations in section 3.

The other contributions come from the second derivatives with respect to x in (126). Using expansion (112) of [1] one gets

$$\begin{aligned} x \left\langle J \left(\frac{r\alpha_1}{x}, \frac{r\alpha_2}{x} \right) \right\rangle &= \alpha_1 + \alpha_2 + \frac{i}{\pi v'} (\alpha_1 - \alpha_2) \\ &- 2i \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{(i\alpha_1)^{m+1} (i\alpha_2)^{n+1}}{x^{m+n+1}} \frac{(m+n)! \langle r^{m+n+2} \rangle}{m!(m+1)!n!(n+1)!}. \end{aligned} \quad (134)$$

The expansion of the exponential of this quantity yields

$$\begin{aligned} e^{-\pi x \langle J(r\alpha_1/x, r\alpha_2/x) \rangle} &= e^{-\pi(\alpha_1 + \alpha_2)} e^{-(i/v')(\alpha_1 - \alpha_2)} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(2i\pi)^p}{p!} \\ &\times \sum_{m,n \geq 0} \sum_{m_1 + \dots + m_p = m} \prod_{i=1}^p \frac{C_{m_i+n_i}^{m_i}}{(m_i+1)!(n_i+1)!} \langle r^{m_i+n_i+2} \rangle \frac{(i\alpha_1)^{m+p} (i\alpha_2)^{n+p}}{x^{m+n+p}}. \end{aligned} \quad (135)$$

As

$$\int_0^{\infty} t^{\alpha} e^{-\sigma t} dt = \frac{\alpha!}{\sigma^{\alpha+1}}, \quad (136)$$

the integration over α_i gives the expansion of the two-point correlation function into series of $1/x$

$$R_2(x) - 1 = \sum_{p=0}^{\infty} R_p(x), \quad (137)$$

where $R_0(x)$ is given by (129) and

$$R_p(x) = -\frac{(2i\pi)^p}{p!} \sum_{m,n \geq 0} \frac{(m+n+p+1)! A_{mnp}}{4\pi^2 x^{m+n+p+2}} \left(-\frac{\mathcal{D}g}{16\pi} \right)^{m+p} \left(\frac{\bar{\mathcal{D}}g}{16\pi} \right)^{n+p}, \quad (138)$$

with

$$A_{mnp} = \frac{(m+p-1)!(n+p-1)!}{(m+n+p-1)!} \sum_{m_i, n_j \geq 0} \prod_{i=1}^p \left[\frac{C_{m_i+n_i}^{m_i} \langle r^{m_i+n_i+2} \rangle}{(m_i+1)!(n_i+1)!} \right]. \quad (139)$$

The expression (139) for A_{mnp} is the same as in equation (85).

Taking the Fourier transform (130) of (138), we get the corresponding expansion of the two-point correlation form factor. The term corresponding to $p = 1$ can be transformed to the form

$$K_1(\tau) = \langle (e^{-(ir\mathcal{D}g/8)\tau} - 1)(e^{(ir\bar{\mathcal{D}}g/8)\tau} - 1) \rangle. \quad (140)$$

The sum of the contributions (133) and (140) (plus a 1 coming from the δ -function in $R_2(x)$) gives

$$\langle e^{-(ir\mathcal{D}g/8)\tau} e^{(ir\bar{\mathcal{D}}g/8)\tau} \rangle = \langle e^{-(|\mathcal{D}|^2 gr/16)\tau} \rangle. \quad (141)$$

The Fourier transform of the sum (138) gives the terms for $p \geq 2$:

$$\sum_{p=2}^{\infty} \frac{1}{p!} \sum_{m,n \geq 0} A_{mnp} \left(-\frac{i\mathcal{D}g}{8} \right)^{m+p} \left(\frac{i\bar{\mathcal{D}}g}{8} \right)^{n+p} \tau^{m+n+p+1}, \quad (142)$$

which coincides with the result (84).

References

- [1] Bogomolny E, Gerland U and Schmit C 1999 *Phys. Rev. E* **59** 1315
- [2] Bohigas O, Giannoni M J and Schmit C 1984 *Phys. Rev. Lett.* **52** 1
- [3] Mehta M L 1990 *Random Matrix Theory* (New York: Springer)
- [4] Berry M V and Tabor M 1977 *Proc. R. Soc.* **356** 375
- [5] Bohigas O 1991 *Chaos and Quantum Mechanics (Les Houches Summer School Lectures LII, 1989)* ed M J Giannoni, A Voros and J Zinn-Justin (Amsterdam: North-Holland) p 87
- [6] Andreev A V and Altshuler B L 1995 *Phys. Rev. Lett.* **75** 902
Agam O, Altshuler B L and Andreev A V 1995 *Phys. Rev. Lett.* **75** 4389
- [7] Bogomolny E B and Keating J P 1996 *Phys. Rev. Lett.* **77** 1472
- [8] Bogomolny E B 2000 *New Directions in Quantum Chaos ('Enrico Fermi' International School of Physics, Course CXLIII, Varenna, 1999)* ed G Casati, I Guarneri and U Smilansky (Amsterdam: IOS) p 333
- [9] Marklof J 1998 *Commun. Math. Phys.* **199** 169
- [10] Bogomolny E B, Leboeuf P and Schmit C 2000 *Phys. Rev. Lett.* **85** 2486
- [11] Šeba P 1990 *Phys. Rev. Lett.* **64** 1855
- [12] Shigehara T and Cheon T 1996 *Phys. Rev. E* **54** 1321
- [13] Jonckheere T, Gremaud B and Delande D 1998 *Phys. Rev. Lett.* **81** 2442
- [14] Bogomolny E B, Giraud O and Schmit C 2001 *Phys. Rev. E* at press
- [15] Shklovskii B I, Shapiro B, Sears B R, Lambrianides P and Shore H B 1993 *Phys. Rev. B* **47** 11487
- [16] Vattay G, Wirzba A and Rosenqvist P E 1994 *Phys. Rev. Lett.* **73** 2304
- [17] Pavloff N and Schmit C 1995 *Phys. Rev. Lett.* **75** 61
Pavloff N and Schmit C 1995 *Phys. Rev. Lett.* **75** 3779 (erratum)
- [18] Berry M V 1985 *Proc. Roy. Soc. A* **400** 229
- [19] Hannay J H and Ozorio de Almeida A M 1984 *J. Phys. A: Math. Gen.* **17** 3429
- [20] Bogomolny E B 2000 *Nonlinearity* **13** 947
Bogomolny E, Pavloff N and Schmit C 2000 *Phys. Rev. E* **61** 3689
- [21] Balian R and Bloch C 1972 *Ann. Phys.* **69** 76
- [22] Gutzwiller M C 1991 *Chaos and Quantum Mechanics (Les Houches Summer School Lectures LII, 1989)* ed M J Giannoni, A Voros and J Zinn-Justin (Amsterdam: North-Holland) p 201
- [23] Berry M V and Tabor M 1976 *Proc. R. Soc.* **349** 101
Berry M V and Tabor M 1977 *J. Phys. A: Math. Gen.* **10** 371
- [24] Bogomolny E B 1994 *Quantum Dynamics of Simple Systems (The Forty Fourth Scottish Universities Summer School in Physics)* ed G L Oppo, S M Barnett, E Riis and M Wilkinson (Bristol: Institute of Physics Publishing) p 17
- [25] Keller J P 1962 *J. Opt. Soc. Am.* **52** 116
- [26] Landau L D and Lifshitz E M 1958 *Quantum mechanics, Course of theoretical Physics* vol III (Oxford: Pergamon)
- [27] Berkolaiko G, Bogomolny E B and Keating J P 2001 *J. Phys. A: Math. Gen.* **34** 335
- [28] Berkolaiko G and Keating J P 1999 *J. Phys. A: Math. Gen.* **32** 7827
- [29] Bogomolny E and Giraud O 2002 unpublished

Troisième partie

Annexes

Annexe A

Computation of the semi-classical trace formula for integrable systems

This appendix aims at deriving a general trace formula for integrable systems. We obtain an explicit formula for the oscillating part of the density of states for p -dimensional systems, where the prefactor is given in terms of the comatrix of the second partial derivatives of the Hamiltonian with respect to the integrals of motion. It is to be compared to the trace formula of Berry and Tabor [66], where the prefactor is a function of the curvature of the energy surface.

We also calculate the density of periodic orbits for general p -dimensional integrable systems, and we verify that when there is no degeneracy of the energy levels the form factor is equal to 1.

A.1 Computation of the smooth term

Let us consider an integrable system whose Hamiltonian is a function of the p action variables I_i . Semi-classical quantization conditions consist in fixing the values of these action variables [62, 16]:

$$I_i = \hbar(n_i + \frac{1}{4}\mu_i), \quad (\text{A.1})$$

where n_i are integers and μ_i the Maslov indices.

We will take everywhere $\hbar = 1$. For a p -dimensional integrable system, the quantum energies are

$$E_{\vec{n}} = H(n_1 + \frac{1}{4}\mu_1, \dots, n_p + \frac{1}{4}\mu_p), \quad (\text{A.2})$$

and the quantum density of states is

$$d(E) = \sum_{n_i} \delta(E - E_{\vec{n}}). \quad (\text{A.3})$$

The Poisson summation formula applied to d gives

$$d(E) = \sum_{N_i} \int e^{2\pi i \vec{N} \cdot \vec{n}} \delta(E - E_{\vec{n}}) d\vec{n}. \quad (\text{A.4})$$

The “smooth” (non-oscillating) term of this sum corresponds to $\vec{N} = \vec{0}$, i.e.

$$\bar{d}(E) = \int \delta(E - E_{\vec{n}}) d\vec{n}. \quad (\text{A.5})$$

Setting $n_i = I_i - \mu_i/4$ leads to

$$\bar{d}(E) = \int \delta(E - H(\vec{I})) d\vec{I}. \quad (\text{A.6})$$

A.2 Computation of the prefactor

According to (A.4), the oscillating part of the density of states can be written, using $n_i = I_i - \mu_i/4$,

$$d^{osc}(E) = \sum_{N_i} e^{-i\frac{\pi}{2}\vec{N}\cdot\vec{\mu}} \int e^{2\pi i\vec{N}\vec{I}} \delta(E - H(\vec{I})) d\vec{I}. \quad (\text{A.7})$$

We want to evaluate the integral

$$\begin{aligned} \mathcal{D} &= \int e^{2\pi i\vec{N}\vec{I}} \delta(E - H(\vec{I})) d\vec{I} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int e^{2\pi i\vec{N}\vec{I} + i\alpha(E - H(\vec{I}))} d\vec{I} d\alpha \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

The integration over $\vec{I}$ can be performed by the saddle-point method: the action is $S(\vec{I}) = 2\pi\vec{N}\vec{I} + \alpha(E - H(\vec{I}))$, so

$$\frac{\partial S}{\partial I_j} = -\alpha \frac{\partial H}{\partial I_j} + 2\pi N_j \quad (\text{A.9})$$

The saddle-point condition corresponds to $\partial S/\partial I_j = 0$:

$$2\pi N_j = \alpha \omega_j(\vec{I}). \quad (\text{A.10})$$

Then

$$\frac{\partial^2 S}{\partial I_j \partial I_k} = -\alpha \frac{\partial^2 H}{\partial I_j \partial I_k} = -\alpha H_{jk} \quad (\text{A.11})$$

So

$$\begin{aligned} \mathcal{D} &= \int \frac{d\alpha}{2\pi} e^{2\pi i\vec{N}\vec{I} + i\alpha(E - H(\vec{I}))} \int d\delta I_j d\delta I_k e^{-i\frac{\alpha}{2} H_{jk} \delta I_j \delta I_k} \\ &= (2\pi)^{\frac{p}{2}-1} \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}p}}{\sqrt{\det H}} \int \frac{e^{2\pi i\vec{N}\vec{I} + i\alpha(E - H(\vec{I}))}}{\sqrt{\alpha^p}} d\alpha \\ &= (2\pi)^{\frac{p}{2}-1} \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}p}}{\sqrt{\det H}} \mathcal{E}, \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

where $\vec{I}$ verifies the saddle-point condition (A.10). We then perform the calculation of the integral $\mathcal{E}$ over α : this time the saddle-point condition is given by

$$0 = \frac{\partial S}{\partial \alpha} = E - H(\vec{I}) + \alpha \left(-\frac{\partial}{\partial \alpha} H(\vec{I}) \right) + 2\pi N_j \frac{\partial I_j}{\partial \alpha} \quad (\text{A.13})$$

I_j is a function of α through (A.10). But

$$\frac{\partial H}{\partial \alpha}(\vec{I}) = \omega_j(\vec{I}) \frac{\partial I_j}{\partial \alpha} = \frac{2\pi N_j}{\alpha} \frac{\partial I_j}{\partial \alpha} \quad (\text{A.14})$$

so $\frac{\partial S}{\partial \alpha} = E - H(\vec{I})$ and the saddle-points α are defined by

$$H(\vec{I}(\alpha)) = E \quad (\text{A.15})$$

Then

$$\frac{\partial^2 S}{\partial \alpha^2} = -\frac{\partial}{\partial \alpha} H(I) = -\frac{2\pi N_j}{\alpha} \frac{\partial I_j}{\partial \alpha} \quad (\text{A.16})$$

The differentiation of the first saddle-point condition (A.10) with respect to α gives

$$\omega_j + \alpha \frac{\partial^2 H}{\partial I_j \partial I_k} \frac{\partial I_k}{\partial \alpha} \quad (\text{A.17})$$

or

$$\frac{\partial I_k}{\partial \alpha} = -\frac{1}{\alpha} (H^{-1})_{kj} \omega_j \quad (\text{A.18})$$

so that

$$\frac{\partial^2 S}{\partial \alpha^2} = \frac{(2\pi)^2}{\alpha^3} (H^{-1})_{ij} N_i N_j \quad (\text{A.19})$$

The second integral $\mathcal{E}$ is equal to

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \frac{e^{2i\pi N_j I_j}}{\sqrt{\alpha^p}} \int e^{\frac{i}{2} \frac{(2\pi)^2}{\alpha^3} (H^{-1})_{ij} N_i N_j (\delta\alpha)^2} d\delta\alpha \\ &= \frac{e^{2i\pi N_j I_j}}{\sqrt{\alpha^{p-3}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi (H^{-1})_{ij} N_i N_j}} e^{i\frac{\pi}{4}} \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

It gives

$$\begin{aligned} \mathcal{D} &= (2\pi)^{\frac{p-3}{2}} \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}p}}{\sqrt{\det H}} \frac{e^{2i\pi N_j I_j}}{\sqrt{\alpha^{p-3}}} \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{N H^{-1} N}} \\ &= (2\pi)^{\frac{p-3}{2}} e^{-i\frac{\pi}{4}(p-1)} \frac{e^{2i\pi N_j I_j}}{\sqrt{\alpha^{p-3}}} \frac{1}{\sqrt{N Q N}} \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

The saddle-point condition (A.10) shows that here α is the period T . If we denote $\text{sign}(N Q N) = (-1)^a$ and $\beta = -(p-1) - 2a$, then the integral is

$$\mathcal{D} = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^{\frac{p-3}{2}} \frac{1}{\sqrt{|N Q N|}} e^{2i\pi N_j I_j - i\frac{\pi}{4}\beta} \quad (\text{A.22})$$

We therefore have the very simple expression for the prefactor:

$$P_{\vec{N}} = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^{\frac{p-3}{2}} \frac{1}{\sqrt{|N Q N|}} \quad (\text{A.23})$$

and the oscillating part of the density of states (A.7) can be rewritten

$$d^{osc}(E) = \sum_{N_i} e^{-i\frac{\pi}{2} \vec{N} \cdot \vec{\mu}} P_{\vec{N}} e^{2i\pi \vec{N} \cdot \vec{I} - i\frac{\pi}{4}\beta} + c.c. \quad (\text{A.24})$$

A.3 The density of periodic orbits

The density of periodic orbits is defined [90] by

$$\rho(\tau) = \int_0^{+\infty} \delta(T_{\vec{N}}(E) - \tau) d\vec{N} \quad (\text{A.25})$$

Let us change the cartesian coordinates N_i into spherical coordinates $\{R, \phi_2, \dots, \phi_p\}$ by setting

$$\begin{aligned} N_1 &= R \cos \phi_p \cos \phi_{p-1} \dots \cos \phi_3 \cos \phi_2 \\ N_2 &= R \cos \phi_p \cos \phi_{p-1} \dots \cos \phi_3 \sin \phi_2 \\ &\vdots \\ N_{p-1} &= R \cos \phi_p \sin \phi_{p-1} \\ N_p &= R \sin \phi_p \end{aligned} \quad (\text{A.26})$$

which we will write another way by $\vec{N} = (R, \phi_2, \dots, \phi_p) = (R, \phi_k)$. The jacobian is related to the determinant of the matrix

$$J_R = \begin{pmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial R} & \frac{\partial N_1}{\partial \phi_2} & \dots \\ \vdots & & \\ \frac{\partial N_p}{\partial R} & \dots & \frac{\partial N_p}{\partial \phi_p} \end{pmatrix} \quad (\text{A.27})$$

which value is

$$\det J_R = R^{p-1} (\cos \phi_p)^{p-2} (\cos \phi_{p-1})^{p-3} \dots \cos \phi_3 \quad (\text{A.28})$$

We will set $J = J_1$, so that $J_R = R^{p-1} J$. We can point out that, since $N_i \geq 0$, we have $0 \leq \phi_i \leq \pi/2$, and $\det J \geq 0$. Since the classical action is, according to (A.24),

$$S(E) = 2\pi \vec{N} \cdot \vec{I}, \quad (\text{A.29})$$

the period of an orbit whose classical action is $S(E)$ is $T = \partial S / \partial E$; using the fact that $H(\vec{I}) = E$ (condition (A.15)), it leads to

$$T(E) = 2\pi \frac{N_i}{\omega_i}, \quad 1 \leq i \leq p \quad (\text{A.30})$$

For $i = p$, it gives

$$\rho(\tau) = \int \delta\left(\frac{2\pi R \sin \phi_p}{\omega_p} - \tau\right) R^{p-1} \det J dR d\phi_2 \dots d\phi_p \quad (\text{A.31})$$

Integration over R gives, setting $d\Omega = \det J d\phi_2 \dots d\phi_p$,

$$\rho(\tau) = \tau^{p-1} \int \left(\frac{\omega_p}{2\pi \sin \phi_p} \right)^p d\Omega \quad (\text{A.32})$$

Using the fact that, from (A.30),

$$\omega_p = \frac{2\pi}{T_{\vec{N}}} N_p = \frac{2\pi}{T_{\vec{n}}} \sin \phi_p \quad (\text{A.33})$$

(where $\vec{n} = \vec{N}/R$), we get

$$\rho(\tau) = \tau^{p-1} \int \frac{d\Omega}{T^p}. \quad (\text{A.34})$$

Since the saddle-points $I\vec{N}$ are defined by $\omega_i = \lambda N_i$ (condition A.10)), let us consider p variables $I_1, \dots, I_p$ defined by $\omega_i = \lambda N_i$ for a fixed vector $\vec{N}$. We have

$$\omega_i = \frac{\partial H}{\partial I_i} \quad (\text{A.35})$$

so

$$H_{ik} \frac{\partial I_k}{\partial N_j} = \lambda \delta_{ij} + N_i \frac{\partial \lambda}{\partial N_j} \quad (\text{A.36})$$

or

$$\frac{\partial I_k}{\partial N_j} = \lambda H_{kj}^{-1} + (H^{-1}N)_k \frac{\partial \lambda}{\partial N_j} \quad (\text{A.37})$$

We can easily compute the determinant

$$\det \frac{\partial I_\alpha}{\partial N_\beta} = \det(\lambda H^{-1}) \det \left(1 + \frac{1}{\lambda} N_k \frac{\partial \lambda}{\partial N_j} \right) \quad (\text{A.38})$$

because for any matrix (a_{ij}) and any vectors (x_i) and (y_j) , the determinant $P(t) = \det(a_{ij} + tx_i y_j)$ is a polynomial in t : the Taylor formula gives

$$P(t) = P(0) + tP'(0) + \dots + t^n/n! P^{(n)}(0). \quad (\text{A.39})$$

Since “det” is a n -linear alternate form, one can derivate it as if it were a product of the column vectors: $P'(0)$ is the sum of all the determinants where one of the columns of a_{ij} has been replaced by a column of $(x_i y_j)$; $P''(0)$ is the sum of all the determinants where two columns of a_{ij} has been replaced by two columns of $(x_i y_j)$, and so on. But all 2×2 submatrices of $(x_i y_j)$ have a determinant 0, so $P(t) = P(0) + tP'(0)$, which gives here with $t = \frac{1}{\lambda}$

$$\det \frac{\partial I_\alpha}{\partial N_\beta} = \frac{\lambda^p}{\det H} \left(1 + \frac{1}{\lambda} N_k \frac{\partial \lambda}{\partial N_k} \right) \quad (\text{A.40})$$

But we also have, using (A.37):

$$N_j N_k \frac{\partial I_k}{\partial N_j} = \lambda (N H^{-1} N) \left(1 + \frac{1}{\lambda} N_k \frac{\partial \lambda}{\partial N_k} \right) \quad (\text{A.41})$$

Finally, denoting by Q the comatrix of H (i.e. the matrix whose coefficient Q_{ij} is the determinant of the matrix obtained by omitting from H the i -th row and the j -th column, and multiplied by $(-1)^{i+j}$), we have from (A.40) and (A.41)

$$\det \frac{\partial I_\alpha}{\partial N_\beta} = \frac{\lambda^{p-1}}{NQN} N_j N_k \frac{\partial I_k}{\partial N_j} \quad (\text{A.42})$$

Setting $E = H(I_1, \dots, I_p)$, E is a function of the N_i and

$$\frac{\partial E}{\partial N_k} = \omega_i \frac{\partial I_i}{\partial N_k}, \quad (\text{A.43})$$

which gives

$$N_k \frac{\partial E}{\partial N_k} = \lambda N_k N_i \frac{\partial I_i}{\partial N_k}. \quad (\text{A.44})$$

Using the fact that

$$N_k \frac{\partial E}{\partial N_k} = R \frac{\partial E}{\partial R}, \quad (\text{A.45})$$

we have

$$\det \frac{\partial I_\alpha}{\partial N_\beta} = \frac{\lambda^{p-2}}{NQN} R \frac{\partial E}{\partial R}. \quad (\text{A.46})$$

The phase space elementary volume takes the following form (with $\lambda = 2\pi/T$ coming from A.10) and T meaning $T_{\vec{N}} = RT_{\vec{n}}$:

$$\begin{aligned} dI_1 \dots dI_p &= \left| \det \frac{\partial I_\alpha}{\partial N_\beta} \right| dN_1 \dots dN_p \\ &= \frac{\lambda^{p-2}}{|NQN|} R \frac{\partial E}{\partial R} R^{p-1} dR d\Omega \\ &= \frac{(2\pi)^p}{|\omega Q \omega|} \frac{R^p}{T^p} dE d\Omega \end{aligned} \quad (\text{A.47})$$

