

## **1- rapport scientifique depuis le 1<sup>er</sup> janvier 2006**

Le Laboratoire de Physique Théorique et Modèles Statistiques UMR 8626 CNRS Université Paris-Sud 11 a été créé le 1<sup>er</sup> janvier 1998, avec pour vocation le développement de nouvelles thématiques de recherche en physique statistique et en théorie de la matière condensée. La composition du laboratoire et ses domaines d'activité se sont considérablement renouvelés depuis 10 ans. Le laboratoire est actuellement structuré en cinq équipes : "Chaos et Systèmes Quantiques", "Physique Statistique et Théorie des Champs : Systèmes en Basses Dimensions", "Fluides Classiques et Quantiques, Atomes Froids", "Systèmes Désordonnés", "Théorie de la Matière Condensée et Physique Mésoscopique" (voir l'organigramme qui suit pour la composition de chaque équipe).

L'actuel quadriennal 2006-2009 a vu les arrivées de Thierry Jolicoeur (DR), Dmitry Petrov (CR1), Thorsten Emig (CR1) et de Silvio Franz (Professeur). Thierry Jolicoeur a rejoint le laboratoire pour renforcer l'équipe Matière Condensée (en particulier matière condensée des atomes froids). Dmitry Petrov a été recruté en section 04 pour venir épauler le groupe de Gora Shlyapnikov dans l'équipe Fluides Quantiques. Thorsten Emig a été recruté en section 02 en avril 2006 dans l'équipe Systèmes Désordonnés. Il a pris congé du CNRS en septembre 2007 pour une période de trois ans sur un financement Heisenberg Fellowship. Sylvio Franz a été recruté sur un poste de professeur pour venir renforcer l'équipe Systèmes Désordonnés. Il a obtenu à son arrivée à Orsay une chaire d'excellence environnée de l'Université Paris Sud 11.

À l'automne 2008 arriveront au laboratoire deux jeunes théoriciens, Raoul Santachiara (CR2) et Guillaume Roux (Maître de Conférences). Raoul Santachiara est une jeune théoricien spécialiste des théories conformes et des systèmes de basses dimensions. Il devrait naturellement s'insérer dans les équipes Physique Statistique et Fluides Quantiques. Guillaume Roux est un expert en simulation numérique qui viendra épauler les équipes Fluides Quantiques et Matière Condensée.

Coté départ, Paul Zinn-Justin est sur le point de quitter le laboratoire (en stage au LPTHE Jussieu) et Jesper Jacobsen a été promu Professeur à Paris 6 et affecté au LPTENS.

Xavier Campi (DR) et Hubert Krivine (MCF) sont partis à la retraite. Notre collègue Charles Schmit (CR) est décédé en 2006.

En ce qui concerne les ITA, Olivier Brand-Foissac, IR Informatique, qui avait fait l'objet d'un recrutement mutualisé sur les deux laboratoires de Physique Théorique du campus, le LPT et le LPTMS, a travaillé à cheval sur les deux laboratoires jusqu'au recrutement de Vincent Degat (IE informatique) au LPTMS en décembre 2006. Depuis, Olivier Brand-Foissac est affecté à plein temps au LPT. Martine Thouvenot, une des deux secrétaires du laboratoire, rejoint le laboratoire de Mathématiques d'Orsay en septembre 2008 dans le cadre d'une campagne Noemi. Le recrutement par concours externe d'une secrétaire pour la remplacer est en cours, pour une intégration au LPTMS fin 2008.

Le LPTMS demeure depuis sa création un laboratoire attractif à la fois pour des jeunes talents et pour des chercheurs reconnus certains déjà au CNRS ou à l'Université, d'autres arrivant de l'étranger. Il gère et accueille plusieurs réseaux européens, divers ANR, une chaire internationale Blaise Pascal, une chaire d'excellence de l'Université Paris-Sud 11 et une chaire d'excellence sénior du RTRA triangle de la physique. Il fait partie de l'IFRAF (Institut Francilien de Recherche sur les Atomes Froids).

Le nombre de visiteurs, post-doc et thésards continue à croître en conséquence. C'est un signe évident de vitalité et de rayonnement. L'exiguïté des locaux du LPTMS pourrait finir par constituer un frein à la marche en avant du laboratoire.

Suit plus loin un rapport scientifique détaillé sur l'activité de recherche au laboratoire durant les quatre dernières années, où l'on pourra noter la pérennisation de fortes interactions avec des expérimentateurs de la 04 et de la 06.