So

$$\frac{R^p d\Omega}{T^p} = \frac{|\omega Q \omega|}{(2\pi)^p} \delta(E - H(\vec{I})) dI_1 \dots dI_p, \quad (\text{A.48})$$

which gives the final expression of the density of states

$$\rho(\tau) = \frac{\tau^{p-1}}{(2\pi)^p} \int \delta(E - H(\vec{I})) |\omega Q \omega| dI_1 \dots dI_p. \quad (\text{A.49})$$

A.4 Computation of the form factor

According to (6.12) and (A.24), the two-point correlation function reads

$$R_2^c(\epsilon) = \sum_N \left(\frac{2\pi}{T_N} \right)^{p-3} \frac{1}{|NQN|} e^{i\epsilon T_N}, \quad N = (N_1, \dots, N_p). \quad (\text{A.50})$$

Using the definition (2.8) of the two-point correlation form factor, we get

$$K(\tau) = \frac{1}{\bar{d}} \sum_{N_i} \left(\frac{2\pi}{T} \right)^{p-3} \frac{1}{|NQN|} \delta \left(\frac{T_N}{2\pi} - \tau \bar{d} \right). \quad (\text{A.51})$$

Since $S = 2\pi \vec{N} \cdot \vec{I}$, we get, by deriving (A.15) with respect to E that the periods of the orbits verify

$$T(E) = 2\pi \frac{N_i}{\omega_i}, \quad 1 \leq i \leq p. \quad (\text{A.52})$$

Inserting (A.52) into (A.50), and substituting the sum over all $\vec{N}$ with positive integer coefficients by an integral with the change of variables (A.26), the form factor becomes

$$\begin{aligned} K(\tau) &= \frac{1}{\bar{d}} \int_0^\infty dR \int_0^{\pi/2} d\phi_2 \dots d\phi_p R^{p-1} \\ &\times (\cos \phi_p)^{p-2} (\cos \phi_{p-1})^{p-3} \dots \cos \phi_3 \left(\frac{\omega_i}{R n_i} \right)^{p-3} \\ &\times \frac{1}{R^2 |nQn|} \delta \left(R \frac{n_i}{\omega_i} - \bar{d} \tau \right); \end{aligned} \quad (\text{A.53})$$

$n_i = N_i/R$ depends only on the angles $\phi_2, \dots, \phi_p$. Performing the integration over R we get

$$K(\tau) = \frac{1}{\bar{d}} \int_0^{\pi/2} d\phi_2 \dots d\phi_p (\cos \phi_p)^{p-2} (\cos \phi_{p-1})^{p-3} \dots \cos \phi_3 \left(\frac{\omega_i}{n_i} \right)^{p-2} \frac{1}{|nQn|}. \quad (\text{A.54})$$

The mean density of states (2.21) for integrable systems is given by Equation (A.6) and Equation (A.48) allows to reexpress it under the form

$$\bar{d} = \int \left(\frac{\omega_i}{n_i} \right)^{p-2} \frac{1}{|nQn|} d\Omega \quad (\text{A.55})$$

with $d\Omega = (\cos \phi_p)^{p-2} (\cos \phi_{p-1})^{p-3} \dots \cos \phi_3 d\phi_2 \dots d\phi_p$. From (A.54) we therefore have

$$K(\tau) = 1. \quad (\text{A.56})$$

Annexe B

Off-diagonal contributions for p -dimensional integrable systems: Berry's bootstrap

The purpose of this Appendix is to generalize the results of [90] to general p -dimensional integrable systems and to show that a certain saddle-point approximation permits to compute the sums over periodic orbits that appear in trace formulas.

We will follow the notations of [90]: if we denote $d_{+\epsilon}(E)$ the right-hand side of the equation (A.3) taken at the energy $E + i\epsilon$, it is easy to point out that

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{(4\pi\epsilon)^{n-1}}{C_{2n-2}^{n-1}} d_{+\epsilon}^n(E) = d(E). \quad (\text{B.1})$$

Our purpose is to verify here that the left-hand side of this equation can be computed by finding saddle-points in the sum (A.24), as done in [90] for $p = 2$.

The term $d_{+\epsilon}^n(E)$ involves terms like

$$d_{+\epsilon}^{\nu_1}(E) d_{-\epsilon}^{\nu_2}(E) = \sum_{\vec{M}^{(i)}, \vec{N}^{(j)}} \prod_{i=1}^{\nu_1} P_{\vec{M}^{(i)}} \prod_{j=1}^{\nu_2} P_{\vec{N}^{(j)}} \times \quad (\text{B.2})$$

$$e^{i[\sum_1^{\nu_1} S(\vec{M}^{(i)}) - \sum_1^{\nu_2} S(\vec{N}^{(j)})] - \epsilon(\sum_1^{\nu_1} T_{\vec{M}^{(i)}} + \sum_1^{\nu_2} T_{\vec{N}^{(j)}}) - \frac{i\pi}{4}(\sum_1^{\nu_1} \beta_{\vec{M}^{(i)}} - \sum_1^{\nu_2} \beta_{\vec{N}^{(j)}})}$$

where $\nu_1 + \nu_2 = n$, and the expression (A.24) is taken at $E + i\epsilon$. $S(\vec{M})$ is the classical action $2\pi\vec{M} \cdot \vec{I}$, and $T_{\vec{M}}$ is the period.

B.1 Development of the action up to the second order

The classical action is

$$S(\vec{I}) = 2\pi N_j I_j, \quad (\text{B.3})$$

and the saddle-points $\vec{I}$ are defined by the two conditions (A.10) and (A.15):

$$\begin{aligned} H(\vec{I}) &= E \\ \omega_j &= \lambda N_j \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

B.1.1 First order

$$\begin{aligned}
\frac{\partial S}{\partial N_i} &= 2\pi \left(N_k \frac{\partial I_k}{\partial N_i} + I_i \right) \\
&= 2\pi \left(\frac{1}{\lambda} \omega_k \frac{\partial I_k}{\partial N_i} + I_i \right) \\
&= 2\pi I_i
\end{aligned} \tag{B.5}$$

because $H(\vec{I}) = E$ implies, by derivating with respect to N_i ,
 $\omega_k(\partial I_k / \partial N_i) = 0$.

B.1.2 Second order

Differentiating the second condition of (B.4) with respect to N_k gives

$$\frac{\partial^2 H}{\partial I_i \partial I_j} \frac{\partial I_j}{\partial N_k} = H_{ij} \frac{\partial I_j}{\partial N_k} = \delta_{ik} \lambda + N_i \frac{\partial \lambda}{\partial N_k} \tag{B.6}$$

which means

$$\frac{\partial I_l}{\partial N_k} = \lambda (H^{-1})_{lk} + N_i (H^{-1})_{il} \frac{\partial \lambda}{\partial N_k} \tag{B.7}$$

We must now express the derivatives of λ by using the relation

$$\omega_k \partial I_k / \partial N_i = 0 \tag{B.8}$$

or

$$N_k \partial I_k / \partial N_i = 0 \tag{B.9}$$

Equations (B.7) and (B.9) give

$$N_l (\partial I_l / \partial N_k) = 0 = \lambda N_l (H^{-1})_{lk} + N_i N_l (H^{-1})_{il} \frac{\partial \lambda}{\partial N_k} \tag{B.10}$$

so

$$\frac{\partial \lambda}{\partial N_k} = -\lambda \frac{N_l (H^{-1})_{lk}}{N_i N_l (H^{-1})_{il}} \tag{B.11}$$

Equation (B.7) becomes

$$\begin{aligned}
\frac{\partial I_l}{\partial N_k} &= \lambda \left[(H^{-1})_{lk} - \frac{N_i (H^{-1})_{il} N_j (H^{-1})_{jk}}{N_i N_l (H^{-1})_{il}} \right] \\
&= \left(\frac{2\pi}{T} \right) \left[\frac{(Q_{ij} Q_{lk} - Q_{il} Q_{jk}) N_i N_j}{\det H \ N Q N} \right]
\end{aligned} \tag{B.12}$$

Finally, the second-order term in the development of $S(N + \delta N)$ is

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2 S}{\partial N_i \partial N_j} \delta N_i \delta N_j = \frac{2\pi^2}{T} \frac{N Q N \ \delta N Q \delta N - N Q \delta N \ N Q \delta N}{\det H \ N Q N} \tag{B.13}$$

B.2 The saddle-point manifold

B.2.1 The manifold

Let $\{\phi_2, \dots, \phi_k\}$ be a set of angles between 0 and $\pi/2$. The saddle-points in the previous sum (B.2) are chosen to be $(R_i, \phi_k), (R'_j, \phi_k)$. The saddle-point manifolds will be

$$\begin{aligned}\vec{M}^{(i)} &= (R_i, \phi_k^{(i)}) \\ \vec{N}^{(j)} &= (R'_j, \phi_k'^{(j)})\end{aligned}\tag{B.14}$$

where the angles of the points in the manifold are assumed to be close to the ϕ_k :

$$\phi_k^{(i)} = \phi_k + \delta\phi_k^{(i)}, |\delta\phi_k^{(i)}| \ll |\phi_k| \tag{B.15}$$

(and the same condition for the $\phi_k'^{(j)}$).

Indeed, if we follow [90] and impose to the vectors the condition

$$\sum_{i=1}^{\nu_1} \vec{M}^{(i)} = \sum_{j=1}^{\nu_2} \vec{N}^{(j)}, \tag{B.16}$$

then let us verify that the saddle-point condition for the smooth term is realized, i.e. that the terms of order 0 (smooth term condition) and 1 (saddle-point condition) in the development of $\sum S(\vec{M}^{(i)}) - \sum S(\vec{N}^{(j)})$ do cancel.

We have seen that

$$S(\vec{N} + \delta\vec{N}) = S(\vec{N}) + 2\pi \vec{I} \cdot \delta\vec{N} + \frac{2\pi^2}{T} \frac{NQ N \delta N Q \delta N - (NQ \delta N)^2}{\det H N Q N}, \tag{B.17}$$

if we develop the classical action up to the second order.

Let us consider a set of n vectors $\vec{N}^{(i)} = (R_i, \phi_k + \delta\phi_k^{(i)})$, and compute the difference

$$S_n = \sum_1^n S(\vec{N}^{(i)}) - S(\sum_1^n \vec{N}^{(i)}) \tag{B.18}$$

up to the second order. We will note $\vec{N} = (1, \phi_k)$, and $R = \sum R_i$, so that $\sum \vec{N}^{(i)}|_{\phi_k^{(i)}=\phi_k} = R\vec{N}$.

We have

$$\vec{N}^{(i)}|_{\phi_k^{(i)}=\phi_k} = (R_i, \phi_k) = R_i \vec{N} \tag{B.19}$$

and $\forall \alpha, \vec{I}_{\alpha \vec{N}} = \vec{I}_{\vec{N}}$.

B.2.2 Order 0

$S(\vec{N}) = 2\pi \vec{N} \cdot \vec{I}_{\vec{N}}$, so

$$\begin{aligned}S(\vec{N}^{(i)})|_{\phi_k^{(i)}=\phi_k} &= 2\pi R_i \vec{N} \cdot \vec{I}_{\vec{N}} \\ S(\sum \vec{N}^{(i)})|_{\phi_k^{(i)}=\phi_k} &= 2\pi R \vec{N} \cdot \vec{I}_{\vec{N}}\end{aligned}\tag{B.20}$$

So the 0-order term cancels.

B.2.3 Order 1

The vector $\vec{N}^{(i)}$ has the following form:

$$\begin{aligned} & R_i \cos \phi_p^{(i)} \cos \phi_{p-1}^{(i)} \dots \cos \phi_3^{(i)} \cos \phi_2^{(i)} \\ & R_i \cos \phi_p^{(i)} \cos \phi_{p-1}^{(i)} \dots \cos \phi_3^{(i)} \sin \phi_2^{(i)} \\ & \vdots \\ & R_i \cos \phi_p^{(i)} \sin \phi_{p-1}^{(i)} \\ & R_i \sin \phi_p^{(i)} \end{aligned} \tag{B.21}$$

Up to the first order in $\delta\phi_k^{(i)}$, we have

$$\delta N_j^{(i)} = \frac{\partial N_j}{\partial \phi_k^{(i)}} \delta \phi_k^{(i)} \tag{B.22}$$

Taken at the point $\phi_k^{(i)} = \phi_k$, it gives

$$\begin{aligned} \delta N_j^{(i)}|_{\phi_k^{(i)}=\phi_k} &= R_i \frac{\partial N_j}{\partial \phi_k^{(i)}} \delta \phi_k^{(i)} \\ &= R_i J_{jk} \delta \phi_k^{(i)} \end{aligned} \tag{B.23}$$

That means that

$$\begin{aligned} 2\pi \vec{I}_{\vec{N}^{(i)}} \cdot \delta \vec{N}^{(i)}|_{\phi_k^{(i)}=\phi_k} &= 2\pi I_j \delta N_j^{(i)}|_{\phi_k^{(i)}=\phi_k} \\ &= 2\pi R_i I_j J_{jk} \delta \phi_k^{(i)} \end{aligned} \tag{B.24}$$

Similarly, the computation of $\delta(\sum \vec{N}^{(i)})$ gives

$$\delta(\sum \vec{N}^{(i)})_j|_{\phi_k^{(i)}=\phi_k} = J_{j\alpha} (R_i \delta \phi_\alpha^{(i)}) \tag{B.25}$$

where there is of course a summation over repeated indices. So

$$\begin{aligned} 2\pi \vec{I}_{\sum \vec{N}^{(i)}} \cdot \delta(\sum \vec{N}^{(i)})|_{\phi_k^{(i)}=\phi_k} &= 2\pi I_j \delta(\sum \vec{N}^{(i)})_j|_{\phi_k^{(i)}=\phi_k} \\ &= 2\pi I_j J_{j\alpha} (R_i \delta \phi_\alpha^{(i)}) \end{aligned} \tag{B.26}$$

and the term of order 1 in S_n vanishes.

B.2.4 Order 2

We know that $\forall \alpha, T_{\alpha \vec{N}} = \alpha T_{\vec{N}}$. Knowing also that

$$\begin{cases} \vec{N}^{(i)} = R_i \vec{N} \\ \text{and} \\ \delta N_j^{(i)}|_{\phi_k^{(i)}=\phi_k} = R_i J_{jk} \delta \phi_k^{(i)}, \end{cases} \tag{B.27}$$

we can compute the second-order terms:

$$\begin{aligned} & \left\{ \vec{N}^{(i)} Q \vec{N}^{(i)} \delta \vec{N}^{(i)} Q \delta \vec{N}^{(i)} - (\vec{N}^{(i)} Q \delta \vec{N}^{(i)})^2 \right\}_{\phi_k^{(i)}=\phi_k} = \\ & R_i^4 \left[(N Q N) {}^t J Q J_{kl} - (N Q J)_k (N Q J)_l \right] \delta \phi_k^{(i)} \delta \phi_l^{(i)} \end{aligned} \tag{B.28}$$

and

$$\begin{aligned} & \{(\sum \vec{N}^{(i)})_Q (\sum \vec{N}^{(i)})_\delta (\sum \vec{N}^{(i)})_Q \delta (\sum \vec{N}^{(i)}) \\ & \quad - \left((\sum \vec{N}^{(i)})_Q \delta (\sum \vec{N}^{(i)}) \right)^2 \}_{|\phi_k^{(i)} = \phi_k} \\ & = R^2 [NQN \ (^tJQJ)_{\alpha\beta} - (NQJ)_\alpha (NQJ)_\beta] R_\gamma \delta \phi_\alpha^{(\gamma)} R_\delta \delta \phi_\beta^{(\delta)}. \end{aligned} \quad (\text{B.29})$$

Finally, S_n can be written

$$\begin{aligned} S_n = \frac{2\pi^2}{T} & \frac{NQN \ (^tJQJ)_{ij} - (NQJ)_i (NQJ)_j}{\det H \ NQN} \times \\ & \left\{ R_\alpha \delta \phi_i^{(\alpha)} \delta \phi_j^{(\alpha)} - \frac{1}{R} R_\gamma R_\delta \delta \phi_i^{(\gamma)} \delta \phi_j^{(\delta)} \right\} \end{aligned} \quad (\text{B.30})$$

If we call

$$A_{ij} = \frac{2\pi^2}{T} \frac{NQN \ (^tJQJ)_{ij} - (NQJ)_i (NQJ)_j}{\det H \ NQN}, \quad (\text{B.31})$$

and since

$$\begin{aligned} R_\alpha \delta \phi_i^{(\alpha)} \delta \phi_j^{(\alpha)} & - \frac{1}{R} R_\gamma R_\delta \delta \phi_i^{(\gamma)} \delta \phi_j^{(\delta)} = \frac{1}{R} R_\alpha R_\beta \delta \phi_i^{(\alpha)} (\delta \phi_j^{(\alpha)} - \delta \phi_j^{(\beta)}) \\ & = \frac{1}{R} \sum_{\alpha \neq \beta} R_\alpha R_\beta \delta \phi_i^{(\alpha)} (\delta \phi_j^{(\alpha)} - \delta \phi_j^{(\beta)}) \\ & = \frac{1}{R} \sum_{\alpha < \beta} R_\alpha R_\beta (\delta \phi_i^{(\alpha)} - \delta \phi_i^{(\beta)}) (\delta \phi_j^{(\alpha)} - \delta \phi_j^{(\beta)}) \end{aligned} \quad (\text{B.32})$$

we finally have

$$S_n = A_{ij} \frac{1}{R_1 + \dots + R_n} \sum_{\alpha < \beta} R_\alpha R_\beta (\delta \phi_i^{(\alpha)} - \delta \phi_i^{(\beta)}) (\delta \phi_j^{(\alpha)} - \delta \phi_j^{(\beta)}) \quad (\text{B.33})$$

We can here point out that the factor $\det A$ can be easily computed by Sylvester theorem, if we point out that NQN , where $\vec{N} = (1, \phi_k)$, is equal to $(^tJQJ)_{11}$, therefore that

$$A_{ij} = \frac{2\pi^2}{T} \frac{1}{\det H \ NQN} \left| \begin{pmatrix} (^tJQJ)_{11} & (^tJQJ)_{1j} \\ (^tJQJ)_{i1} & (^tJQJ)_{ij} \end{pmatrix} \right|. \quad (\text{B.34})$$

Sylvester theorem ([120]) tells us that, if Ω is the matrix of all the $m \times m$ determinants obtained by bordering a $h \times h$ submatrix A_h of the $p \times p$ matrix A with $(m-1)$ rows and $(m-1)$ columns of A , then the determinant of Ω is given by

$$\det \Omega = (\det A_h)^{C_{p-h-1}^{m-h}} (\det A)^{C_{p-h-1}^{m-h-1}} \quad (\text{B.35})$$

Here the matrix

$$\left\{ \left| \begin{pmatrix} (^tJQJ)_{11} & (^tJQJ)_{1j} \\ (^tJQJ)_{i1} & (^tJQJ)_{ij} \end{pmatrix} \right| \right\}_{ij} \quad (\text{B.36})$$

is obtained by bordering the 1×1 submatrix $(^tJQJ)_{11}$ to make all the determinants of the 2×2 submatrices of tJQJ . So

$$\begin{aligned} \det \left\{ \left| \begin{pmatrix} (^tJQJ)_{11} & (^tJQJ)_{1j} \\ (^tJQJ)_{i1} & (^tJQJ)_{ij} \end{pmatrix} \right| \right\}_{ij} \\ & = (\det(^tJQJ)_{11})^{C_{p-1-1}^{2-1}} (\det(^tJQJ))^{C_{p-1-1}^{2-1-1}} \\ & = [(^tJQJ)_{11}]^{p-2} \det(^tJQJ), \end{aligned} \quad (\text{B.37})$$

which implies that

$$\det A = \left(\frac{2\pi^2}{T} \right)^{p-1} \frac{(\det J)^2}{NQN}. \quad (\text{B.38})$$

B.3 Integration over the smooth-term manifold

We have to evaluate the expression (B.2), which we will call $D(E)$, by integration over all saddle-point manifolds. One saddle-point $\{\vec{M}^{(i)}, \vec{N}^{(j)}\}$ is defined by a set of R_i, R'_j, ϕ_k , and we have, for each of them, to integrate over the whole saddle-point manifold $-\infty \leq \delta\phi_i^{(k)} \leq \infty$. The difference of the sum of actions of $\vec{M}^{(i)}$ and $\vec{N}^{(j)}$ can be expressed using $S_{\nu_1}(\{\vec{M}^{(i)}\})$ and $S_{\nu_2}(\{\vec{N}^{(j)}\})$: since $\sum \vec{M}^{(i)} = \sum \vec{N}^{(j)}$, formula (B.30) gives

$$\sum_1^{\nu_1} S(\vec{M}^{(i)}) - \sum_1^{\nu_2} S(\vec{N}^{(j)}) = S_{\nu_1}(\{\vec{M}^{(i)}\}) - S_{\nu_2}(\{\vec{N}^{(j)}\}) \quad (\text{B.39})$$

But since equation (B.33) tells us that this difference depends only on differences of angles between the different vectors, we have to consider that one saddle-point is given by an arbitrary vector, for instance $\vec{M}^{(1)}$, and that we have to integrate over the saddle-point manifold defined by the other vectors. The sum over a manifold corresponding to a saddle-point $\vec{M}^{(i)}$ can be changed into an integration over the angles and the radius:

$$\sum_{\vec{M}^{(i)}} = \int \det J^{(i)} R_i^{p-1} dR d\delta\phi_i^{(k)} \quad (\text{B.40})$$

with $-\infty \leq \delta\phi_i^{(k)} \leq \infty$, and $J^{(i)}$ the jacobian matrix of the variable changing. So the sum over all the saddle-points gives

$$\sum_{s.p.} = \sum_{\vec{M}^{(1)}} = \int \det J R_1^{p-1} dR d\phi_k \quad (\text{B.41})$$

with $0 \leq \phi_k \leq \pi/2$, and the sum over a manifold corresponding to a given saddle-point $\vec{M}^{(1)}$ will give

$$\int_0^{+\infty} \prod_{i=2}^{\nu_1} dR_i \prod_{j=1}^{\nu_2} dR'_j \int_{-\infty}^{+\infty} d\phi_2^{(2)} \dots d\phi_p^{(\nu_1)} \int d\phi_2'^{(1)} \dots d\phi_p'^{(\nu_2)} (\det J)^{n-1} \quad (\text{B.42})$$

by changing $d\delta\phi_i^{(k)}$ into $\phi_k^{(i)}$ with formula (B.15), and using the fact that, at order 0, $\det J^{(i)} = \det J$.

The saddle-points are $(R_i, \phi_k), (R'_j, \phi_k)$; therefore the prefactors can be expressed with the prefactor P of $\vec{N} = (1, \phi_k)$:

$$P_{\vec{M}^{(i)}} = \frac{1}{R_i^{\frac{p-1}{2}}} P; \quad P = \left(\frac{2\pi}{T} \right)^{\frac{p-3}{2}} \frac{1}{\sqrt{|NQN|}} \quad (\text{B.43})$$

The saddle-point condition (B.16) developed at order 0 and 1 gives:

$$\text{order 0: } R_1 + \dots + R_{\nu_1} = R'_1 + \dots + R'_{\nu_2}$$

order 1: according to equation (B.23), the condition is

$$\forall k, R_\alpha J_{ki} \delta \phi_i^{(\alpha)} = R'_\beta J_{kj} \delta \phi_j'^{(\beta)} \quad (\text{B.44})$$

(with implicit sum over $\alpha \geq 2$, and $\beta \geq 1$). But since $\phi_k^{(i)} = \phi_k + \delta \phi_k^{(i)}$ and thanks to the relation at order 0, it becomes

$$\forall k, \sum_{\alpha \geq 2} R_\alpha J_{ki} \phi_i^{(\alpha)} = \sum_{\beta} R'_\beta J_{kj} \phi_j'^{(\beta)}. \quad (\text{B.45})$$

We have to evaluate

$$\begin{aligned} D(E) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\phi_2 \dots d\phi_p P^n \int \prod_{i=1}^{\nu_1} dR_i \prod_{j=1}^{\nu_2} dR'_j \int d\phi_2^{(2)} \dots d\phi_p^{(\nu_1)} \\ &\times \int d\phi_2'^{(1)} \dots d\phi_p'^{(\nu_2)} \delta(R - R') \prod_{k=2}^p \delta(R J_k \phi - R' J_k \phi') \\ &\times (\det J)^n R_1^{\frac{p-1}{2}} \dots R_{\nu_1}^{\frac{p-1}{2}} R_1'^{\frac{p-1}{2}} \dots R_{\nu_2}^{\frac{p-1}{2}} \exp \mathcal{D} \end{aligned} \quad (\text{B.46})$$

where we have set $R = R_1 + \dots + R_{\nu_1}$, $R' = R'_1 + \dots + R'_{\nu_2}$ and

$$\begin{aligned} R J_k \phi &= R_2 J_{ki} \phi_i^{(2)} + \dots + R_{\nu_1} J_{ki} \phi_i^{(\nu_1)}, \\ R' J_k \phi' &= R'_1 J_{kj} \phi_j'^{(1)} + \dots + R'_{\nu_2} J_{kj} \phi_j'^{(\nu_2)}, \\ \mathcal{D} &= i A_{ij} \left(S_{\nu_1}(\{\vec{M}^{(i)}\}) - S_{\nu_2}(\{\vec{N}^{(j)}\}) \right) \\ &- \epsilon(R + R') T - \frac{i\pi}{4} \left(\sum_1^{\nu_1} \beta_{\vec{M}^{(i)}} - \sum_1^{\nu_2} \beta_{\vec{N}^{(j)}} \right), \end{aligned} \quad (\text{B.47})$$

coming from (B.2) and (B.39). Here, according to (A.22), $\beta_{\vec{M}} = -(p-1) - 2\alpha$, and $(-1)^\alpha$ is the sign of MQM . That means that if $\vec{M} = R\vec{N}$, $\beta_{\vec{M}} = \beta_{\vec{N}}$. So

$$\sum_1^{\nu_1} \beta_{\vec{M}^{(i)}} - \sum_1^{\nu_2} \beta_{\vec{N}^{(j)}} = (\nu_1 - \nu_2) \beta_{\vec{N}} = -(\nu_1 - \nu_2)(p - 1 + 2\alpha). \quad (\text{B.48})$$

Using the expression (B.30) of S_n , we have

$$\begin{aligned} S_{\nu_1}(\{\vec{M}^{(i)}\}) - S_{\nu_2}(\{\vec{N}^{(j)}\}) &= A_{ij} \left\{ R_\alpha \delta \phi_i^{(\alpha)} \delta \phi_j^{(\alpha)} - R'_\alpha \delta \phi_i'^{(\alpha)} \delta \phi_j'^{(\alpha)} \right\} \\ &- A_{ij} \left\{ \frac{1}{R} R_\gamma R_\delta \delta \phi_i^{(\gamma)} \delta \phi_j^{(\delta)} - \frac{1}{R'} R'_\gamma R'_\delta \delta \phi_i'^{(\gamma)} \delta \phi_j'^{(\delta)} \right\} \end{aligned} \quad (\text{B.49})$$

but the second part of the right-hand side of this equation vanishes thanks to the saddle-point condition (B.44). So

$$\begin{aligned} \mathcal{D} &= i A_{ij} \left(\sum_{\alpha=2}^p R_\alpha \delta \phi_i^{(\alpha)} \delta \phi_j^{(\alpha)} - \sum_{\beta=1}^p R'_\beta \delta \phi_i'^{(\beta)} \delta \phi_j'^{(\beta)} \right) \\ &- \epsilon(R + R')T - \frac{i\pi}{4}(\nu_1 - \nu_2)(p - 1 + 2\alpha). \end{aligned} \quad (\text{B.50})$$

Using the integral form of the delta-function

$$\begin{aligned} \delta(RJ_k\phi - R'J_k\phi') &= \frac{1}{2\pi} \int d\alpha_k \exp \left(i(R_2 J_{ki} \phi_i^{(2)} + \dots + R_{\nu_1} J_{ki} \phi_i^{(\nu_1)} \right. \\ &\quad \left. - R'_1 J_{kj} \phi_j'^{(1)} - \dots - R'_{\nu_2} J_{kj} \phi_j'^{(\nu_2)}) \alpha_k \right), \end{aligned} \quad (\text{B.51})$$

we can integrate over all angles $\phi_k^{(i)}$: for a given $\alpha \geq 2$, since $\det A$ has the sign of NQN , that is $(-1)^\alpha$ (see (B.38)),

$$\begin{aligned} \int \prod_{k=2}^p d\phi_k^{(\alpha)} e^{i R_\alpha A_{ij} \phi_i^{(\alpha)} \phi_j^{(\alpha)} + i R_\alpha J_{ki} \phi_i^{(\alpha)} \alpha_k} \\ = \left(\frac{i\pi}{R_\alpha} \right)^{\frac{p-1}{2}} \frac{e^{i\frac{\pi}{2}\alpha(p-1)}}{\sqrt{|\det A|}} e^{-\frac{i}{4} R_\alpha (JA^{-1} {}^t J)_{kl} \alpha_k \alpha_l} \end{aligned} \quad (\text{B.52})$$

and for $\beta \geq 1$, we have the conjugated complex

$$\begin{aligned} \int \prod_{k=2}^p d\phi_k'^{(\beta)} e^{-i R'_\beta A_{ij} \phi_i'^{(\beta)} \phi_j'^{(\beta)} - i R'_\beta J_{kj} \phi_j'^{(\beta)} \alpha_k} \\ = \left(\frac{-i\pi}{R_\beta} \right)^{\frac{p-1}{2}} \frac{e^{-i\frac{\pi}{2}\alpha(p-1)}}{\sqrt{|\det A|}} e^{\frac{i}{4} R'_\beta (JA^{-1} {}^t J)_{kl} \alpha_k \alpha_l}. \end{aligned} \quad (\text{B.53})$$

Therefore

$$\begin{aligned}
& \int \prod_{i, \alpha} d\phi_i^{(\alpha)} \int \prod_{j, \beta} d\phi_j'^{(\beta)} \delta(RJ_k\phi - R'J_k\phi') \\
& \times e^{iA_{ij} \left(\sum_{\alpha=2}^p R_\alpha \delta\phi_i^{(\alpha)} \delta\phi_j^{(\alpha)} - \sum_{\beta=1}^p R'_\beta \delta\phi_i'^{(\beta)} \delta\phi_j'^{(\beta)} \right)} \\
& = \frac{1}{(2\pi)^{p-1}} \int d\alpha_2 \dots d\alpha_p \frac{(i)^{\frac{p-1}{2}(\nu_1-\nu_2-1)} \pi^{\frac{p-1}{2}(\nu_1+\nu_2-1)}}{[R_2 \dots R_{\nu_1} R'_1 \dots R'_{\nu_2}]^{\frac{p-1}{2}}} \\
& \times e^{i\frac{\pi}{2}\alpha(\nu_1-1-\nu_2)(p-1)} \\
& \times \frac{1}{\sqrt{|\det A|}^{(n-1)}} e^{-\frac{i}{4}(R_2+\dots+R_{\nu_1}-R'_1-\dots-R'_{\nu_2})(JA^{-1} {}^t J)_{kl}\alpha_k\alpha_l} \\
& = \frac{1}{(2\pi)^{p-1}} \int d\alpha_2 \dots d\alpha_p \frac{(i)^{\frac{p-1}{2}(\nu_1-\nu_2-1)} \pi^{\frac{p-1}{2}(\nu_1+\nu_2-1)}}{[R_2 \dots R_{\nu_1} R'_1 \dots R'_{\nu_2}]^{\frac{p-1}{2}}} \\
& \times \frac{e^{i\frac{\pi}{2}\alpha(\nu_1-1-\nu_2)(p-1)}}{\sqrt{|\det A|}^{(n-1)}} e^{\frac{i}{4} R_1 (JA^{-1} {}^t J)_{kl}\alpha_k\alpha_l} \\
& = \frac{1}{(2\pi)^{p-1}} \frac{e^{i\frac{\pi}{4}(p-1)(\nu_1-\nu_2-1)} \pi^{\frac{p-1}{2}(n-1)} e^{i\frac{\pi}{4}2\alpha(\nu_1-1-\nu_2)(p-1)}}{[R_2 \dots R_{\nu_1} R'_1 \dots R'_{\nu_2}]^{\frac{p-1}{2}} \sqrt{|\det A|}^{(n-1)}} \\
& \times \frac{(2\pi)^{\frac{p-1}{2}}}{\sqrt{\det \left(\frac{2iA}{R_1} \right)^{-1} (\det J)^2}} \\
& = \frac{e^{i\frac{\pi}{4}(\nu_1-\nu_2)(p-1+2\alpha)}}{[R_1 \dots R_{\nu_1} R'_1 \dots R'_{\nu_2}]^{\frac{p-1}{2}}} \frac{\pi^{\frac{p-1}{2}(n-2)}}{\sqrt{|\det A|}^{(n-2)}} \frac{1}{\det J}. \tag{B.54}
\end{aligned}$$

$D(E)$ can be reexpressed the following way: using (B.48), one has

$$\begin{aligned}
D(E) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\phi_2 \dots d\phi_p P^n \int \prod_{i=1}^{\nu_1} dR_i \prod_{j=1}^{\nu_2} dR'_j \delta(R - R') (\det J)^{n-1} \\
&\quad \times \frac{\pi^{\frac{p-1}{2}(n-2)}}{\sqrt{|\det A|}^{(n-2)}} e^{-\epsilon(R+R')T}. \tag{B.55}
\end{aligned}$$

So

$$\begin{aligned}
D(E) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\phi_2 \dots d\phi_p \left(\frac{2\pi}{T} \right)^{p-n-1} (\det J) \frac{|NQN|^{\frac{n-2}{2}}}{\sqrt{|NQN|}^n} \\
&\quad \times \int \prod_{i=1}^{\nu_1} dR_i \prod_{j=1}^{\nu_2} dR'_j \delta(R - R') e^{-\epsilon(R+R')T} \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\phi_2 \dots d\phi_p \left(\frac{2\pi}{T} \right)^{p-n-1} \frac{\det J}{|NQN|} \int \prod_{i=1}^{\nu_1} dR_i \prod_{j=1}^{\nu_2} dR'_j \\
&\quad \times \delta(R - R') e^{-\epsilon(R+R')T} \tag{B.56}
\end{aligned}$$

Since we have computed [90]

$$\int_0^\infty \prod_{i=1}^{\nu_1} dR_i \prod_{j=1}^{\nu_2} dR'_j \delta(R - R') e^{-\epsilon(R+R')T} = \left(\frac{1}{2T} \right)^{n-1} C_{n-2}^{\nu_1-1} \epsilon^{-(n-1)}, \tag{B.57}$$

we have

$$\begin{aligned}
 D(E) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\phi_2 \dots d\phi_p \frac{1}{(4\pi\epsilon)^{n-1}} \frac{\det J}{|NQN|} \left(\frac{2\pi}{T}\right)^{p-2} C_{n-2}^{\nu_1-1} \\
 &= \frac{1}{(4\pi\epsilon)^{n-1}} C_{n-2}^{\nu_1-1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{2\pi}{T}\right)^{p-2} \frac{\det J}{|NQN|} d\phi_2 \dots d\phi_p
 \end{aligned} \tag{B.58}$$

and we recognize the density of states (A.48):

$$\left(\frac{2\pi}{T}\right)^{p-2} (\det J) d\phi_2 \dots d\phi_p = \left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 |\omega Q \omega| \delta(E - H(\vec{I})) dI_1 \dots dI_p. \tag{B.59}$$

To compute $d_\epsilon^n(E)$, we have to sum the $d_{+\epsilon}^{\nu_1}(E)$ $d_{-\epsilon}^{\nu_2}(E)$: it gives

$$(4\pi\epsilon)^{n-1} d_\epsilon^n(E) = \sum_{\nu_1=1}^{n-1} C_n^{\nu_1} C_{n-2}^{\nu_1-1} \int \delta(E - H(\vec{I})) dI_1 \dots dI_p \tag{B.60}$$

or, since $\sum_{\nu_1=1}^{n-1} C_n^{\nu_1} C_{n-2}^{\nu_1-1} = C_{2n-2}^{n-1}$,

$$\frac{(4\pi\epsilon)^{n-1}}{C_{2n-2}^{n-1}} d_\epsilon^n(E) = \int \delta(E - H(\vec{I})) dI_1 \dots dI_p. \tag{B.61}$$

The left-hand side of the equation goes to $\bar{d}$ as ϵ goes to zero: the bootstrap condition is verified.

Annexe C

Two-Point Correlation Form Factor at the Origin for a Circular Billiard

This appendix aims at computing the 2-point correlation form factor at the origin in a bidimensional circular billiard of radius R with an Aharonov-Bohm flux line of strength α inside of it. We first derive the Green function in the free case of a circular billiard (which is integrable); section C.3 shows that the same Green function can be obtained directly by considering the eigenvalues of the free billiard. We then compute the semi-classical density of states when the system is perturbed by an Aharonov-Bohm flux line. In the last section, taking into account the interactions between periodic orbits, we compute the 2 point correlation form factor $K(0)$.

C.1 The Green function in the free case

The main step in deriving trace formulas is the semiclassical approximation for the (advanced) Green function

$$G_+(q_f, q_i, E) = \sum_n \frac{\bar{\Psi}_n(q_i) \Psi_n(q_f)}{E - E_n + i\epsilon}, \quad (\text{C.1})$$

where E_n is the set of energy levels (the eigenvalues of the Hamiltonian) and Ψ_n the eigenfunctions, as a sum over all classical trajectories with energy E connecting the initial point q_i to the final point q_f

$$G_+(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_{cl} A_{cl} \exp\left(\frac{i}{\hbar} S(q_i, q_f, E) - i\frac{\pi}{2}\mu\right). \quad (\text{C.2})$$

$S(q_i, q_f, E)$ is the classical action computed along a trajectory; μ is a phase (the Maslov index) which counts points where the simple semiclassical approximation breaks down. In the Gutzwiller trace formula it takes into account the phases π due to reflections and the loss of phase $-\pi/2$ due to the presence of conjugated points. A_{tr} is the prefactor [62]

$$A_{cl} = \frac{2\pi}{(2i\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{1}{\dot{q}_{f//} \dot{q}_{i//}} \det \left(-\frac{\partial^2 S}{\partial q_{f\perp} \partial q_{i\perp}} \right)} \quad (\text{C.3})$$

where we use the special coordinate system where $q_{//}$ varies along the trajectory and $q_{\perp}$ is transverse and has constant value along the trajectory. We are interested in the density of states,

which may be written as a trace over the advanced Green function by

$$d(E) = -\frac{1}{\pi} \text{Im} \int dq G_+(q, q). \quad (\text{C.4})$$

Therefore we just need to express the Green function in the case where the initial and the final points are the same: $q_i = q_f$. In this case, a saddle-point approximation for the computation of the product of Green functions shows [62] that G can be written under the form

$$G(q, q, E) = \sum_{p.o.} \frac{2\pi}{(2i\pi)^{3/2}} \frac{1}{\dot{q}_{//}} \frac{1}{\sqrt{M_{12}}} \exp\left(\frac{i}{\hbar} S(q, q, E) - i\frac{\pi}{2}\mu\right) \quad (\text{C.5})$$

where M is the monodromy matrix corresponding to the classical periodic orbit going from q to itself. $S(q, q, E)$ is the classical action along the trajectory

$$S(q, q, E) = \oint pdq = kl_p \quad (\text{C.6})$$

where l_p is the length of a periodic orbit. In Equation (C.5) we sum over all periodic orbits starting from and coming back to q .

C.2 The density of states in the free case

C.2.1 The periodic orbits

We now consider a circular billiard with radius R and Dirichlet boundary conditions. The classical trajectories are straight lines in the interior of the billiard, and the reflection on the boundary follows the classical reflection rule. The periodic orbits are characterized by the repetition number $n \geq 1$, which is the number of repetitions of a certain primitive periodic orbit; the number $N > 0$ of points where the trajectory hits the boundary; the number M ($0 < M < N/2$, M and N coprime) of times the trajectory encircles the center of the circle. All primitive orbits can therefore be labeled with 4 numbers: $p = (N, M, n, \epsilon)$, where $N > 0$, $0 < M < N/2$, $n \geq 1$; the last number, $\epsilon = \pm 1$, distinguishes between an orbit and its time-reverse. Fig.C.1 gives some examples of periodic orbits. The length of a periodic orbit p is given by

$$l_p = 2NnR \sin \frac{\pi M}{N}. \quad (\text{C.7})$$

C.2.2 The monodromy matrix

The monodromy matrix associated to a trajectory which consists of a series of free propagation and reflections is the product of the monodromy matrices associated to these propagations and reflections. Fig.C.2 shows the classical trajectories $\bar{q}(t)$ corresponding respectively to a free motion (Fig.C.2a) and to a reflection (Fig.C.2b). The trajectory $\bar{q}$ goes from $\bar{q}_i$ to $\bar{q}_f$, has a length l , and it is performed with constant energy $E = k^2$. If we consider a neighbouring trajectory starting with position and momentum slightly modified along the transverse coordinate ($q_i = \bar{q}_i + \delta q_i$ and $p_i = \bar{p}_i + \delta p_i$), then the final position and momentum are modified following

$$\begin{pmatrix} \delta q_f \\ \delta p_f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & l/k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta q_i \\ \delta p_i \end{pmatrix}. \quad (\text{C.8})$$

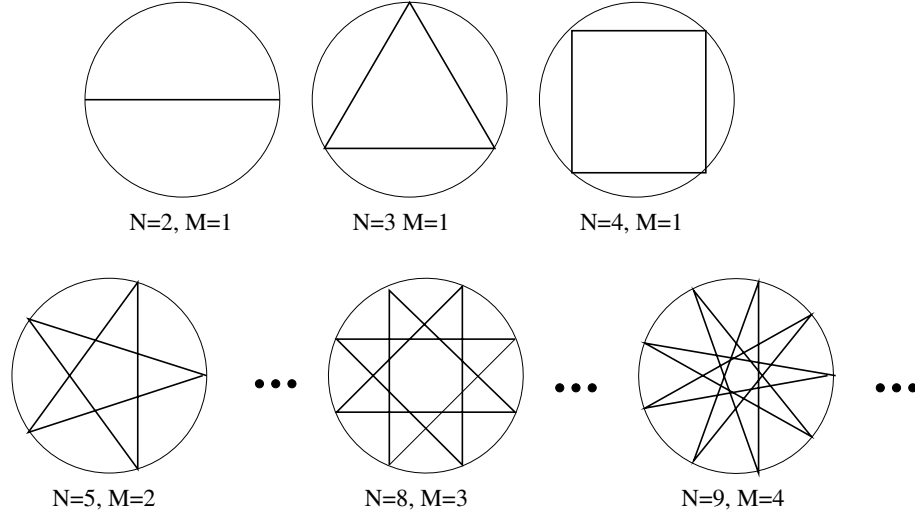


FIG. C.1 – *Some examples of periodic orbits in the circular billiard with Dirichlet boundary conditions*

In the case of a reflection, we consider a classical trajectory $\bar{q}$ hitting the boundary at the point I with an angle θ . The initial momentum therefore makes an angle θ with the horizontal, and $|\bar{p}_i| = k$. A neighbouring trajectory will have a momentum $p_i = \bar{p}_i + \delta p_i$ making an angle $\delta\alpha_i$ with $\bar{p}_i$, and it will hit the boundary at the point A . The transverse final position of the neighbouring trajectory in the local coordinate system is equal to the opposite of the transverse initial position: they have same length (almost equal to $|AI|$ to the first order since $\delta\alpha$ is small), and opposite sign. The final angle is $\delta\alpha_f = -\delta\alpha_i + 2\beta$, where $\beta = \delta q_i / (R \cos \theta)$ is the angle between the horizontal and the point A . Finally the monodromy matrix associated to a reflection is

$$\begin{pmatrix} \delta q_f \\ \delta p_f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ \frac{2k}{R \cos \theta} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta q_i \\ \delta p_i \end{pmatrix}. \quad (\text{C.9})$$

If we now consider a periodic trajectory starting and ending at point q and labeled by (N, M, n, ϵ) , it will consist of one free propagation of length x , then a reflection, followed by a series of $nN - 1$ reflections and $nN - 1$ free propagations of length

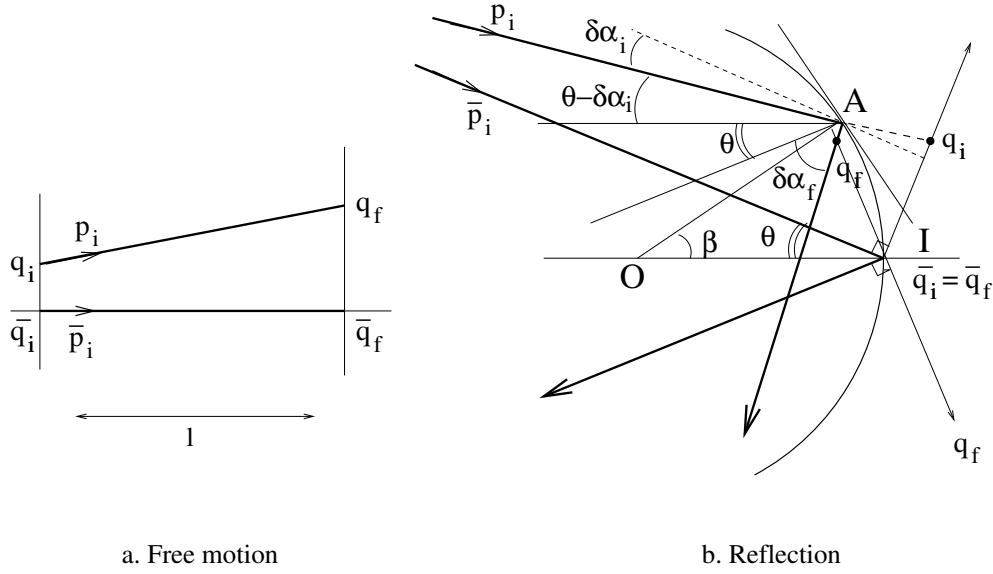
$$l = 2R \sin \frac{\pi M}{N}, \quad (\text{C.10})$$

and finally one free propagation of length $l - x$. The monodromy matrix corresponding to a reflection for such an orbit is

$$R = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 4k/l & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{C.11})$$

since in this case the reflection angle θ is equal to $\pi/2 - M\pi/N$, so that $\cos \theta = l/2R$; and the monodromy matrix corresponding to a free propagation of length l is

$$T_l = \begin{pmatrix} 1 & l/k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{C.12})$$

FIG. C.2 – Trajectories in the vicinity of a classical trajectory $\bar{q}$.

The total monodromy matrix is

$$M_{n,N} = T_{l-x}(RT_l)^{nN-1}RT_x = \begin{pmatrix} \frac{4nNx}{l} - 2nN + 1 & -\frac{nNl}{k} \left(1 - \frac{2x}{l}\right)^2 \\ \frac{4nNk}{l} & 2nN + 1 - \frac{4nNx}{l} \end{pmatrix}. \quad (\text{C.13})$$

Suppose that the point q is at a distance r of the center of the circle. Then it is easy to verify that the coefficient $\sqrt{M_{12}}$ can be rewritten

$$\begin{aligned} \sqrt{M_{12}} &= \sqrt{-\frac{l_p}{k} \left|1 - 2\frac{x}{l}\right|} \\ &= \sqrt{-\frac{l_p}{k} \frac{2\sqrt{r^2 - a^2}}{l}} \end{aligned} \quad (\text{C.14})$$

where $l_p = nNl$ is the total length of the periodic orbit and

$$a = R \cos \frac{\pi M}{N} \quad (\text{C.15})$$

is the radius of the circular caustic of the family of trajectories (see Fig.C.3). Moreover, along the trajectory, the parallel component $q_{//}(t)$ of q is equal to the length performed at time t , and therefore $\dot{q}_{//}$ is equal to the speed, that is, in our units, $\dot{q}_{//} = 2k$. The Maslov index has to take into account the nN dephasings of π due to reflections; and since each time there is a reflection there are conjugated points (see Fig.C.2), for each reflection there is an additional phase loss of $\pi/2$: the total index must therefore be equal to $3Nn$. Given a type (N, M, n) of periodic orbits, there is an infinity of such orbits in the circular billiard, obtained from one of them by rotating it by an angle $\theta \in [0, 2\pi/N[$. It can be pointed out that at any point q such that $a < |q| < R$, there are 4 primitive periodic orbits starting from that point. So the Green function for closed classical trajectories is given by

$$G(q, q, E) = 4 \sum_{N, M, n} \frac{l}{2\sqrt{r^2 - a^2}} \frac{e^{ikl_p - 3iNn\pi/2 - i\pi/4}}{\sqrt{8\pi k l_p}}. \quad (\text{C.16})$$

C.2.3 The density of states

To compute the density of states, according to Equation (C.4) we have to integrate $G(q, q, E)$ over all possible starting points of periodic orbits. For a given type p of periodic orbits, the starting points cover the whole ring between a and R : therefore we have to integrate

$$\begin{aligned} \int dq \frac{l}{2\sqrt{r^2 - a^2}} &= \frac{l}{2} \int_a^R \int_0^{2\pi} dr d\eta \frac{r}{\sqrt{r^2 - a^2}} \\ &= \pi l \sqrt{R^2 - a^2} \\ &= 2\mathcal{A}_p \end{aligned} \quad (\text{C.17})$$

where

$$\mathcal{A}_p = \pi R^2 \sin^2 \frac{\pi M}{N} \quad (\text{C.18})$$

is the area of the ring between a and R . Using Equation (C.4) we get the density of states

$$d^{\text{osc}}(E) = 8 \sum_{N, M} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathcal{A}_p}{2\pi} \frac{e^{ikl_p - 3iNn\pi/2 + i\pi/4}}{\sqrt{8\pi k l_p}} + \text{c.c.} \quad (\text{C.19})$$

with $N > 0$, $0 < M < N/2$, $\text{gcd}(M, N) = 1$.

C.3 Another way to compute the density of states

As an illustration of the techniques employed to compute trace formulas, let us compute the density of states directly by solving the Schrödinger equation $(\Delta + E)\psi = 0$ in the circular billiard and using the definition (C.4) of the density of states.

The eigenfunctions of a circular billiard of radius R are solutions of

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + E \right) \psi = 0, \quad \psi(R, \theta) = 0. \quad (\text{C.20})$$

The system is invariant under rotation, therefore $[H, L] = 0$: we will choose an eigenbasis of $\{H, \vec{L}^2, L_z\}$. In polar coordinates $L_z = -i\partial/\partial\theta$, so the eigenfunctions have the form $\psi(r, \theta) = f(r)e^{im\theta}$, where $m \in \mathbb{Z}$ so that the functions are univalued. The radial part f is solution of

$$f'' + \frac{1}{r} f' + \left(k^2 - \frac{m^2}{r^2} \right) f = 0 \quad (\text{C.21})$$

and the eigenfunctions are finally

$$\psi_m(r, \theta) = J_m(kr) e^{im\theta}, \quad m \in \mathbb{Z} \quad (\text{C.22})$$

where J_m is the Bessel function of order m [121]. The eigenvalues are given by the quantization condition $J_m(kR) = 0$. In the semi-classical approximation, we use the WKB approximation to the problem, which finally gives for the radial part $f(r) = J_m(kr)$

$$f(r) \simeq \frac{1}{(k^2 r^2 - m^2)^{1/4}} \cos \left[\sqrt{k^2 r^2 - m^2} - m \arccos \frac{m}{kr} - \frac{\pi}{4} \right] \quad (\text{C.23})$$

and in this approximation the eigenvalues are given implicitly by the quantization condition $f(R) = 0$, that is ($k^2 = E$)

$$\sqrt{k^2 r^2 - m^2} - m \arccos \frac{m}{kr} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + n\pi, \quad m, n \in \mathbb{Z}. \quad (\text{C.24})$$

Notice that (m, n) and $(-m, n - m)$ give the same equation. Since we also must have $m < kR$, we restrict the couples (m, n) to $0 < m < kR$ and $n \in \mathbb{Z}$. The density of states (C.4) can be rewritten using the relation

$$\delta(f(x))|f'(x)| = \sum_i \delta(x - x_i) \quad (\text{C.25})$$

where the sum on the right-hand side of Equation (C.25) goes over all zeros of f : it yields

$$d(E) = \sum_{m,n} \delta \left(\sqrt{k^2 r^2 - m^2} - m \arccos \frac{m}{kr} - \frac{3\pi}{4} - n\pi \right) \frac{\sqrt{k^2 r^2 - m^2}}{2k^2}. \quad (\text{C.26})$$

We now use the Poisson summation formula, which gives

$$\begin{aligned} d(E) &= \sum_{M,N} \int dmdn e^{2i\pi(Mm+Nn)} \frac{\sqrt{k^2 r^2 - m^2}}{2k^2} \\ &\times \delta \left(\sqrt{k^2 r^2 - m^2} - m \arccos \frac{m}{kr} - \frac{3\pi}{4} - n\pi \right); \end{aligned} \quad (\text{C.27})$$

setting $m = kR \cos \varphi$ we get

$$\begin{aligned} d(E) &= \frac{R^2}{2\pi} \sum_{M,N} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_{-\infty}^{\infty} dn \sin^2 \varphi e^{2i\pi(MkR \cos \varphi + Nn)} \\ &\times \delta \left(\frac{kR}{\pi} (\sin \varphi - \varphi \cos \varphi) - \frac{3}{4} - n \right) \\ &= \frac{R^2}{2\pi} \sum_{M,N} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \sin^2 \varphi e^{2i\pi kR [M \cos \varphi + \frac{N}{\pi} (\sin \varphi - \varphi \cos \varphi)] - \frac{3iN\pi}{2}}. \end{aligned} \quad (\text{C.28})$$

The term corresponding to $M = N = 0$ yields

$$\frac{R^2}{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \sin^2 \varphi = \frac{\pi R^2}{4\pi} \quad (\text{C.29})$$

which exactly corresponds to the Weyl term $\bar{d} = \mathcal{A}/4\pi$ (2.22). We now expand (C.28) in the saddle-point approximation for large k . The saddle-points are given by $\varphi = \pi M/N$ and since $0 < \varphi < \pi/2$ we have to sum over $N > 0$ and $0 < M < N/2$. After integration over the saddle-point manifold we get

$$d^{\text{osc}}(E) = 8 \sum_{\substack{N>0 \\ 0<M<N/2}} \frac{\mathcal{A}_p e^{ikl_p - 3iN\pi/2 + i\pi/4}}{2\pi \sqrt{8\pi k l_p}} + \text{c.c.} \quad (\text{C.30})$$

where $\mathcal{A}_p$ is given by (C.18) and l_p is given by (C.7). This equation is exactly the same as Equation (C.19).

C.4 The form factor in the free case

The 2-point correlation function is related with the level density by the usual formula

$$R_2(\epsilon) = \left\langle d(E + \frac{\epsilon}{2}) d(E - \frac{\epsilon}{2}) \right\rangle, \quad (\text{C.31})$$

where the brackets denote an energy averaging around E on an energy window much larger than the mean level spacing $1/\bar{d}$, and much smaller than energy E .

The two-point correlation form factor is defined as the Fourier transform of the connected part of $R_2(\epsilon)$:

$$K_2(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\epsilon}{\bar{d}} \left[\left\langle d(E + \frac{\epsilon}{2}) d(E - \frac{\epsilon}{2}) \right\rangle - \bar{d}^2 \right] e^{2i\pi\bar{d}\epsilon\tau}, \quad (\text{C.32})$$

(the factors are chosen so that τ and K_2 are dimensionless). The product $d(E + \epsilon/2) d(E - \epsilon/2)$ involves contributions

$$\left(\sum_i \mathcal{A}_i e^{ik'l_i} + \text{c.c.} \right) \left(\sum_j \mathcal{A}_j e^{ik''l_j} + \text{c.c.} \right); \quad (\text{C.33})$$

where k' is the square root of $E + \epsilon/2$ and k'' is the square root of $E - \epsilon/2$. If $k = \sqrt{E}$,

$$k'l_i - k''l_j \simeq k(l_i - l_j) + \frac{\epsilon}{4k}(l_i + l_j) \quad (\text{C.34})$$

and the contribution (C.33) to the 2-point correlation function in the diagonal approximation (that is, we only take into account terms such that $l_i = l_j$) is

$$\sum_i |\mathcal{A}_i|^2 e^{i\epsilon l_i/2k} + \text{c.c.}, \quad (\text{C.35})$$

where $\mathcal{A}_i$ is the sum of all amplitudes corresponding to the same length l_i .

From Equation (C.30) we can compute the form factor in the diagonal approximation (see 6.2.1). We get

$$\begin{aligned} K^{\text{diag}}(\tau) &= \sum_{\substack{N>0 \\ 0<M<N/2}} \frac{4R^3 \sin \frac{\pi M}{N}}{N\bar{d}} \delta \left(2NR \sin \frac{\pi M}{N} - 4\pi k\bar{d}\tau \right) \\ &= \frac{2R^2}{\pi\bar{d}} \int_0^\infty dN \int_0^{\pi/2} d\varphi \sin^2 \varphi \delta \left(N - \frac{4\pi k\bar{d}\tau}{2R \sin \varphi} \right) \end{aligned} \quad (\text{C.36})$$

setting $\varphi = \pi M/N$. The mean level spacing $1/\bar{d}$ is given by (C.29): finally we have

$$K^{\text{diag}}(\tau) = 2 \quad (\text{C.37})$$

which corresponds to what it expected for an integrable system whose levels are twice degenerate.

C.5 The Green function in the Aharonov-Bohm case

We now suppose that there is an Aharonov-Bohm flux line in the billiard. We identify our $2d$ -space with the complex plane, the boundary of the billiard is the set $\{z \in \mathbb{C}; |z| = R\}$. We suppose that the flux line is located at a distance d of the center, on the x -axis, and we note

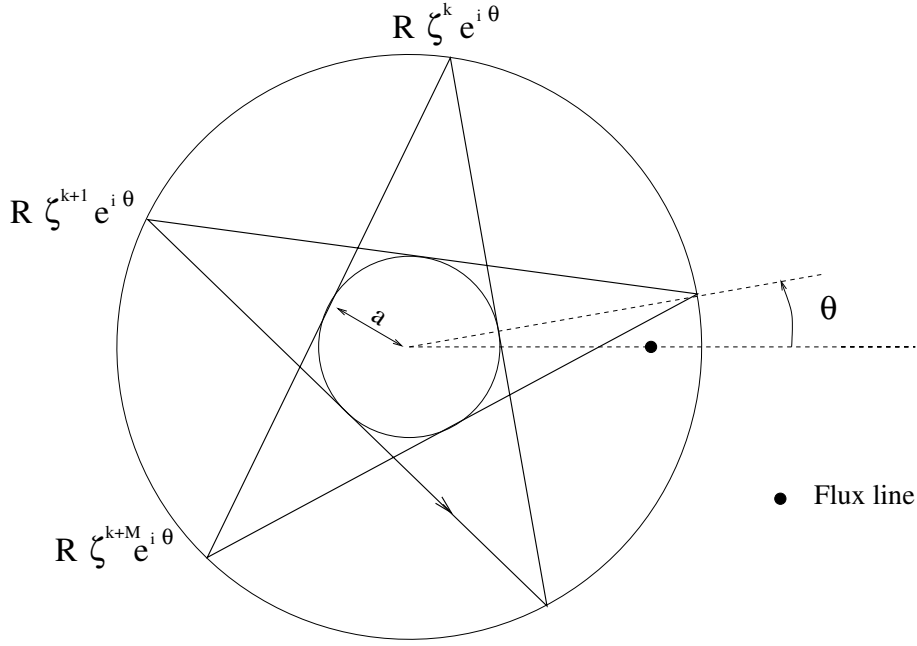


FIG. C.3 – A periodic orbit ($N = 5, M = 2$) turned by an angle θ .

$\chi = d/R$.

A given trajectory of type (N, M, n, ϵ) starting at the point $z = R$ hits the boundary at the points $R\zeta^k$, $0 \leq k \leq N - 1$, where $\zeta = \exp(2\pi/N)$. The other periodic orbits of same type are obtained by rotating the previous one by an angle $\theta \in [0, 2\pi/N[$ (see Fig.C.3). It is well-known that the presence of a flux line does not change the trajectories but affects the phase by an additional phase $\Delta\phi$: when the trajectory turns w times around the flux line

$$\Delta\phi = 2w\pi\alpha\epsilon. \quad (\text{C.38})$$

The additional phase depends on the winding number w of the trajectory around the flux line. This winding number depends on the type of trajectory, but also of the angle θ which characterizes the position of the orbit in the billiard: for example in Fig.C.3 the periodic orbit avoids the flux line and there is no additional phase, whereas if θ were equal to 0 the periodic orbit would surround the flux line, and in this case the winding number would be equal to 1. Let us consider the vector linking the center of the billiard to one point on the periodic orbit. When we follow it when its extremity goes along the periodic orbit, we see that the winding number of the orbit is the number of times this vector “wipes” the flux line. And each time this occurs, the extremity of the vector is a point of the trajectory such that the segment linking this point to the center contains the flux line. Therefore the winding number is the number of points of the trajectory which are on the radius containing the flux line but which do not belong to the segment linking the flux line to the center (see Fig.C.4), and multiplied of course by the number of traversals n . Let us consider a primitive periodic orbit (that is, $n = 1$). If the flux line is at the position $d \in [0, R]$, the winding number of an orbit (N, M) turned by an angle θ is therefore the number of points of the trajectory that intersect the real axis at a position r such that $d < r < R$. Let

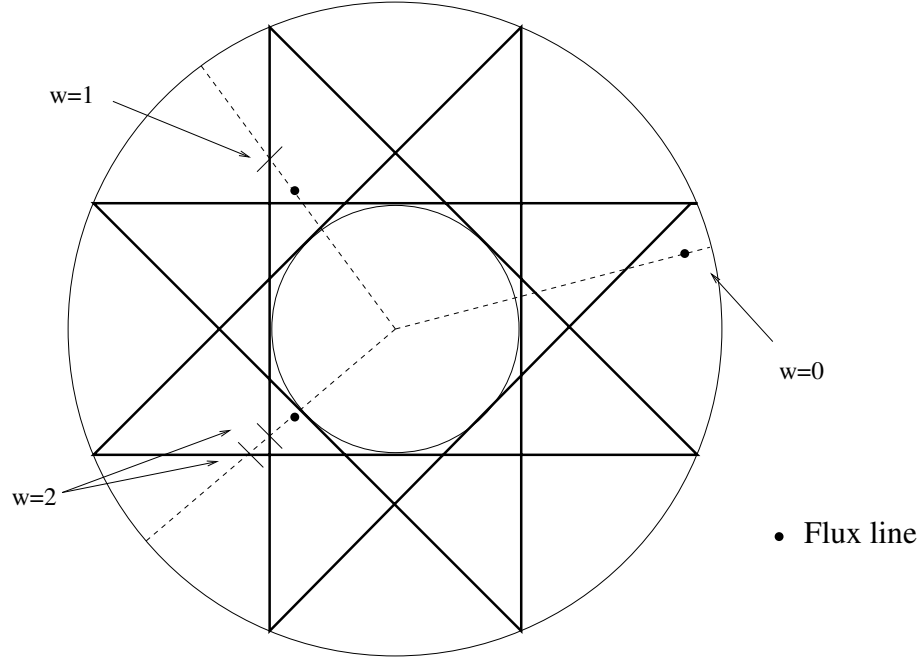


FIG. C.4 – The computation of the winding number w for an orbit ($N = 8, M = 3$) for different positions of the flux line: it is given by the number of points on the radius containing the flux line, but outside the segment from the flux line to the center.

us denote $D_{k,\theta}$ the straight line linking the points $R\zeta^k e^{i\theta}$ and $R\zeta^{k+M} e^{i\theta}$: we have

$$D_{k,\theta} = \left\{ z \in \mathbb{C}; z = R\zeta^k e^{i\theta} [1 + \lambda(1 - \zeta^M)] , \lambda \in \mathbb{R} \right\}. \quad (\text{C.39})$$

The line $D_{k,\theta}$ ($0 \leq k \leq N-1$, $\theta \in [0, 2\pi/N[$) intersects the real axis at a point x such that $d < x < R$ if there exists $\lambda \in \mathbb{R}$ such that

$$\begin{cases} \operatorname{Im} (R\zeta^k e^{i\theta} [1 + \lambda(1 - \zeta^M)]) = 0 \\ d < \operatorname{Re} (R\zeta^k e^{i\theta} [1 + \lambda(1 - \zeta^M)]) < R \end{cases} \quad (\text{C.40})$$

The first condition of (C.40) gives

$$2\lambda \sin \frac{\pi M}{N} = \frac{\operatorname{Im} (\zeta^k e^{i\theta})}{\operatorname{Im} (i\zeta^{k+\frac{M}{2}} e^{i\theta})} \quad (\text{C.41})$$

and the second one becomes, using (C.41),

$$\chi < \frac{\operatorname{Re} (\zeta^k e^{i\theta}) \operatorname{Im} (i\zeta^{k+\frac{M}{2}} e^{i\theta}) - \operatorname{Im} (\zeta^k e^{i\theta}) \operatorname{Re} (i\zeta^{k+\frac{M}{2}} e^{i\theta})}{\operatorname{Im} (i\zeta^{k+\frac{M}{2}} e^{i\theta})} < 1, \quad (\text{C.42})$$

which can be rewritten, since $\operatorname{Re} z \operatorname{Im} z' - \operatorname{Re} z' \operatorname{Im} z = -\operatorname{Im} (zz')$,

$$\chi < \frac{\operatorname{Im} (i\zeta^{-\frac{M}{2}})}{\operatorname{Im} (i\zeta^{k+\frac{M}{2}} e^{i\theta})} < 1. \quad (\text{C.43})$$

For a given $\theta \in [0, 2\pi/N[$, the winding number is the number of solutions k , $0 \leq k \leq N-1$ (mod N), of

$$\chi < \frac{\cos \left(\frac{\pi M}{N} \right)}{\cos \left(\theta + \frac{2k\pi}{N} + \frac{\pi M}{N} \right)} < 1. \quad (\text{C.44})$$

If $a > d$ (a is given by (C.15)) the left-hand side inequation of condition (C.44) is always fulfilled; the right-hand side condition becomes

$$\theta + \frac{2k\pi}{N} + \frac{\pi M}{N} \in \left] -\frac{\pi M}{N}, \frac{\pi M}{N} \right[\quad (\text{C.45})$$

which admits M solutions for θ fixed. In this case the winding number is therefore M .

If $a < d$ the winding number is the number of integer solutions $k \pmod{N}$ of

$$\arccos\left(\frac{1}{\chi} \cos \frac{\pi M}{N}\right) < \left| \theta + \frac{2k\pi}{N} + \frac{\pi M}{N} \right| < \frac{\pi M}{N}. \quad (\text{C.46})$$

Now we consider a given point $q = re^{i\eta}$, $a < r < R$; q is the starting point of a periodic orbit (N, M) rotated by a certain angle θ if q belongs to one of the straight lines $D_{k', \theta}$ (which equation is given by (C.39)), that is, if there exists $k' \in \{0, \dots, N-1\}$ and $\theta \in [0, 2\pi/N[$ such that

$$\theta + \frac{2k'\pi}{N} = \eta - \frac{\pi M}{N} \pm \Theta \quad (\text{C.47})$$

where we have set

$$\Theta = \arccos \frac{a}{r} = \arccos \left(\frac{R}{r} \cos \frac{\pi M}{N} \right). \quad (\text{C.48})$$

When r goes from a to R , Θ belongs to $[0, \pi M/N]$. Each point $q = re^{i\eta}$, $a < r < R$, is therefore the starting point of 4 orbits of the type (N, M) : the 2 solutions of the condition (C.47) and their 2 time-reverse. The winding number of these 4 orbits is the same: it is, using (C.46) and (C.47), the number of integers $k \pmod{N}$ solution of

$$\frac{\beta N}{\pi} < \left| 2k - 2k' + \eta \frac{N}{\pi} \pm \Theta \frac{N}{\pi} \right| < M \quad (\text{C.49})$$

where

$$\beta = \arccos \left(\frac{1}{\chi} \cos \frac{\pi M}{N} \right). \quad (\text{C.50})$$

To express the solutions, let us define for any $x \in \mathbb{R}$ the quantity $[x]$ as the largest integer less than or equal to x , so that

$$[x] \leq x < [x] + 1, \quad (\text{C.51})$$

and the quantity $\{x\} = x - [x] \in [0, 1[$ (the fractional part of x). For fixed r (or Θ), η varies in $[0, 2\pi[$. But since each periodic orbit is invariant under a rotation of angle $2\pi/N$, we can restrict our study to any interval of length $2\pi/N$. The number of solutions of Equation (C.49) is the number of solutions $k \pmod{N}$ of the inequation

$$\frac{\beta N}{\pi} < |2k + A + x| < M \quad (\text{C.52})$$

where A is a fixed real number, and $x = \eta N/\pi$ is assumed to vary in any interval of length 2. Suppose that x varies between $-A$ and $-A + 2$. Then $A + x$ varies in $[0, 2[$. For fixed x , the number of k verifying (C.52) is just the number of reals of the form $2k + A + x$ in $[-M, M]$ minus the number of such reals in $[-\beta N/\pi, \beta N/\pi]$, with k integer (we can get rid of the condition

$k \in \{0, \dots, N-1\}$ since $M < N/2$). It can be checked that

$$\text{For } \begin{cases} 0 < A + x < \left\{ \frac{\beta N}{\pi} \right\} \\ \text{or} \\ 2 - \left\{ \frac{\beta N}{\pi} \right\} < A + x < 2 \end{cases} \quad \text{there are } M - \left[\frac{\beta N}{\pi} \right] - 1 \quad \text{solutions.} \quad (\text{C.53})$$

$$\text{For } \left\{ \frac{\beta N}{\pi} \right\} < A + x < 2 - \left\{ \frac{\beta N}{\pi} \right\} \quad \text{there are } M - \left[\frac{\beta N}{\pi} \right] \quad \text{solutions.}$$

Equation (C.16) therefore becomes, for $q = re^{i\eta}$,

$$G(q, q, E) = 2 \sum_{N, M, n, \epsilon} \frac{l}{2\sqrt{r^2 - a^2}} \frac{e^{ikl_p - 3iNn\pi/2 - i\pi/4 + 2i\pi\alpha\phi_{N, M, n, \epsilon}}}{\sqrt{8\pi k l_p}}. \quad (\text{C.54})$$

where the additional phase $\phi_{N, M, n, \epsilon}$ corresponds to the number of solutions of (C.49): if $a < d$ then

$$\phi_{N, M, n, \epsilon} = 2\epsilon n \left(M - \left[\frac{\beta N}{\pi} \right] + \delta \right) \quad (\text{C.55})$$

where δ equals 0 or 1 according to the value of η ; if $a > d$ then

$$\phi_{N, M, n, \epsilon} = 2\epsilon n M. \quad (\text{C.56})$$

The factor 2 in (C.54) corresponds to the sign before Θ in (C.47): both signs give the same contribution. When computing the trace of the Green function we have to integrate over all possible starting points for the orbit (N, M, n, ϵ) . In $G(q, q, E)$ we have to integrate for each (N, M, n, ϵ) the quantity

$$\frac{l}{2} \int_a^R \int_0^{2\pi} r dr d\eta \frac{r}{\sqrt{r^2 - a^2}} e^{2i\alpha\phi_{N, M, n, \epsilon}}; \quad (\text{C.57})$$

according to (C.53) the integral over the phases is

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\eta e^{2i\alpha\phi_{N, M, n, \epsilon}} &= \frac{N}{2\pi} \int_0^{2\pi/N} d\eta e^{2i\alpha\phi_{N, M, n, \epsilon}} \\ &= \frac{1}{2} \int_0^2 dx e^{2i\alpha\phi_{N, M, n, \epsilon}} \end{aligned} \quad (\text{C.58})$$

and yields

$$\begin{cases} \left\{ \frac{\beta N}{\pi} \right\} e^{2i\pi\alpha\epsilon n (M - [\frac{\beta N}{\pi}] - 1)} + \left(1 - \left\{ \frac{\beta N}{\pi} \right\} \right) e^{2i\pi\alpha\epsilon n (M - [\frac{\beta N}{\pi}])} & \text{if } a < d \\ e^{2i\pi\alpha\epsilon n M} & \text{if } a > d \end{cases} \quad (\text{C.59})$$

The case where $a > d$ corresponds to setting $\beta = 0$ in the case $a < d$. Let us therefore define β by (C.50) if $a < d$ and by $\beta = 0$ if $a > d$. The integral (C.58) over the phase does not depend on r any more: we can integrate over r like in Equation (C.17), and we get

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int dq G(q, q, E) &= \\ 2 \sum_{N, M, n, \epsilon} \frac{\mathcal{A}_p}{\pi} &\left[\left\{ \frac{\beta N}{\pi} \right\} e^{2i\pi\alpha\epsilon n (M - [\frac{\beta N}{\pi}] - 1)} + \left(1 - \left\{ \frac{\beta N}{\pi} \right\} \right) e^{2i\pi\alpha\epsilon n (M - [\frac{\beta N}{\pi}])} \right] \\ &\times \frac{e^{ikl_p - 3iNn\pi/2 - i\pi/4}}{\sqrt{8\pi k l_p}}. \end{aligned} \quad (\text{C.60})$$

Moreover there are two possible values ± 1 for ϵ . Using Equation (C.4) and summing over ϵ we finally get the density of states

$$d(E) = 4 \sum_{N,M} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathcal{A}_p}{2\pi} \left[\left\{ \frac{\beta N}{\pi} \right\} e^{2i\pi\alpha n(M - [\frac{\beta N}{\pi}] - 1)} \right. \\ \left. + \left(1 - \left\{ \frac{\beta N}{\pi} \right\} \right) e^{2i\pi\alpha n(M - [\frac{\beta N}{\pi}])} + \text{c.c.} \right] \frac{e^{ikl_p - 3iNn\pi/2 + i\pi/4}}{\sqrt{8\pi k l_p}} + \text{c.c.} \quad (\text{C.61})$$

where the sum goes over $N > 1$, $0 < M < N/2$ and $\text{gcd}(M, N) = 1$. The prefactor can be computed: finally the density of states can be written

$$d(E) = 8 \sum_{N,M} \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{Q}_{NMn} \frac{\mathcal{A}_p}{2\pi} \frac{e^{ikl_p - 3iNn\pi/2 + i\pi/4}}{\sqrt{8\pi k l_p}} + \text{c.c.} \quad (\text{C.62})$$

with a prefactor

$$\mathcal{Q}_{NMn} = \cos \left[2\pi n\alpha \left(M - \left[\frac{\beta N}{\pi} \right] \right) \right] \\ + 2 \left\{ \frac{\beta N}{\pi} \right\} \sin(\pi n\alpha) \sin \left[2\pi n\alpha \left(M - \left[\frac{\beta N}{\pi} \right] - \frac{1}{2} \right) \right]. \quad (\text{C.63})$$

C.6 The 2-point correlation form factor

Formula (C.32), together with Equations (C.62) and (C.63), gives in the diagonal approximation

$$K(0) = \frac{64}{\bar{d}} \sum_{N,M} \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{Q}_{NMn}^2 \frac{\mathcal{A}_p^2}{4\pi^2} \frac{1}{8\pi k l_p} 4\pi k \delta(l_p - 4\pi k \bar{d}\tau) \quad (\text{C.64})$$

where $\mathcal{A}_p$ is given by (C.18); $\bar{d}$ corresponds to $M = N = 0$ in the density of states:

$$\bar{d} = \frac{\pi R^2}{4\pi}; \quad (\text{C.65})$$

l_p is given by (C.7). We now change the sum over N and M to an integral: N is integrated from 0 to ∞ ; we have to integrate M from 0 to $N/2$ and pick up only M relatively prime to N . The number of integers lower than M and relatively prime to N is

$$M \prod_{\substack{p|N \\ p \text{ prime}}} \left(1 - \frac{1}{p} \right) = M \frac{\phi(N)}{N}, \quad (\text{C.66})$$

where $\phi(N)$ is the Euler function, giving the number of integers lower than N and relatively prime to N . Therefore the density of M relatively prime to N is $\phi(N)/N$. We here assume that $\phi(N)/N$ can be averaged to its mean value $6/\pi^2$. Setting $\varphi = \pi M/N$, we get

$$K(0) = \frac{12R^2}{\pi^3 \bar{d}} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} dN \int_0^{\pi/2} d\varphi \sin^2 \varphi \frac{\mathcal{Q}_{N\varphi n}^2}{n^2} \delta \left(N - \frac{4\pi k \bar{d}\tau}{2nR \sin \varphi} \right) \quad (\text{C.67})$$

where the prefactor is

$$\mathcal{Q}_{N\varphi n} = \cos \left[2\pi n\alpha \left(\frac{N\varphi}{\pi} - \left[\frac{\beta N}{\pi} \right] \right) \right] \\ + 2 \left\{ \frac{\beta N}{\pi} \right\} \sin(\pi n\alpha) \sin \left[2\pi n\alpha \left(\frac{N\varphi}{\pi} - \left[\frac{\beta N}{\pi} \right] - \frac{1}{2} \right) \right]. \quad (\text{C.68})$$

We are looking at the asymptotic behaviour for large k : because of the δ -function in (C.67) we have to look at the prefactor $\mathcal{Q}_{N\varphi n}^2$ for large N . From Equation (C.50) we get

$$\beta = \begin{cases} \arccos\left(\frac{1}{\chi}\cos\varphi\right) & \text{if } \arccos\chi < \varphi < \pi/2 \\ 0 & \text{if } 0 < \varphi < \arccos\chi \end{cases} \quad (\text{C.69})$$

since we have set $\beta = 0$ for $a > d$. If $0 < \varphi < \arccos\chi$ then

$$\mathcal{Q}_{N\varphi n}^2 = \cos^2[2n\alpha N\varphi] \simeq \frac{1}{2} \quad (\text{C.70})$$

since for large N the cos is averaged. If $\arccos\chi < \varphi < \pi/2$, $\mathcal{Q}_{N\varphi n}^2$ is a sum of 3 terms: if we set

$$\begin{aligned} g(N) &= 2n\alpha N\varphi - 2\pi n\alpha \left\lfloor \frac{\beta N}{\pi} \right\rfloor \\ &= 2n\alpha(\varphi - \beta)N + 2n\alpha\pi \left\{ \frac{\beta N}{\pi} \right\} \end{aligned} \quad (\text{C.71})$$

which goes to infinity for large N since $\varphi \neq \beta$, the first term is

$$\cos^2[g(N)] \simeq \frac{1}{2}. \quad (\text{C.72})$$

The second term is the cross-term of $\mathcal{Q}_{N\varphi n}^2$:

$$\begin{aligned} &4 \left\{ \frac{\beta N}{\pi} \right\} \sin(\pi n\alpha) \cos[g(N)] \sin[g(N) - \pi n\alpha] \\ &= 4 \left\{ \frac{\beta N}{\pi} \right\} \sin(\pi n\alpha) [\cos g(N) \sin g(N) \cos(\pi n\alpha) - \cos^2 g(N) \sin(\pi n\alpha)] \\ &\simeq -2 \left\{ \frac{\beta N}{\pi} \right\} \sin^2(\pi n\alpha) \end{aligned} \quad (\text{C.73})$$

because cos and sin average to 0 for large N . The last term is

$$4 \left\{ \frac{\beta N}{\pi} \right\}^2 \sin^2(\pi n\alpha) \sin^2[g(N) - \pi n\alpha] \simeq 2 \left\{ \frac{\beta N}{\pi} \right\}^2 \sin^2(\pi n\alpha). \quad (\text{C.74})$$

The form factor becomes, after integrating over N in (C.67) and making previous approximation,

$$\begin{aligned} K(0) &= \frac{12R^2}{\pi^3 \bar{d}} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\arccos\chi} d\varphi \frac{\sin^2 \varphi}{2n^2} \\ &+ \frac{12R^2}{\pi^3 \bar{d}} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\arccos\chi}^{\pi/2} d\varphi \frac{\sin^2 \varphi}{n^2} \left[\frac{1}{2} + 2 \left(\left\{ \frac{\beta N}{\pi} \right\}^2 - \left\{ \frac{\beta N}{\pi} \right\} \right) \right] \sin^2(\pi n\alpha) \\ &= 1 + \frac{24R^2}{\pi^3 \bar{d}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2(\pi n\alpha)}{n^2} \int_{\arccos\chi}^{\pi/2} d\varphi \sin^2 \varphi \left[\left\{ \frac{\beta N}{\pi} \right\}^2 - \left\{ \frac{\beta N}{\pi} \right\} \right]. \end{aligned} \quad (\text{C.75})$$

In (C.75), β is given by (C.69). When N goes to infinity, $\{\beta N/\pi\}$ covers the whole interval $[0,1]$: it can be approximated by a random variable uniformly distributed over $[0,1]$, and in (C.75) we have a term

$$\left\{ \frac{\beta N}{\pi} \right\}^2 - \left\{ \frac{\beta N}{\pi} \right\} \simeq \int_0^1 (x^2 - x) dx = -\frac{1}{6}. \quad (\text{C.76})$$

The integration over φ can now be performed:

$$\int_{\arccos \chi}^{\pi/2} d\varphi \sin^2 \varphi = \frac{1}{2} \left(\arcsin \chi + \chi \sqrt{1 - \chi^2} \right) \quad (\text{C.77})$$

and the sum over n can be computed using the standard formula

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2\pi n x}{(2\pi n)^2} = x^2 - x + \frac{1}{6} \quad \text{for } 0 \leq x \leq 1. \quad (\text{C.78})$$

It gives

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 \pi n \alpha}{n^2} = \frac{\pi^2}{2} \bar{\alpha} (1 - \bar{\alpha}) \quad (\text{C.79})$$

where $\bar{\alpha}$ is the fractional part $\{\alpha\}$ of the flux if $0 \leq \{\alpha\} \leq 1/2$ and $\bar{\alpha} = 1 - \{\alpha\}$ if $1/2 \leq \{\alpha\} < 1$. Finally the form factor of the circular billiard is

$$K(0) = 1 - \frac{4\lambda}{\pi} \bar{\alpha} (1 - \bar{\alpha}) \quad (\text{C.80})$$

where

$$\lambda = \arcsin \frac{d}{R} + \frac{d}{R} \sqrt{1 - \frac{d^2}{R^2}} \quad (\text{C.81})$$

is a constant which only depends on the ratio between the distance of the flux line to the center of the billiard and its radius. This expression is quite similar to the expression obtained in the case of a rectangular billiard with a flux line inside at a position where its coordinates are non-commensurable with the sides of the rectangle. Here when d varies from 0 to R , λ takes any value between 0 and $\pi/2$, and therefore $4\lambda/\pi$ varies in $[0, 2]$. For $d = 0$, the flux line is at the center of the billiard, and we have $K(0) = 1$, which corresponds to an integrable system with no degeneracy of the energy levels. For $d > 0$ we have a series of systems which 2-point correlation form factor at the origin is

$$K(0) = 1 - \gamma \bar{\alpha} + \gamma \bar{\alpha}^2 \quad (\text{C.82})$$

with $\gamma \in [0, 2]$.

Annexe D

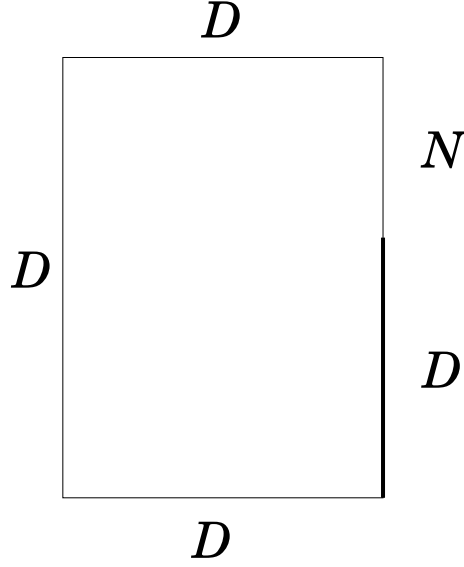
Facteur de forme à l'origine pour un billard avec barrière

On considère un billard rectangulaire de côtés $2a$ et b , contenant une barrière de hauteur αb , $0 < \alpha < 1$, à l'abscisse a . Il y a symétrie axiale par rapport à la droite $x = a$, et on peut donc distinguer les états propres antisymétriques (qui s'annulent sur le segment $x = a, y > \alpha b$) et les états propres symétriques (dont la dérivée s'annule sur ce segment).

La statistique des niveaux d'énergie correspondant aux états antisymétriques est celle des niveaux d'énergie dans un billard rectangulaire de côtés $a \times b$. Si a et b sont "de bons irrationnels" (voir 2.3.1), on sait que la statistique est poissonnienne. On va donc s'intéresser à la statistique des niveaux d'énergie correspondant aux états symétriques, qui sont ceux d'un rectangle de taille $a \times b$ avec conditions aux limites mixtes: Dirichlet sur les trois côtés du rectangle initial, et Neumann sur le segment $(x = a, y > \alpha b)$ (voir Figure D.1). Ces conditions aux limites interviennent par une modification de l'index de Maslov associé aux trajectoires lors de la réflexion sur une paroi: pour des conditions aux limites de Dirichlet, l'index de Maslov augmente de 2 unités à chaque réflexion (c'est-à-dire que la contribution de l'orbite est multipliée par un facteur $e^{i\pi} = -1$), tandis que pour des conditions aux limites de Neumann l'index de Maslov n'est pas modifié. Une trajectoire dans ce demi-billard peut être dépliée dans le plan pour donner une ligne droite. On obtient alors l'image de la Figure D.2, qui correspond exactement à la Figure 11 de [117] (l'article 1 de cette thèse), lorsque l'abscisse x_0 de la ligne de flux tend vers a . Le vertex est maintenant l'extrémité de la barrière. Puisqu'il est rejeté au bord du rectangle, il n'y a plus qu'un vertex par faisceau d'orbites périodiques. Chaque faisceau se divise donc en deux faisceaux: l'un rencontrant la barrière, l'autre ne la rencontrant pas. Le faisceau qui rencontre la barrière ne rencontre que des conditions aux limites de Dirichlet sur son parcours. Puisqu'il y a un nombre pair de réflexions, et qu'à chaque réflexion avec conditions aux limites de Dirichlet correspond un facteur (-1) , la phase totale qu'il acquiert est 1. En revanche le faisceau qui ne rencontre pas la barrière subit un nombre impair de réflexions avec conditions aux limites de Dirichlet; il acquiert donc un déphasage de π . Dans l'étude de [117], les équations (134) à (145) permettaient de calculer la largeur η de la bande centrale de la figure 11 en fonction de l'orbite (M, N) considérée, de longueur

$$l_p = \sqrt{(2Ma)^2 + (2Nb)^2}. \quad (\text{D.1})$$

Pour cela on cherchait les coordonnées des deux images de la ligne de flux dont la distance au bord

FIG. D.1 – Les conditions aux bords pour le demi-billard de barrière: D =Dirichlet, N =Neumann.

supérieur du faisceau d'orbites périodiques était comprise entre 0 et 1 (en unités de la largeur totale $2\mathcal{A}/l_p$ du faisceau). Ici, on prend la limite $x_0 = a$, et on s'attend donc à ce qu'un seul vertex soit solution: les vertex sont situés (Equation (133) de [117]) aux positions $((\zeta_1 + 2k)a, (\zeta_2 + 2k')b)$, avec $\zeta_2 = \epsilon_2$ ou $2 - \epsilon_2$, mais ici $\zeta_1 = 1$ (puisque $\epsilon_1 \rightarrow 1$). En définissant Q_+ et Q_- par l'Equation (137) de [117], on peut voir que Q_+ et Q_- ont maintenant nécessairement la même parité. S'ils sont tous les deux pairs, le vertex est à une distance ϵ_+ du bord supérieur du faisceau d'orbites périodiques; s'ils sont tous les deux impairs, le vertex est à une distance $1 - \epsilon_+$. L'équation (139) de [117] devient

$$\eta = \begin{cases} \epsilon_+ & \text{si } N \text{ et } [M\epsilon_2] \text{ ont même parité} \\ 1 - \epsilon_+ & \text{si } N \text{ et } [M\epsilon_2] \text{ sont de parité opposée} \end{cases} \quad (\text{D.2})$$

Le faisceau de largeur η est affecté d'un signe $(-)$ lorsque l'orbite primitive correspondante est parcourue un nombre impair de fois. Le faisceau d'orbites primitives associé occupe une surface $\mathcal{A}_{p1} = 2\mathcal{A}\eta$ ($2\mathcal{A}$ étant la surface totale de tout faisceau d'orbites périodiques primitives). Son complémentaire occupe bien entendu une surface $\mathcal{A}_{p2} = 2\mathcal{A}(1 - \eta)$. Dans la formule des traces, il convient de regrouper les contributions de toutes les orbites de même longueur. Le préfacteur d'un terme en $e^{ikn l_{pp}}$, où l_{pp} est la longueur d'un orbite périodique primitive et n le nombre de répétitions de cette orbite, sera

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{np} &= \mathcal{A}_{p2} + \mathcal{A}_{p1} e^{in\pi} \\ &= 2\mathcal{A}(1 - \eta) + 2\mathcal{A}\eta e^{in\pi} \\ &= \begin{cases} 2\mathcal{A} & \text{si } n \text{ pair} \\ 2\mathcal{A}(1 - 2\eta) & \text{si } n \text{ impair} \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{D.3})$$

Si N et $[M\epsilon_2]$ ont même parité, $1 - 2\eta = 1 - 2\{M\epsilon_2\}$; sinon, $1 - 2\eta = -1 + 2\{M\epsilon_2\}$. Puisque

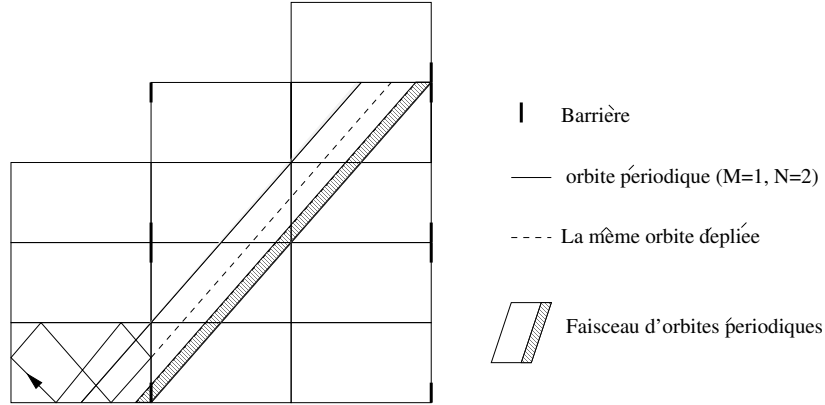


FIG. D.2 – Une trajectoire dépliée dans le demi-billard de barrière

seul le carré de $\mathcal{A}_{np}$ intervient dans le calcul, on peut choisir de prendre $\eta = \{M\epsilon_2\}$. On peut alors écrire la formule des traces comme une somme sur les orbites périodiques

$$d_{p.o.}(E) = \sum_{p^+} \frac{\mathcal{A}_{np}}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi k l_p}} e^{i k l_p - i \frac{\pi}{4}}, \quad (\text{D.4})$$

avec l_p donné par (D.1), $M, N > 0$, relation qui est identique à (149) de [117]. D'après l'Equation (151) de [117], le facteur de forme en 0 est donné par

$$K_2(0) = \sum_{pp^+} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathcal{A}_{np}^2}{n^2} \frac{1}{2\pi^2 l_{pp} \bar{d}} \delta \left(l_{pp} - \frac{4\pi k \bar{d} \tau}{n} \right). \quad (\text{D.5})$$

La densité des orbites périodiques (D.1), pour $M, N > 0$ et M premier avec N est $\rho_{pp}(l) = 3l/(4\pi\mathcal{A})$ (équation (158) de [117]). L'intégration par rapport à l_{pp} donne, en remplaçant $\eta = \{M\epsilon_2\}$ par sa valeur moyenne,

$$\begin{aligned} K_2(\tau) &= \frac{6}{\pi^2} \left\langle \sum_{n \text{ pair}} \frac{1}{n^2} + \sum_{n \text{ pair}} \frac{(1-2\eta)^2}{n^2} \right\rangle \\ &= 1 - 3 \langle \eta \rangle + 3 \langle \eta^2 \rangle. \end{aligned} \quad (\text{D.6})$$

Si ϵ_2 est irrationnel, η est uniformément distribué dans l'intervalle $[0,1]$; la moyenne d'une fonction $f(\eta)$ est donc définie comme

$$\langle f(\eta) \rangle = \int_0^1 f(t) dt. \quad (\text{D.7})$$

L'expression du facteur de forme s'en déduit immédiatement: $\langle \eta \rangle = 1/2$ et $\langle \eta^2 \rangle = 1/3$, d'où

$$K_2(0) = \frac{1}{2}. \quad (\text{D.8})$$

Si $\epsilon_2 = p/q$ est rationnel, $\eta = \{Mp/q\}$ prend q valeurs distinctes. Comme la valeur de η dépend de M , il faut distinguer les q différents types d'orbites, chacune ayant un "poids relatif" $\alpha(r)$ (c'est-à-dire que la densité d'orbites primitives telles que M vaut r modulo q est $\rho_{pp,r}(l) = \alpha(r)\rho_{pp}(l)$). Le calcul de l'Appendice A de [117] peut être mené de la même façon et on obtient

$$\alpha(r) = \frac{\prod_{p|(q,r)} \left(1 - \frac{1}{p}\right)}{q \prod_{p|q} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right)}, \quad (\text{D.9})$$

les produits portant sur p premier. On définira donc

$$\begin{aligned} \langle f(\eta) \rangle &= \sum_{r=0}^{q-1} \alpha(r) f\left(\left\{\frac{rp}{q}\right\}\right) \\ &= \sum_{r=0}^{q-1} \alpha(r) f\left(\frac{r}{q}\right) \end{aligned} \quad (\text{D.10})$$

en utilisant le fait que pour k premier avec q , $\alpha(kr) = \alpha(r)$. Grâce à l'identité

$$\prod_{\substack{p|k \\ p \text{ prime}}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right) = \sum_{\delta|k} \frac{\mu(\delta)}{\delta^s}, \quad (\text{D.11})$$

on peut calculer $\langle \eta \rangle$ et $\langle \eta^2 \rangle$:

$$\begin{aligned} \langle \eta \rangle &= \frac{1}{q^2 \prod_{p|q} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right)} \sum_{r=0}^{q-1} \sum_{\delta|(q,r)} \frac{r\mu(\delta)}{\delta} \\ &= \frac{1}{q^2 \prod_{p|q} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right)} \frac{q}{2} \sum_{\delta|q} \frac{\mu(\delta)}{\delta^2} (q - \delta) \end{aligned} \quad (\text{D.12})$$

et

$$\begin{aligned} \langle \eta^2 \rangle &= \frac{1}{q^3 \prod_{p|q} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right)} \sum_{r=0}^{q-1} \sum_{\delta|(q,r)} \frac{r^2 \mu(\delta)}{\delta} \\ &= \frac{1}{q^3 \prod_{p|q} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right)} \frac{q}{6} \sum_{\delta|q} \frac{\mu(\delta)}{\delta^2} (q - \delta)(2q - \delta), \end{aligned} \quad (\text{D.13})$$

et en reportant ces expressions dans (D.6), les sommes se simplifient et donnent

$$K_2(0) = \frac{1}{2}. \quad (\text{D.14})$$

Annexe E

Transmission par une jonction

Diverses expériences [122, 123, 124] ont été réalisées sur le transport d'électrons à travers des microjonctions semi-conductrices. Dans ces expériences, les conditions sont telles que les électrons se comportent comme un gaz de Fermi bidimensionnel idéal de particules sans interaction. On considère donc un électron qui accède à la jonction par un canal d'entrée et s'en échappe par un canal de sortie après avoir subi une diffusion élastique à l'intérieur de la jonction (voir Figure E.1). La mesure de la conductance de l'électron ainsi diffusé fait apparaître des oscillations dont la statistique a été étudiée semi-classiquement [125] et numériquement (voir [126] et les références). Le modèle semi-classique est le suivant: l'électron est représenté par une certaine fonction d'onde Φ_{in} dans le canal d'entrée. A son arrivée dans la jonction se produit une diffraction sur l'ouverture; semi-classiquement, l'électron suit alors les trajectoires classiques à l'intérieur de la jonction, dont la superposition, après diffraction sur l'ouverture de sortie, donne une onde Φ_{out} dans le canal de sortie. Les oscillations de la conductance proviennent donc des interférences entre les orbites périodiques de la jonction. Ce modèle, bien entendu, n'est valable que si la longueur d'onde de de Broglie de l'électron est petite devant la taille de la jonction, et si le diamètre des canaux d'entrée et de sortie est lui aussi très inférieur aux dimensions de la jonction.

E.1 Expression de la conductance

Si l'on considère une jonction possédant plusieurs canaux indicés par i , on notera Φ_a , avec $a = (i, E)$, les fonctions propres solutions de $H\Phi = E\Phi$ dans le canal i . Dans la jonction, il y a des modes discrets Ψ_n d'énergie e_n . La fonction d'onde d'un électron dans le système pourra donc être mise sous la forme

$$\Psi = c_a \Phi_a + b_n \Psi_n \quad (\text{E.1})$$

avec la convention de sommation sur les indices répétés. Les fonctions Φ_a étant quantifiées transversalement, un électron pourra arriver par le lien i dans un état transverse de mode n , et ressortir par le lien j dans un état transverse de mode m . On associe à cette transmission l'amplitude de transmission t_{mn}^{ji} . La formule de Landauer [127, 128] permet d'exprimer la conductance entre les deux canaux d'entrée et de sortie i et j :

$$g_{ji} = \frac{e^2}{h} \sum_{n,m} |t_{mn}^{ji}|^2. \quad (\text{E.2})$$

On va se restreindre ici à un canal d'entrée et un canal de sortie. Sur la base (Φ_a, Ψ_n) des états propres, on va traiter la présence de diffraction au niveau des ouvertures par une approche perturbative, en supposant que l'on peut écrire le Hamiltonien du système comme la somme du Hamiltonien non-perturbé H_0 et d'une perturbation W couplant les fonctions propres des canaux et celles de la jonction:

$$H = \underbrace{\begin{pmatrix} H_0^\Phi & 0 \\ 0 & H_0^\Psi \end{pmatrix}}_{H_0} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & W \\ W & 0 \end{pmatrix}}_V \quad (\text{E.3})$$

Pour déterminer l'amplitude de transition t_{mn} , on cherche à calculer la matrice S , qui caractérise l'amplitude de probabilité de passage de l'état initial Φ_{inc} à un état final quelconque. On utilisera le formalisme matriciel; chaque matrice M , sur la base des (Φ_a, Ψ_n) , sera décomposable en 4 blocs:

$$M = \begin{pmatrix} M^\Phi & M^{\Phi\Psi} \\ M^{\Psi\Phi} & M^\Psi \end{pmatrix}. \quad (\text{E.4})$$

E.2 La matrice S

E.2.1 Expression de la matrice S

Si l'on suppose qu'un électron entre dans la jonction uniquement par le mode n du canal d'entrée (on note alors la fonction d'onde totale de cet électron par $\psi_n(q)$), on veut connaître l'amplitude de probabilité de trouver l'électron dans le mode m du canal de sortie. Celle-ci est donnée par l'élément de matrice S défini par la relation

$$\psi_n(q) = \sum_{m=1}^{\text{mode maximal}} S_{mn} \psi_{\text{sortie},m}(q), \quad (\text{E.5})$$

la fonction $\psi_{\text{sortie},m}$ étant la fonction propre du canal de sortie dans le mode m .

Si un système a pour Hamiltonien $H = H_0 + V$, V étant une perturbation, on définit la matrice de transfert T par

$$T = V + V \frac{1}{E - H + i\epsilon} V; \quad (\text{E.6})$$

elle est telle que la matrice S a pour expression

$$S_{mn} = \langle \psi_{\text{sortie},m} | I - 2i\pi T | \psi_{\text{entrée},n} \rangle. \quad (\text{E.7})$$

Pour obtenir l'expression de la matrice S , il nous faut calculer la résolvante du système, qui peut être mise sous forme matricielle

$$G = \frac{1}{E - H} = \frac{1}{E - H_0 - V} \quad (\text{E.8})$$

et développée par rapport à la perturbation W , en fonction de la résolvante $G_0 = (E - H_0)^{-1}$ du système non-perturbé, sous la forme d'une série $G = G_0 + G_0 V G_0 + \dots$. Avec $G_0^\Phi = (E - H_0^\Phi)^{-1}$ et $G_0^\Psi = (E - H_0^\Psi)^{-1}$, la matrice G peut donc s'écrire, sur la base (Φ_a, Ψ_n) ,

$$\begin{aligned} G &= \begin{pmatrix} G_0^\Phi & 0 \\ 0 & G_0^\Psi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & G_0^\Phi W G_0^\Psi \\ G_0^\Psi W G_0^\Phi & 0 \end{pmatrix} \\ &+ \begin{pmatrix} G_0^\Phi W G_0^\Psi W G_0^\Phi & 0 \\ 0 & G_0^\Psi W G_0^\Phi W G_0^\Psi \end{pmatrix} + \dots \end{aligned} \quad (\text{E.9})$$

On a en particulier $G^\Psi = G_0^\Psi + G_0^\Psi W G_0^\Phi W G_0^\Psi + \dots$. Puisque ici $W^\Phi = 0$ (W^Φ étant la matrice des $\langle \phi_a | W | \phi_b \rangle$), la matrice de transfert peut s'écrire

$$\begin{aligned} T^\Phi &= W G^\Psi W \\ &= W G_0^\Psi W + W G_0^\Psi W G_0^\Phi W G_0^\Psi W + \dots \\ &= W (1 + G_0^\Psi W G_0^\Phi W + (G_0^\Psi W G_0^\Phi W)^2 + \dots) G_0^\Psi W. \end{aligned} \quad (\text{E.10})$$

Si l'on note

$$D^\Psi = E - H_0^\Psi - W G_0^\Phi W, \quad (\text{E.11})$$

alors on a

$$D^\Psi (1 + G_0^\Psi W G_0^\Phi W + (G_0^\Psi W G_0^\Phi W)^2 + \dots) G_0^\Psi = 1, \quad (\text{E.12})$$

et donc la matrice de transfert (E.10) est donnée par

$$T^\Phi = W (D^\Psi)^{-1} W. \quad (\text{E.13})$$

La matrice S s'exprimant en fonction de la matrice de transfert T , on a finalement

$$S = \delta_{mn} - 2i\pi W (D^\Psi)^{-1} W, \quad (\text{E.14})$$

où D^Ψ est donnée par (E.11). L'écriture de la matrice de diffusion sous la forme (E.14) est assez usuelle (voir par exemple [129], ou [130] pour une dérivation plus complète).

E.2.2 Unitarité de la matrice S

Nous allons réexprimer la matrice S (E.14) sous une forme où son unitarité sera manifeste. La matrice D^Ψ est donnée par l'équation (E.11). Si les niveaux E_a correspondant aux fonctions propres Φ_a ne sont pas dégénérés, on a

$$\begin{aligned} (G_0^\Phi)_{aa'} &= \int \bar{\Phi}_a (E - H_0^\Phi + i\epsilon)^{-1} \Phi_{a'} \\ &= \int \frac{\bar{\Phi}_a \Phi_{a'}}{E - E_a + i\epsilon} \\ &= \frac{1}{E - E_a + i\epsilon} \delta_{aa'} \end{aligned} \quad (\text{E.15})$$

par orthonormalité des fonctions propres Φ_a , et donc

$$\begin{aligned} (W G_0^\Phi W)_{mn} &= \int_{a,a'} W_{ma} (G_0^\Phi)_{aa'} W_{an} \\ &= \int_a \frac{W_{ma} W_{an}}{E - E_a + i\epsilon}. \end{aligned} \quad (\text{E.16})$$

En utilisant le fait que $\frac{1}{x+i\epsilon} = vp\left(\frac{1}{x}\right) - i\pi\delta(x)$, on a

$$\begin{aligned} (W G_0^\Phi W)_{mn} &= \int_a W_{ma} \varphi\left(\frac{1}{E - E_a}\right) W_{an} - i\pi \int_a W_{ma} W_{an} \delta(E - E_a) \\ &= \int_a W_{ma} \varphi\left(\frac{1}{E - E_a}\right) W_{an} - i\pi \sum_i W_{mi}(E) W_{in}(E), \end{aligned} \quad (\text{E.17})$$

où l'on somme la partie imaginaire sur les canaux i , l'énergie dans le canal d'entrée étant E . La matrice D^Ψ est donc la matrice $E - H_0^\Psi$, diagonale dans la base des Ψ_n , modifiée par la perturbation $-WG_0^\Phi W$. La théorie des perturbations [131] donne, dans le cas où les niveaux d'énergie $E_n^{(0)} = e_n$ de H_0^Ψ ne sont pas dégénérés, $E_n = E_n^{(0)} + E_n^{(1)}$, avec $E_n^{(1)} = V_{nn}^\Psi = -(WG_0^\Phi W)_{nn}$. Le terme $E_n^{(1)}$ a, d'après (E.17), une partie réelle et une partie imaginaire. Si on considère uniquement l'ordre le plus bas, et puisque e_n est réel, seule la partie imaginaire de la perturbation est à prendre en compte. Finalement, d'après (E.17), on pourra écrire D^Ψ au premier ordre sous la forme

$$D_{mn}^\Psi = (E - e_n)\delta_{mn} + i\pi W_{mi}W_{in} \quad (\text{E.18})$$

(avec sommation implicite sur les canaux i). (W_{in} désigne la matrice de coefficients $\int \phi_i \hat{W} \Psi_m$, ϕ_i étant la fonction propre du canal i ayant l'énergie E . Dans le cas où les niveaux d'énergie de H_0^Ψ sont dégénérés, les perturbations au niveau d'énergie non perturbé e_n sont les solutions de $\det(V_{nn'} - X\delta_{nn'}) = 0$, où n, n' sont les indices des valeurs propres du sous-espace associé à la même énergie e_n .

On a donc pour D^Ψ l'expression matricielle

$$D^\Psi = E - H_0^\Psi + i\pi W {}^t W. \quad (\text{E.19})$$

Matriciellement, si on note Λ la matrice diagonale $(E - e_n)\delta_{mn}$, on a

$$\begin{aligned} S &= I - 2i\pi {}^t W (1 + i\pi \Lambda^{-1} W {}^t W)^{-1} \Lambda^{-1} W \\ &= I - 2i\pi {}^t W \left(\sum_{k=0}^{+\infty} (-i\pi \Lambda^{-1} W {}^t W)^k \right) \Lambda^{-1} W \\ &= I - 2i\pi {}^t W \Lambda^{-1} W + 2(i\pi)^2 {}^t W \Lambda^{-1} W + {}^t W \Lambda^{-1} W + \dots \\ &= (I - i\pi {}^t W \Lambda^{-1} W) \sum_{k=0}^{+\infty} (-i\pi {}^t W \Lambda^{-1} W)^k \\ &= (I - i\pi {}^t W \Lambda^{-1} W) (I + i\pi {}^t W \Lambda^{-1} W)^{-1}. \end{aligned} \quad (\text{E.20})$$

Sous cette forme, la matrice S apparaît manifestement unitaire, et on peut l'exprimer en fonction de la seule quantité

$$({}^t W \Lambda^{-1} W)_{ab} = \sum_n \frac{W_{an} W_{nb}}{E - E_n}. \quad (\text{E.21})$$

E.3 Perturbation pour le billard rectangulaire

E.3.1 Position du problème

On se place dans la suite dans le cas d'un billard bidimensionnel rectangulaire de côtés $a = 4$ et $b = \pi$, possédant deux canaux d'accès, l'un à droite à la hauteur y_1 , l'autre à gauche à la hauteur y_2 (voir Figure E.1). On repère les points par leurs coordonnées x et y . L'origine des coordonnées est située au coin inférieur droit de la jonction. L'axe des abscisses est pris parallèlement au côté a du billard, et l'axe des ordonnées parallèlement au côté b . On note w la largeur des canaux, supposés identiques. Les fonctions propres du lien $a = (i, E)$ sont des ondes sinusoïdales selon l'axe (Oy) , avec un nombre d'onde entier p , et ce sont des ondes planes

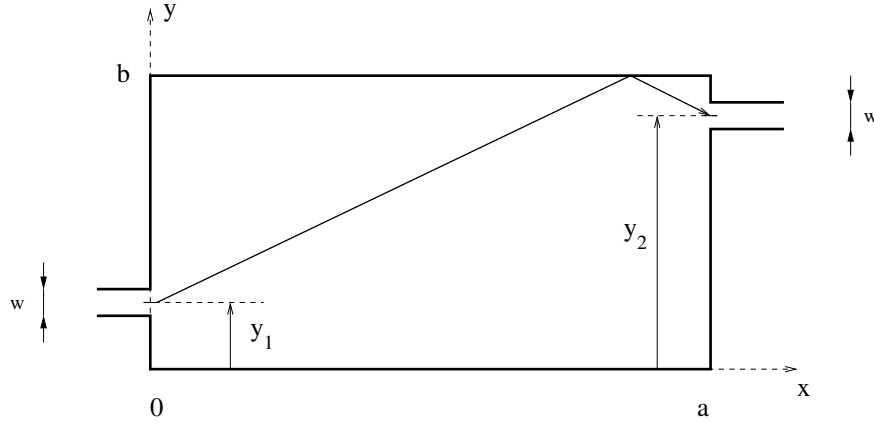


FIG. E.1 – Jonction rectangulaire avec canal d'entrée et canal de sortie

selon l'axe (Ox) (la longueur du canal étant supposée grande devant sa largeur), avec un nombre d'onde égal à

$$k = \sqrt{k_F^2 - \left(\frac{p\pi}{w}\right)^2} \quad (\text{E.22})$$

où l'on note $\sqrt{E} = k_F$ l'énergie de Fermi. On aura donc

$$\Phi_{a,p}(x,y) = \sqrt{\frac{2}{w}} \frac{e^{ikx}}{\sqrt{k}} \sin \left[p\pi \left(\frac{y - y_i}{w} - \frac{1}{2} \right) \right], \quad (\text{E.23})$$

la normalisation de l'onde plane étant choisie pour que le vecteur courant de probabilité défini par

$$\vec{i} = -\frac{i\hbar}{2} \int (\bar{\Psi} \nabla \Psi - \Psi \nabla \bar{\Psi}) \quad (\text{E.24})$$

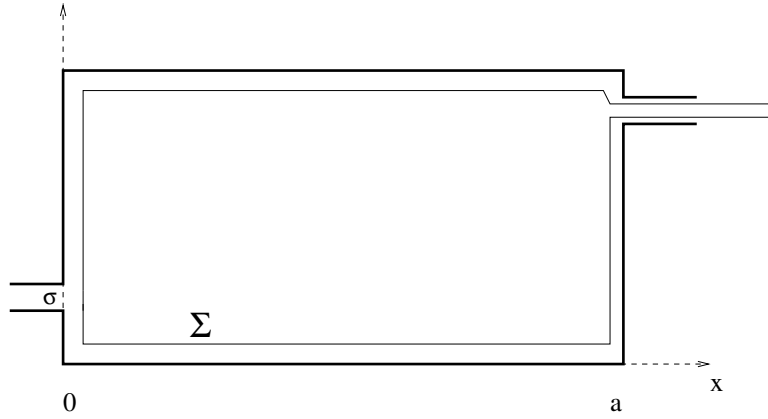
soit normalisé à 1 [131]. Les fonctions propres de la jonction sont celles d'un billard rectangulaire avec conditions aux bords de Dirichlet:

$$\Psi_n(x,y) = \frac{2}{\sqrt{ab}} \sin\left(\frac{\pi m}{a}x\right) \sin\left(\frac{\pi n}{b}y\right). \quad (\text{E.25})$$

E.3.2 Calcul de la perturbation

La méthode utilisée dans [126] pour traiter le problème consiste à supposer que les fonctions d'onde à l'intérieur des canaux d'entrée et de sortie sont peu affectées par la présence de la jonction, et qu'en outre la propagation à l'intérieur de la jonction est une propagation semi-classique, superposition d'ondes planes correspondant aux orbites périodiques.

On se base ici sur une méthode différente, qui utilise la relation (E.14) donnant l'amplitude de diffusion en fonction de la perturbation W . Pour le calcul de la perturbation, nous ferons l'approximation consistant à considérer qu'au voisinage des deux ouvertures les fonctions d'onde

FIG. E.2 – *Contours d'intégration dans la jonction.*

du canal et celles de la jonction sont peu affectées. Considérons l'ouverture située en $x = 0$. À gauche de cette ouverture, les fonctions propres Φ_a sont solutions de $H_L \Phi_a = E_a \Phi_a$; à droite, les fonctions propres Ψ_n sont solutions de $H_R \Psi_n = E_n \Psi_n$, H_L et H_R étant les Hamiltoniens décrivant respectivement le canal et la jonction. La perturbation W est alors la différence entre les deux Hamiltoniens: $W = H_R - H_L$, et le coefficient W_{an} sera donc donné par

$$\begin{aligned}
 W_{an} &= \langle \Phi_a | H_R - H_L | \Psi_n \rangle \\
 &= \langle \Phi_a | E_n - E_a | \Psi_n \rangle + \langle \Phi_a | H_L^\dagger - H_L | \Psi_n \rangle \\
 &\simeq \langle \Phi_a | H_L^\dagger - H_L | \Psi_n \rangle
 \end{aligned} \tag{E.26}$$

en considérant que la transition n'est possible qu'entre états d'énergie presque voisine, c'est-à-dire pour lesquels $E_n \simeq E_a$. Le coefficient W_{an} de la perturbation peut alors s'écrire comme une intégrale sur tout le volume, en considérant que, dans ce volume, le Hamiltonien H_L est le Hamiltonien libre:

$$\begin{aligned}
 W_{an} &= \int \int_{\Omega} (\Psi_n \Delta \Phi_a - \Phi_a \Delta \Psi_n) \\
 &= \int \int_{\Omega} \nabla (\Psi_n \nabla \Phi_a - \Phi_a \nabla \Psi_n) \\
 &= \int_{\Sigma} (\Psi_n \nabla \Phi_a - \Phi_a \nabla \Psi_n).
 \end{aligned} \tag{E.27}$$

On passe de la deuxième à la dernière ligne en appliquant le théorème de Stokes. La surface sur laquelle on intègre est la surface Σ représentée à la figure (E.2). Puisque les fonctions s'annulent sur les bords (conditions aux limites de Dirichlet), l'intégrale se réduit à une intégrale sur $\sigma = \{0\} \times [y_i - \frac{w}{2}, y_i + \frac{w}{2}]$. En outre, la fonction Ψ_n , donnée par (E.25), s'annule sur σ . La perturbation W s'écrit donc

$$W_{na} = \int_{-\frac{w}{2} + y_i}^{\frac{w}{2} + y_i} \Phi_a(x_0, y) \frac{\partial}{\partial x} \Psi_n(x_0, y) dy. \tag{E.28}$$

On peut donc calculer la valeur de la perturbation W en utilisant les expressions (E.23) et (E.25) des fonctions propres du canal et de la jonction: si p est le mode dans le canal d'entrée, l'équation (E.28) donne

$$W_{na} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{wabk}} \frac{\pi m}{a} \cos\left(\frac{\pi m}{a}x_0\right) \times \int_{-w/2}^{w/2} \sin\left[p\pi\left(\frac{y}{w} - \frac{1}{2}\right)\right] \sin\left[\frac{n\pi}{b}(y + y_i)\right] dy \quad (\text{E.29})$$

Si l'on suppose que l'énergie de Fermi est suffisamment basse pour que l'on puisse ne considérer que le mode $p = 1$, alors le couplage entre le i ème canal et la jonction est donné par

$$W_{ni} = \frac{8\pi\sqrt{2}}{\sqrt{wabk}} \frac{\pi m}{a} \frac{1}{w\left(\frac{n^2}{b^2} - \frac{1}{w^2}\right)} \cos\left(\frac{\pi m}{a}x_0\right) \cos\left(\frac{\pi n}{b}\frac{w}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi n}{b}y_i\right). \quad (\text{E.30})$$

E.4 Amplitudes de transition pour le billard rectangulaire

L'équation (E.14) exprime la matrice S , c'est-à-dire les amplitudes de transition entre les modes d'entrée et de sortie, en fonction de la perturbation due à la diffraction au niveau de l'ouverture entre les canaux et la jonction. Cette perturbation est donnée par l'équation (E.30) dans le cas du rectangle: on peut donc calculer la matrice S . Pour plus de simplicité nous récrivons la perturbation (E.30) sous la forme

$$W_{ni} = \lambda \frac{2}{\sqrt{ab}} \sqrt{\frac{\pi m}{a}} \cos\left(\frac{\pi m}{a}x_i\right) \sin\left(\frac{\pi n}{b}y_i\right) \quad (\text{E.31})$$

avec $x_1 = 0$ et $x_2 = a$.

E.4.1 Calcul de S_{12}

On s'intéresse au coefficient de matrice S entre le canal d'entrée et le canal de sortie:

$$S_{12} = W_{1n}(D^\Psi)_{nm}^{-1}W_{m2}. \quad (\text{E.32})$$

On a vu qu'à l'ordre le plus bas de la théorie des perturbations, la matrice D^Ψ pouvait être écrite sous la forme diagonale (E.18). La perturbation modifie les valeurs propres réelles e_n en leur ajoutant une partie imaginaire. On écrira, d'après (E.14),

$$S_{12} = -2i\pi \sum_n W_{1n} \frac{1}{E - E_n + i\Gamma_n} W_{n2}, \quad (\text{E.33})$$

avec une partie imaginaire Γ_n donnée par (E.18):

$$\Gamma_n = \pi (|W_{1n}|^2 + |W_{2n}|^2). \quad (\text{E.34})$$

Rappelons que l'indice discret qui apparaît dans (E.33) désigne deux entiers (m, n) caractérisant les niveaux d'énergie du billard rectangulaire. La partie réelle des niveaux d'énergie n'étant pas perturbée à cet ordre, on a

$$E_n \sim e_n = \left(\frac{\pi m}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi n}{b}\right)^2. \quad (\text{E.35})$$

On effectue alors une transformation de Poisson sur S_{12} , qui donne

$$S_{12} = -2i\pi \sum_{M,N} \int dmdn e^{2i\pi(Mm+Nn)} \frac{4}{ab} (-1)^m \frac{\pi|m|}{a} \lambda^2 \frac{\sin(\frac{\pi n}{b} y_1) \sin(\frac{\pi n}{b} y_2)}{E - e_n + i\Gamma_n}, \quad (\text{E.36})$$

où les variables d'intégration parcourent le quadrant supérieur droit. On étend alors la sommation à tout le plan en multipliant par $1/4$; le changement de variables

$$\left| \begin{array}{l} \frac{\pi m}{a} \\ \frac{\pi n}{b} \end{array} \right| = \begin{array}{l} r \cos \theta \\ r \sin \theta \end{array} \quad (\text{E.37})$$

donne

$$\begin{aligned} S_{12} &= \frac{-2i}{\pi} \sum_{M,N} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} r dr d\theta e^{2i(Ma \cos \theta + Nb \sin \theta)r} r |\cos \theta| \\ &\times \lambda^2 \frac{\sin(y_1 r \sin \theta) \sin(y_2 r \sin \theta) e^{iar \cos \theta}}{E - r^2 + i \frac{4\pi}{ab} \lambda^2 r \cos \theta [\sin^2(y_1 r \sin \theta) + \sin^2(y_2 r \sin \theta)]}. \end{aligned} \quad (\text{E.38})$$

E.4.2 Approximation pour S_{12}

Cas λ petit

Si l'amplitude λ de la perturbation est suffisamment petite, on peut faire facilement l'intégration sur r en négligeant la partie imaginaire du dénominateur. Les pôles sont alors voisins de $\pm k = \sqrt{E}$ (la confusion avec le k défini par l'équation (E.22) n'est pas possible puisque celui-ci n'intervient plus directement par la suite). Si on développe les sin sous forme d'exponentielles, l'intégration sur r donnera des termes du type

$$\int_0^{+\infty} r^2 \frac{e^{i[(2M+1)a \cos \theta + (2Nb \pm y_1 \pm y_2) \sin \theta]r}}{k^2 - r^2} dr = i\pi k e^{ikR \cos(\theta - \alpha)} \quad (\text{E.39})$$

où l'on a posé

$$\begin{cases} (2M+1)a &= R \cos \alpha \\ 2Nb \pm y_1 \pm y_2 &= R \sin \alpha \end{cases} \quad (\text{E.40})$$

Il y a alors deux points de col dans l'intégration sur θ :

$$S_{12} = \frac{-2i\lambda^2}{\pi} \sum_{M,N} \int_0^{2\pi} d\theta e^{ikR \cos(\theta - \alpha)} |\cos \theta| i\pi k \quad (\text{E.41})$$

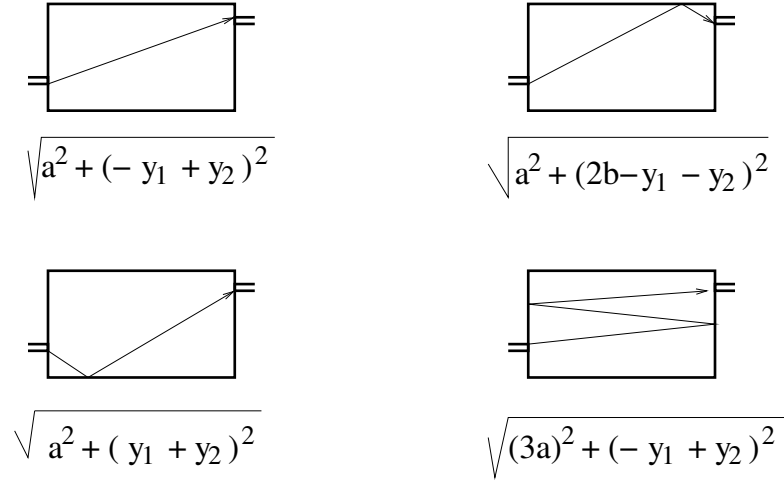
$$= 2k\lambda^2 \sum_{M,N} \sqrt{\frac{\pi}{kR}} e^{-i\frac{\pi}{4}} \frac{|2M+1|a}{R} e^{ikR} + \text{c.c.} \quad (\text{E.42})$$

$$= 2\lambda^2 \sqrt{k\pi} \sum_{M,N} \frac{|2M+1|a}{R^{3/2}} e^{ikR - i\frac{\pi}{4}} + \text{c.c.}, \quad (\text{E.43})$$

avec

$$R = \sqrt{(2M+1)^2 a^2 + (2Nb \pm y_1 \pm y_2)^2}. \quad (\text{E.44})$$

S_{12} s'exprime donc sous forme d'une somme sur des trajectoires classiques allant de l'entrée à la sortie de la jonction. La figure (E.3) donne l'exemple de quelques unes de ces orbites. La transformée de Fourier de S_{12} présente des pics correspondant à la longueur R des trajectoires classiques données par (E.44).

FIG. E.3 – Exemples d'orbites contribuant à S_{12}

Cas $\lambda \sim 1$

L'expression précédente correspond au terme d'ordre le plus bas du développement en λ de (E.38). On peut effectuer un développement perturbatif en λ au voisinage des pôles $\pm k$. Le dénominateur de l'expression (E.38) est $k^2 - r^2 + 2ir\gamma$, en posant

$$\gamma(r) = \frac{\lambda^2}{2} |\cos \theta| [\sin^2(y_1 r \sin \theta) + \sin^2(y_2 r \sin \theta)] \quad (\text{E.45})$$

et en utilisant le fait que $ab = 4\pi$ dans toute cette partie. Les pôles sont donc donnés par

$$r = i\gamma(r) \pm \sqrt{k^2 - \gamma^2(r)}; \quad (\text{E.46})$$

r et γ étant complexes, on les écrit $r = r_1 + ir_2$ et $\gamma = \gamma_1 + i\gamma_2$ et on cherche un développement en puissances de λ . A l'ordre le plus bas, on a bien $r^{(0)} = \pm k$. Aux ordres suivants, on a (pour la racine valant k à l'ordre le plus bas)

$$\begin{cases} r_1 &= k - \gamma_2 - \frac{\gamma_1^2 - \gamma_2^2}{2k} + \dots \\ r_2 &= \gamma_2 - i \frac{\gamma_1 \gamma_2}{k} + \dots \end{cases} \quad (\text{E.47})$$

et (E.45) permet d'exprimer les γ_i en fonction des r_i :

$$\begin{cases} \gamma_1 &= \frac{\lambda^2}{2} |\cos \theta| (\sin^2(r_1 \phi_1) \cosh^2(r_2 \phi_1) - \cos^2(r_1 \phi_1) \sinh^2(r_2 \phi_1) \\ &\quad + \sin^2(r_1 \phi_2) \cosh^2(r_2 \phi_2) - \cos^2(r_1 \phi_2) \sinh^2(r_2 \phi_2)) \\ \gamma_2 &= \frac{\lambda^2}{2} |\cos \theta| (2 \sin(r_1 \phi_1) \cos(r_1 \phi_1) \cosh(r_2 \phi_1) \sinh(r_2 \phi_1) \\ &\quad + 2 \sin(r_1 \phi_2) \cos(r_1 \phi_2) \cosh(r_2 \phi_2) \sinh(r_2 \phi_2)) \end{cases} \quad (\text{E.48})$$

où $\phi_i = y_i \sin \theta$. A l'ordre le plus bas, on a

$$\begin{cases} r_1^{(0)} &= k \\ r_2^{(0)} &= 0, \end{cases} \quad (\text{E.49})$$

ce qui donne

$$\begin{cases} \gamma_1^{(1)} &= \frac{\lambda^2}{2} |\cos \theta| [\sin^2(y_1 k \sin \theta) + \sin^2(y_2 k \sin \theta)] \\ \gamma_2^{(1)} &= 0. \end{cases} \quad (\text{E.50})$$

A l'ordre suivant,

$$\begin{cases} r_1^{(1)} &= -\gamma_2^{(1)} = 0 \\ r_2^{(1)} &= \gamma_1^{(1)}. \end{cases} \quad (\text{E.51})$$

On a finalement à cet ordre des racines $r = r_1^{(0)} + r_1^{(1)} + i(r_2^{(0)} + r_2^{(1)})$ données par

$$r = \pm k + i \frac{\lambda^2}{2} |\cos \theta| [\sin^2(y_1 k \sin \theta) + \sin^2(y_2 k \sin \theta)]. \quad (\text{E.52})$$

Cela revient à remplacer k par cette valeur dans l'expression (E.41). On a ainsi à cet ordre

$$\begin{aligned} S_{12} &= 2k\lambda^2 \sum_{M,N} \int_0^{2\pi} d\theta |\cos \theta| \exp(ikR \cos(\theta - \alpha)) \\ &- R \frac{\lambda^2}{2} |\cos \theta| \cos(\theta - \alpha) [\sin^2(y_1 k \sin \theta) + \sin^2(y_2 k \sin \theta)]. \end{aligned} \quad (\text{E.53})$$

Le calcul de cette intégrale peut se faire en développant l'exponentielle, en utilisant la relation

$$\begin{aligned} e^{-\alpha \sin^2 x} &= e^{-\frac{\alpha}{2}} e^{\frac{\alpha}{2} \cos 2x} \\ &= e^{-\frac{\alpha}{2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n\left(\frac{\alpha}{2}\right) e^{2inx}, \end{aligned} \quad (\text{E.54})$$

où $I_n(t)$ est la fonction de Bessel modifiée d'indice n . Le calcul se fait alors de la même façon que pour λ petit. On a à présent à intégrer des exponentielles du type

$$e^{ikR \cos(\theta - \alpha) + 2i(my_1 + ny_2)k \sin \theta} = e^{i[(2M+1)a \cos \theta + (2Nb + (2m \pm 1)y_1 + (2n \pm 1)y_2 \sin \theta)]k} \quad (\text{E.55})$$

et S_{12} va donc être une somme sur les trajectoires classiques de longueurs

$$L = \sqrt{(2M+1)^2 a^2 + (2Nb + (2m+1)y_1 + (2n+1)y_2)^2}, \quad (\text{E.56})$$

avec M , N , m et n parcourant l'ensemble des entiers relatifs. La transformée de Fourier de S_{12} va donc présenter des pics pour des valeurs de L égales à celles prévues par (E.56). Les orbites obtenues par le calcul à l'ordre le plus bas, dont la longueur est donné par (E.44), correspondent à n et m égaux à -1 ou 0 .

E.4.3 Calcul de $|S_{12}|^2$

Cas λ petit

Dans le cas où λ est petit devant l'écartement moyen des niveaux d'énergie, le calcul de $|S_{12}|^2$ peut se faire par l'approximation diagonale : ainsi (E.33) donne

$$\begin{aligned}
 |S_{12}|^2 &= 4\pi^2 \sum_{m,n} W_{1n} \frac{1}{E - e_n + i\Gamma_n} W_{n2} W_{1m}^* \frac{1}{E - e_m + i\Gamma_m} W_{m2}^* \\
 &= 4\pi^2 \sum_n \frac{|W_{1n}|^2 |W_{2n}|^2}{(E - e_n)^2 + \Gamma_n^2} \\
 &= 4\pi^3 \sum_n \frac{|W_{1n}|^2 |W_{2n}|^2}{\Gamma_n} \delta(E - e_n) \\
 &= \frac{64\pi^3 \lambda^4}{a^2 b^2} \sum_{m,n} \left(\frac{\pi m}{a} \right)^2 \frac{\sin^2(\frac{\pi n}{b} y_1) \sin^2(\frac{\pi n}{b} y_2)}{\Gamma_n} \delta(E - E_{mn})
 \end{aligned} \tag{E.57}$$

où les valeurs propres E_{mn} sont données par (E.35) et où

$$\Gamma_n = \frac{4\pi}{ab} \frac{\pi|m|}{a} \lambda^2 \left(\sin^2(\frac{\pi n}{b} y_1) + \sin^2(\frac{\pi n}{b} y_2) \right) \tag{E.58}$$

d'après l'équation (E.34). La transformation de Poisson et le changement de variables (E.37) donnent

$$\begin{aligned}
 |S_{12}|^2 &= \frac{16\pi^2 \lambda^2}{ab} \sum_{M,N} \int dm \, dn \, e^{2i\pi(Mm+Nn)} \frac{\pi|m|}{a} \\
 &\times \frac{\sin^2(\frac{\pi n}{b} y_1) \sin^2(\frac{\pi n}{b} y_2)}{\sin^2(\frac{\pi n}{b} y_1) + \sin^2(\frac{\pi n}{b} y_2)} \delta(E - E_{mn}) \\
 &= 2k\lambda^2 \sum_{M,N} \int_0^{2\pi} d\theta \, e^{2i(Ma \cos \theta + Nb \sin \theta)k} \\
 &\times \frac{\sin^2(y_1 r \sin \theta) \sin^2(y_2 r \sin \theta)}{\sin^2(y_1 r \sin \theta) + \sin^2(y_2 r \sin \theta)} |\cos \theta|.
 \end{aligned} \tag{E.59}$$

Pour développer la fraction rationnelle en $\sin$, on utilise le développement (E.79) donné en annexe A. On a ainsi

$$|S_{12}|^2 = \frac{k\lambda^2}{2\pi^2} \sum_{M,N,m,n} \int_0^{2\pi} d\theta \, c_{mn} |\cos \theta| e^{2i(Ma \cos \theta + (Nb + my_1 + ny_2) \sin \theta)k}, \tag{E.61}$$

d'où comme précédemment une expression de $|S_{12}|^2$ comme somme sur des trajectoires classiques de longueurs

$$L = 2\sqrt{(Ma)^2 + (Nb + ny_1 + my_2)^2}. \tag{E.62}$$

Mais ces longueurs ne correspondent pas aux trajectoires allant du canal d'entrée au canal de sortie, c'est-à-dire aux trajectoires physiques. Elles correspondent en fait à la compensation des très longues orbites dans S_{12} . En effet l'équation (E.41) montre que S_{12} est de la forme

$$S_{12} = \sum_p A_p e^{ikL_p} + \text{c.c.}, \tag{E.63}$$

où l'on somme sur les orbites périodiques de longueur L_p donnée par (E.56). Alors $|S_{12}|^2$ s'exprime comme la somme

$$S_{12} S_{12}^* = \sum \sum A_p A_{p'}^* e^{ik(L_p - L_{p'})} \quad (\text{E.64})$$

que l'on peut développer par la méthode de la phase stationnaire lorsque k est grand: les seules contributions subsistant dans $|S_{12}|^2$ seront celles provenant d'un nombre infini de couples $(L_p, L_{p'})$ (c'est pourquoi on ne retient dans l'expression (E.64) que les termes faisant apparaître une différence de longueur $L_p - L_{p'}$: les termes en $ik(L_p + L_{p'})$ ne contribuent que par un nombre fini de termes et, par là même, sont négligeables). Les points de col dans la somme sont les points tels que $M = r\tilde{M}$, $N = r\tilde{N}$, $m = r\tilde{m}$, $n = r\tilde{n}$. En effet on a alors

$$\begin{aligned} L_p - L_{p'} &= \sqrt{(2r\tilde{M} + 1)^2 a^2 + (2r\tilde{N}b + (2r\tilde{m} + 1)y_1 + (2r\tilde{n} + 1)y_2)^2} \\ &- \sqrt{(2r\tilde{M}' + 1)^2 a^2 + (2r\tilde{N}'b + (2r\tilde{m}' + 1)y_1 + (2r\tilde{n}' + 1)y_2)^2} \end{aligned} \quad (\text{E.65})$$

et, si r et r' sont grands,

$$L_p - L_{p'} = 2(r - r')\sqrt{(Ma)^2 + (Nb + my_1 + ny_2)^2}. \quad (\text{E.66})$$

Pour ces valeurs de M, N, m et n , la différence $L_p - L_{p'}$ est la même pour $r - r'$ donné. Toutes les orbites telles que $r - r'$ soit fixé apporteront donc la même contribution à (E.64) correspondant à un pic à la longueur (E.66). Cette longueur coïncide bien avec les longueurs (E.62) pour les pics de la transformée de Fourier de $|S_{12}|^2$. Les oscillations que présente la conductance correspondent donc à l'interaction des trajectoires classiques longues.

Dans le cas particulier où $y_2 = 2y_1$, on peut obtenir la valeur explicite de l'amplitude des pics, en développant la fraction rationnelle en sin sous la forme

$$\begin{aligned} \frac{\sin^2 x \sin^2 2x}{\sin^2 x + \sin^2 2x} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^2 - \frac{1}{2} \cos 2x \\ &- \frac{\sqrt{5}}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{2n} \cos 2nx \end{aligned} \quad (\text{E.67})$$

(voir annexe B); alors

$$\begin{aligned} |S_{12}|^2 &= 2k\lambda^2 \sum_{M,N} \int_0^{2\pi} d\theta e^{2i(Ma \cos \theta + Nb \sin \theta)k} |\cos \theta| \\ &\left[\frac{1}{2} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^2 - \frac{1}{4} (e^{2ik \sin \theta y_1} + e^{-2ik \sin \theta y_1}) \right. \\ &\left. - \frac{\sqrt{5}}{4} \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{2n} (e^{2ikn \sin \theta y_1} + e^{-2ikn \sin \theta y_1}) \right] \end{aligned} \quad (\text{E.68})$$

Pour $M \neq 0$, l'intégration sur θ donne des termes en

$$\int_0^{2\pi} d\theta |\cos \theta| e^{2i(Ma \cos \theta + (Nb + ny_1) \sin \theta)k} = \sqrt{\frac{\pi}{2kL}} \frac{|M|a}{L} e^{2ikL - i\frac{\pi}{4}} + \text{c.c.}, \quad (\text{E.69})$$

avec

$$L = \sqrt{(Ma)^2 + (Nb + ny_1)^2}. \quad (\text{E.70})$$

Pour $M = 0$, l'intégration sur θ donne des termes en

$$\int_0^{2\pi} d\theta |\cos \theta| e^{2ik(Nb+ny_1)\sin \theta} = \frac{e^{2ikL}}{ikL} + \text{c.c.}, \quad (\text{E.71})$$

avec

$$L = |Nb + ny_1|. \quad (\text{E.72})$$

La transformée de Fourier de $|S_{12}|^2$ doit donc présenter des pics correspondant aux longueurs $2\sqrt{(Ma)^2 + (Nb + ny_1)^2}$, M et N variant de $-\infty$ à $+\infty$, et n de 0 à $+\infty$. Les amplitudes de ces pics seront dans le cas général ($n \geq 2$)

$$\frac{\sqrt{5}}{4} (-1)^{n+1} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{2n} \frac{1}{2\pi^2 L} \quad (\text{E.73})$$

pour $M = 0$, et

$$\frac{\sqrt{5}}{4} (-1)^{n+1} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{2n} \frac{|M|a\sqrt{k}}{(2\pi L)^{3/2}} \quad (\text{E.74})$$

pour $M \neq 0$. Numériquement, on observe bien cette décroissance en $1/L^{3/2}$ de l'amplitude des pics.

Cas $\lambda \sim 1$

L'approximation diagonale dans $|S_{12}|^2$ n'est plus valable si la largeur Γ_n des pics d'énergie est de l'ordre de l'écartement de ces pics. Les calculs numériques font apparaître des pics ne correspondant pas aux compensations d'orbites longues. En fait, seuls sont présents les pics correspondant aux différences d'orbites courtes. On peut expliquer qualitativement ce phénomène. Comme on l'a vu, on a

$$|S_{12}|^2 = \sum_p \sum_{p'} A_p A_{p'}^* e^{ik(L_p - L_{p'})} \quad (\text{E.75})$$

et la transformée de Fourier de $|S_{12}|^2$ présente des pics apparaissant aux longueurs $L = L_p - L_{p'}$, avec une amplitude proportionnelle à $1/\sqrt{L_p L_{p'}}$, les longueurs L_p étant données par l'expression (E.56). Par ailleurs, la partie imaginaire de k assurant la convergence de la somme (E.75) est à présent d'ordre 1 (puisque'elle est proportionnelle à λ^2): on a donc, pour chaque contribution, un facteur

$$e^{-\tilde{\gamma}(L_p + L_{p'})}, \quad (\text{E.76})$$

où $\tilde{\gamma}$ est d'ordre 1. Ce facteur "écrase" les orbites provenant des compensations d'orbites longues.

Conclusion

Les calculs précédents montrent que le coefficient de matrice S_{12} exprimant la transition entre un état propre donné du canal d'entrée et un état quelconque du canal de sortie peut être exprimé comme une somme sur les trajectoires classiques reliant le canal d'entrée et le canal

de sortie. La conductance, qui fait intervenir le carré de cette amplitude de transition, présente des oscillations qui sont dues à l'interaction entre ces trajectoires classiques. Dans le régime λ petit, ce sont les interactions entre orbites longues qui dominent, et la conductance est alors une somme sur des trajectoires non-classiques. Dans le régime λ grand, les interactions entre orbites courtes sont dominantes.

Annexe A

Pour développer la fraction rationnelle en $\sin$ apparaissant dans (E.59), on utilise le développement suivant à l'aide des fonctions de Bessel :

$$e^{t \cos \Phi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n(t) e^{in\Phi}, \quad (\text{E.77})$$

où $I_n(t)$ est la fonction de Bessel modifiée d'indice n . Alors

$$\begin{aligned} \frac{\sin^2 x \sin^2 y}{\sin^2 x + \sin^2 y} &= \int_0^\infty \sin^2 x \sin^2 y e^{-(t \sin^2 x + t \sin^2 y)} dt \\ &= \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial t} e^{-\frac{t}{2}(1-\cos 2x)} \frac{\partial}{\partial t} e^{-\frac{t}{2}(1-\cos 2y)} dt \\ &= 2 \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial t} \left(e^{-t} \sum_{m=-\infty}^{\infty} I_m(t) e^{2imx} \right) \\ &\quad \times \frac{\partial}{\partial t} \left(e^{-t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n(t) e^{2iny} \right) dt. \end{aligned} \quad (\text{E.78})$$

On a donc

$$\frac{\sin^2 x \sin^2 y}{\sin^2 x + \sin^2 y} = 2 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{mn} e^{2i(mx+ny)}, \quad (\text{E.79})$$

avec

$$c_{mn} = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial t} (e^{-t} I_m(t)) \frac{\partial}{\partial t} (e^{-t} I_n(t)) dt. \quad (\text{E.80})$$

On peut en outre calculer le comportement asymptotique des coefficients c_{mn} en utilisant l'équivalent en $+\infty$ des fonctions de Bessel modifiées d'ordre entier :

$$I_n(x) = \frac{1}{\pi \sqrt{2} [n^2 + x^2]^{1/4}} e^{\sqrt{n^2 + x^2} - n \ln \frac{n + \sqrt{n^2 + x^2}}{x}} \left(\sqrt{\pi} + O\left(\frac{1}{x}\right) \right), \quad (\text{E.81})$$

d'où

$$e^{-t} I_p(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} [n^2 + x^2]^{1/4}} e^{-\frac{n^2}{2x}} \left(1 + \frac{1}{8} \frac{1}{\sqrt{n^2 + x^2}} + o\left(\frac{1}{x}\right) \right). \quad (\text{E.82})$$

Le calcul au premier ordre de l'intégrale définissant c_{mn} donne

$$c_{mn} \sim \frac{1}{\pi(m^2 + n^2)^2}. \quad (\text{E.83})$$

Annexe B

Dans le cas particulier où $y = 2x$, le calcul de la fraction rationnelle en sin (E.67) peut se faire en écrivant

$$f(x) = \frac{\sin^2 x \sin^2 2x}{\sin^2 x + \sin^2 2x} = -\frac{1}{4} \left(2 \cos 2x - 3 + \frac{5}{3 + 2 \cos 2x} \right). \quad (\text{E.84})$$

On peut alors développer $(1 + \alpha \cos x)^{-1}$ en série de Fourier (avec $|\alpha| < 1$); en posant $z = e^{ix}$, on a

$$\frac{1}{1 + \alpha \cos x} = \frac{2}{2 + \alpha z + \frac{\alpha}{z}} = \frac{2z}{\alpha(z - z_0)(z - \frac{1}{z_0})}, \quad (\text{E.85})$$

où z_0 et $\frac{1}{z_0}$ sont racines de l'équation $\alpha z^2 + 2z + \alpha = 0$, et

$$z_0 = \frac{-1 + \sqrt{1 - \alpha^2}}{\alpha}. \quad (\text{E.86})$$

Alors

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 + \alpha \cos x} &= \frac{2z}{\alpha} \frac{1}{z_0 - \frac{1}{z_0}} \left(\frac{1}{z - z_0} - \frac{1}{z - \frac{1}{z_0}} \right) \\ &= \frac{z}{\sqrt{1 - \alpha^2}} \left(z_0 \frac{1}{1 - z z_0} - \frac{1}{z_0} \frac{z_0 - z + z}{z_0 - z} \right) \\ &= \frac{z}{\sqrt{1 - \alpha^2}} \left(z_0 \frac{1}{1 - z z_0} - \frac{1}{z_0} + \frac{1}{z_0} \frac{1}{1 - z_0 z^{-1}} \right) \\ &= \frac{z}{\sqrt{1 - \alpha^2}} \left(z_0 \sum_{n=0}^{+\infty} z_0^n z^n - \frac{1}{z_0} + \frac{1}{z_0} \sum_{n=0}^{+\infty} z_0^n z^{-n} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - \alpha^2}} \left(1 + \sum_{n=1}^{+\infty} 2 z_0^n \cos nx \right). \end{aligned} \quad (\text{E.87})$$

En utilisant (E.87) pour $\alpha = 2/3$, l'équation (E.84) devient

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{3 - 2 \cos 2x}{4} - \frac{5}{12} \frac{3}{\sqrt{5}} \left(1 + \sum_{n=1}^{+\infty} 2 \left(\frac{\sqrt{5} - 3}{2} \right)^n \cos 2nx \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^2 - \frac{1}{2} \cos 2x - \frac{\sqrt{5}}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{2n} \cos 2nx. \end{aligned} \quad (\text{E.88})$$

Références bibliographiques

- [1] E. Bogomolny, U. Gerland, and C. Schmit, *Phys. Rev. E* **63**, 036206 (2001).
- [2] A. J. Lichtenberg and M. A. Liebermann, *Regular and Stochastic Motion* (Springer, New York, 1983).
- [3] I. P. Kornfeld, S. V. Fomin, and Y. G. Sinai, *Ergodic Theory* (Springer, Berlin, 1982).
- [4] V. I. Arnol'd, *Mathematical Methods of Classical Dynamics* (Springer, Berlin, 1978).
- [5] Y. G. Sinai, *Introduction to ergodic theory* (Princeton University press, Princeton, NJ, 1976).
- [6] Y. G. Sinai, *Russian Math. Surveys* **25**, 137 (1970).
- [7] P. Dahlqvist, *Nonlinearity* **10**, 159 (1997).
- [8] M. V. Berry and P. J. Richens, *Physica D* **2**, 495 (1981).
- [9] A. B. Zemlyakov and A. N. Katok, *Math. Notes* **18**, 760 (1976).
- [10] J. H. Hannay and R. J. McCraw, *J. Phys. A: Math. Gen.* **23**, 887 (1990).
- [11] M. L. Mehta, *Random Matrix Theory* (Springer, New York, 1990).
- [12] O. Bohigas, in *Chaos and Quantum Mechanics*, edited by M.-J. Giannoni, A. Voros, and J. Zinn-Justin (North Holland, Amsterdam, 1991), les Houches Summer School Lectures, Session LII, 1989.
- [13] H. Baltes and E. R. Hilf, *Spectra of Finite Systems* (Bibliographisches Institut, Mannheim, 1976).
- [14] O. Bohigas and M. J. Giannoni, in *Mathematical and Computational Methods in Nuclear Physics*, edited by J. S. Dehesa, J. M. G. Gomez, and A. Polls (Springer Verlag, Spain, 1984), proceedings of the 6th Granada Workshop (Lecture Notes in Physics Vol. 209 p.1).
- [15] M. V. Berry and M. Tabor, *Proc. Roy. Soc. Lond.* **356**, 375 (1977).
- [16] M. V. Berry, *Proc. Roy. Soc. A* **400**, 229 (1985).
- [17] J. Marklof, in *Proceedings of the 3rd European Congress of Mathematics* (Birkhäuser, Basel, 2001), (Barcelona, 2000) - Progress in Mathematics Vol. 202, pp.421-427.
- [18] P. Sarnak, in *Harmonic Analysis and Number Theory*, edited by C. C. Proc. (Am. Math. Soc., Providence, RI, 1997), Vol. 21, pp. 181–203, (Montreal, 1996).
- [19] A. Eskin, G. Margulis, and S. Mozes, preprint (unpublished).
- [20] J. M. VanderKam, *Duke Math. J.* **97**, 413 (1999).
- [21] J. Marklof, preprint (unpublished).
- [22] A. Pandey, O. Bohigas, and M.-J. Giannoni, *J. Phys. A: Math. Gen.* **22**, 4083 (1989).
- [23] P. M. Bleher, *J. Statist. Phys.* **61**, 869 (1990).

- [24] P. M. Bleher, J. Statist. Phys. **63**, 261 (1991).
- [25] C. D. Greenman, J. Phys. A **29**, 4065 (1996).
- [26] J. J. Duistermaat and V. W. Guillemin, Invent. Math. **29**, 39 (1975).
- [27] A. Weinstein, Duke Math. J. **44**, 883 (1977).
- [28] Y. Colin de Verdière, Comment. Math. Helvetici **54**, 508 (1979).
- [29] J. Marklof, Comm. Math. Phys. **199**, 169 (1998).
- [30] H. Wu, M. Vallières, D. H. Feng, and D. W. L. Sprung, Phys. Rev. A **42**, 1027 (1990).
- [31] C. E. Porter, *Statistical Theories of Spectra: Fluctuations* (Academic Press, New York, 1965).
- [32] T. Guhr, A. Müller-Groeling, and H. Weidenmüller, Phys. Rep. **299**, 189 (1998).
- [33] O. Bohigas, M.-J. Giannoni, and C. Schmit, Phys. Rev. Lett. **52**, 1 (1984).
- [34] D. Wintgen, Phys. Rev. Lett. **58**, 1589 (1987).
- [35] M. V. Berry and M. Robnik, J. Phys. A: Math. Gen. **19**, 649 (1986).
- [36] E. Bogomolny, B. Georgeot, M. J. Giannoni, and C. Schmit, Phys. Reports **291**, 220 (1997).
- [37] E. Bogomolny, F. Leyvraz, and C. Schmit, Comm. Math. Phys. **176**, 577 (1996).
- [38] J. P. Keating, Nonlinearity **4**, 309 (1991).
- [39] F. Leyvraz, C. Schmit, and T. H. Seligman, J. Phys. A: Math. Gen. **29**, L575 (1996).
- [40] T. H. Seligman, J. J. M. Verbaarschot, and M. R. Zirnbauer, Phys. Rev. Lett. **53**, 215 (1984).
- [41] M. V. Berry and M. Robnik, J. Phys. A: Math. Gen. **17**, 2413 (1984).
- [42] E. Bogomolny, Sov. Phys. JETP Lett. **41**, 65 (1986).
- [43] T. Jonckheere, B. Grémaud, and D. Delande, Phys. Rev. Lett. **81**, 2442 (1998).
- [44] B. L. Altshuler and L. S. Levitov, Phys. Rep. **288**, 487 (1997).
- [45] E. Bogomolny, U. Gerland, and C. Schmit, Phys. Rev. E **59**, R1315 (1999).
- [46] U. Gerland, Phys. Rev. Lett. **83**, 1139 (1999).
- [47] T. Ishikawa and T. Yukawa, Phys. Rev. Lett. **54**, 1617 (1985).
- [48] K. M. Frahm and D. L. Shepelyansky, Phys. Rev. Lett. **78**, 1440 (1997).
- [49] H. Hernández-Saldaña, J. Flores, and T. H. Seligman, Phys. Rev. E **60**, 449 (1999).
- [50] B. I. Shklovskii *et al.*, Phys. Rev. B **47**, 11487 (1993).
- [51] J. T. Chalker and G. J. Daniell, Phys. Rev. Lett. **61**, 593 (1988).
- [52] C. Castellani, C. di Castro, and L. Peliti, J. Phys. A: Math. Gen. **19**, L1099 (1986).
- [53] Y. V. Fyodorov and A. D. Mirlin, Phys. Rev. B **55**, R16001 (1997).
- [54] J. T. Chalker, V. E. Kravtsov, and I. V. Lerner, JETP Lett. **64**, 386 (1996).
- [55] D. Braun, G. Montambaux, and M. Pascaud, Phys. Rev. Lett. **81**, 1062 (1998).
- [56] T. A. Brody, Lett. Nuov. Cim. **7**, 482 (1973).
- [57] F. Gürsey, Proc. Cambridge Philos. Soc. **44**, 182 (1950).
- [58] L. V. Hove, Physica (Amsterdam) **16**, 28 (1950).
- [59] E. Bogomolny, U. Gerland, and C. Schmit, Eur. Phys. J. B **19**, 121 (2001).
- [60] M. Gaudin, Nucl. Phys. **85**, 545 (1966).
- [61] P. J. Forrester, Phys. Lett. A **173**, 355 (1993).

- [62] M. C. Gutzwiller, in *Chaos and Quantum Mechanics*, edited by M.-J. Giannoni, A. Voros, and J. Zinn-Justin (North Holland, Amsterdam, 1991), les Houches Summer School Lectures, Session LII, 1989.
- [63] M. V. Berry, in *Chaos and Quantum Mechanics*, edited by M.-J. Giannoni, A. Voros, and J. Zinn-Justin (North Holland, Amsterdam, 1991), les Houches Summer School Lectures, Session LII, 1989.
- [64] R. Balian and C. Bloch, Ann. Phys. (N. Y.) **85**, 514 (1974).
- [65] R. Balian and C. Bloch, Ann. Phys. (N. Y.) **69**, 76 (1972).
- [66] M. V. Berry and M. Tabor, Proc. Roy. Soc. Lond. **349**, 101 (1976).
- [67] A. Selberg, J. Ind. Math. Soc. **20**, 47 (1953).
- [68] N. L. Balasz and A. Voros, Phys. Rep. **143**, 109 (1986).
- [69] E. B. Bogomolny, in *Quantum Dynamics of Simple Systems*, edited by G.-L. Oppo, S. M. Barnett, E. Riis, and M. Wilkinson (The Forty Forth Scottish Universities Summer School in Physics, Bristol and Philadelphia, August 1994), p. 17.
- [70] S. C. Creagh and R. G. Littlejohn, Phys. Rev. A **44**, 836 (1991).
- [71] S. C. Creagh and R. G. Littlejohn, Phys. Rev. A **25**, 1643 (1991).
- [72] E. C. Titchmarsh, *The Theory of the Riemann Zeta-Function* (Oxford Science Publications, Oxford, 1986), 2nd ed. revised by D. R. Heath-Brown.
- [73] D. Hejhal, Duke Math. J. **43**, 441 (1976).
- [74] J. Keller, J. Opt. Soc. Am. **52**, 116 (1962).
- [75] G. Vattay, A. Wirzba, and P. Rosenqvist, Phys. Rev. Lett. **73**, 2304 (1994).
- [76] M. Sieber, J. Phys. A: Math. Gen. **32**, 7679 (1999).
- [77] S. Albeverio, F. Gesztesy, R. Høegh-Krohn, and H. Holden, *Solvable Models in Quantum Mechanics* (Springer, New York, 1988).
- [78] P. Exner and P. Šeba, Phys. Lett. A **222**, 1 (1996).
- [79] L. D. Landau and E. Lifchitz, *Mécanique quantique* (Mir, Moscou, 1966).
- [80] E. B. Bogomolny, P. Leboeuf, and C. Schmit, Phys. Rev. Lett. **85**, 2486 (2000).
- [81] W. Pauli, Phys. Rev. **54**, 924 (1938).
- [82] R. G. Kouyoumjian and P. H. Pathak, Proc. IEEE **62**, 1448 (1974).
- [83] G. L. James, *Geometrical Theory of Diffraction for Electromagnetic Waves* (Peregrinus, Stevenage, England, 1976).
- [84] E. Bogomolny, N. Pavloff, and C. Schmit, Phys. Rev. E **61**, 3689 (2000).
- [85] A. Sommerfeld, *Optics* (Academic, New York, 1954).
- [86] M. Sieber, N. Pavloff, and C. Schmit, Phys. Rev. E **5**, 2279 (1997).
- [87] J. H. Hannay and A. M. Ozorio de Almeida, J. Phys. A: Math. Gen. **17**, 3429 (1984).
- [88] N. Argaman *et al.*, Phys. Rev. Lett. **71**, 4326 (1993).
- [89] M. Sieber and K. Richter, Physica Scripta **T 90**, 128 (2001).
- [90] E. Bogomolny, Nonlinearity **13**, 947 (2000).
- [91] E. B. Bogomolny and O. Giraud (unpublished).
- [92] P. Šeba, Phys. Rev. Lett. **64**, 1855 (1990).

- [93] S. Albeverio and P. Šeba, J. Stat. Phys. **64**, 369 (1991).
- [94] A. Bohr and B. R. Mottelson, *Nuclear structure* (W. A. Benjamin Inc., New York, 1989), p. 302, vol. I.
- [95] P. Šeba and K. Zyczkowski, Phys. Rev. A **44**, 3457 (1991).
- [96] T. Shigehara, N. Yoshinaga, T. Cheon, and T. Mizusaki, Phys. Rev. E **47**, R3822 (1993).
- [97] Y. Aharonov and D. Bohm, Phys. Rev. **115**, 485 (1959).
- [98] C. C. Gerry and V. A. Singh, Phys. Rev. D **20**, 2550 (1979).
- [99] A. Dasnières de Veigy and S. Ouvry, C. R. Acad. Sci. Paris **318**, 19 (1994).
- [100] G. Date, S. R. Jain, and M. V. N. Murthy, Phys. Rev. E **51**, 198 (1995).
- [101] S. M. Reimann *et al.*, Phys. Rev. A **53**, 39 (1996).
- [102] M. V. Berry and M. Robnik, J. Phys. A: Math. Gen. **19**, 669 (1986).
- [103] S. Kerckhoff, H. Masur, and J. Smillie, Ann. Math. **124**, 293 (1986).
- [104] A. Katok, Comm. Math. Phys. **11**, 151 (1987).
- [105] H. Masur, MSRI Publ. **10**, 215 (1988).
- [106] H. Masur, Ergod. Theor. & Dyn. Sys. **10**, 151 (1990).
- [107] E. Gutkin, Physica **19D**, 311 (1986).
- [108] R. Artuso, Physica **109D**, 1 (1997).
- [109] R. Artuso, G. Casati, and I. Guarneri, Phys. Rev. E **55**, 6384 (1997).
- [110] G. Casati and T. Prosen, Phys. Rev. Lett. **83**, 4729 (1999).
- [111] W. A. Veech, Invent. Math. **97**, 553 (1989).
- [112] W. A. Veech, Geometric and Functional Analysis **2**, 341 (1992).
- [113] E. Gutkin and C. Judge, Duke Math. J. **103**, 191 (2000).
- [114] Y. B. Vorobets, Russian Math. Surveys **51**, 779 (1996).
- [115] E. Gutkin and C. Judge, Math. Res. Lett. **3**, 391 (1996).
- [116] S. Lelièvre, arXiv:math.GT/0205249 (unpublished).
- [117] E. B. Bogomolny, O. Giraud, and C. Schmit, Comm. Math. Phys. **222**, 327 (2001).
- [118] J. Wiersig, preprint (unpublished).
- [119] A. Eskin, H. Masur, and M. Schmoll, preprint (unpublished).
- [120] M. L. Mehta, *Matrix Theory - Selected Topics and Useful Results* (Les Editions de Physique, Les Ulis, France, 1989).
- [121] *Higher Transcendental Functions*, edited by A. Erdélyi, W. Magnus, F. Oberhettinger, and F. G. Tricomi (McGraw-Hill, Paris - London - New-York, 1953), the Harry Bateman project, Vol. II.
- [122] C. Marcus *et al.*, Phys. Rev. Lett. **69**, 506 (1992).
- [123] C. Marcus, R. Westervelt, P. Hopkins, and A. Gossard, Chaos **3**, 643 (1993).
- [124] M. Keller *et al.*, Surf. Sci. **305**, 501 (1994).
- [125] N. Argaman, Phys. Rev. Lett. **75**, 2750 (1995).
- [126] C. D. Schwieters, J. A. Alford, and J. B. Delos, Phys. Rev. B **54**, 10652 (1996).
- [127] R. Landauer, IBM J. Res. Dev **1**, 223 (1957).
- [128] M. Büttiker, Phys. Rev. Lett. **57**, 1761 (1986).

- [129] J. J. M. Verbaarschot, H. A. Weidenmüller, and M. R. Zirnbauer, Phys. Rep. **129**, 367 (1985).
- [130] C. Mahaux and H. A. Weidenmüller, *Shell-Model Approach to Nuclear Reactions* (North-Holland, Amsterdam, 1969).
- [131] L. D. Landau and E. Lifchitz, *Quantum Mechanics* (Pergamon Press, Oxford - London - Paris, 1958), in Course of Theoretical Physics Vol. III.