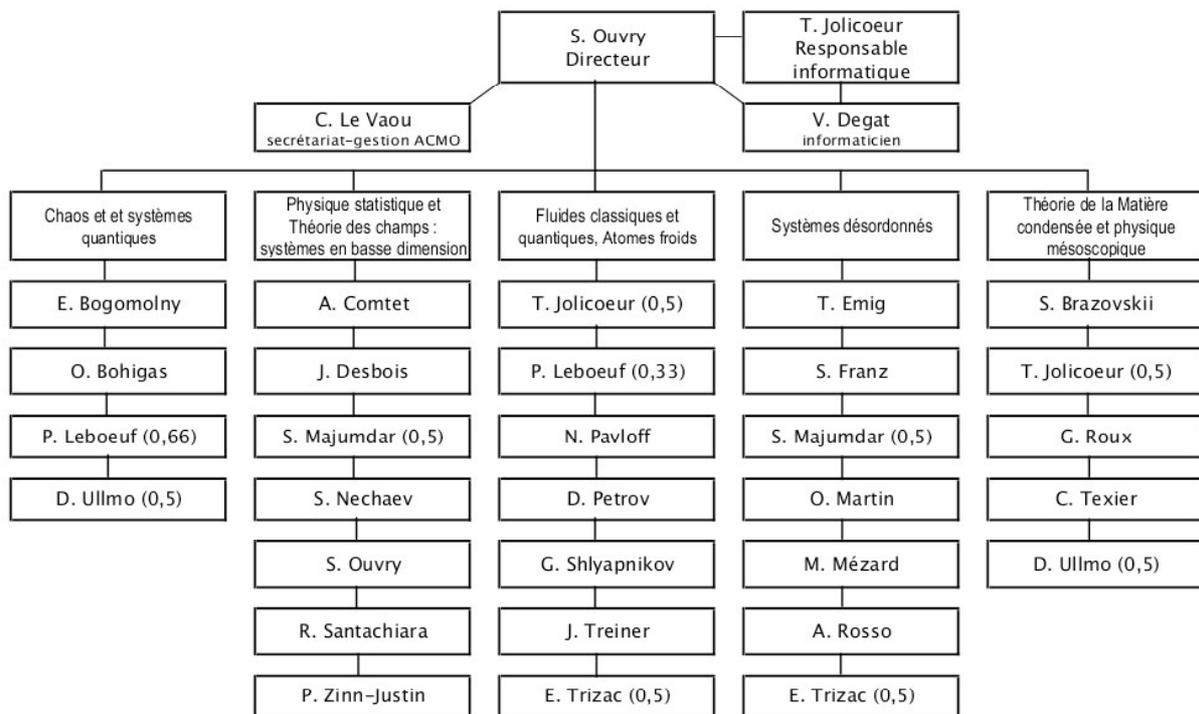
Les crédits récurrents du laboratoire (CNRS et Ministère) sont utilisés pour assurer le bon fonctionnement de base et le renouvellement des équipements de base du laboratoire : missions, invitations, équipement informatique de base, bureautique, petite bibliothèque. Le LPTMS a obtenu de

l'IFRAF deux enveloppes de crédit spécifique pour l'achat d'un cluster de calcul parallèle et pour la rénovation des locaux. Les financements ANR, IFRAF et RTRA assurent un volant important de post-doc et visiteurs.

Liste des évènements importants (prix, distinctions, organisation de manifestations scientifiques...) :  
 Voir les sections correspondantes du rapport quadriennal 2006-2009.  
 Notons toutefois ici même les deux distinctions :

- S. Majumdar : Prix Paul Langevin de la SFP en 2005
- E. Bogomolny : Prix Langevin de l'Institut de France, Académie des Sciences en 2008
- E. Trizac : Membre junior de l'Institut Universitaire de France en 2008.

**ORGANIGRAMME PROBABLE DU LPTMS octobre 2008**



# CHAOS ET SYSTÈMES QUANTIQUES

Ce domaine de recherche trouve son origine au laboratoire dans les travaux effectués, il y a une vingtaine d'années par O. Bohigas, M.-J. Giannoni, et C. Schmit (conjecture BGS). Ils ont été rejoints dans les années 90 par E. Bogomolny, P. Leboeuf et D. Ullmo. Au fil des années, l'activité a évolué vers un spectre assez large d'intérêts, qui vont des aspects plus formels liés à la quantification des systèmes chaotiques et les propriétés des zéros de la fonction de Riemann jusqu'à des travaux en contact étroit avec des expériences. Ces quatre dernières années, la composition de l'équipe a aussi été fortement modifiée, avec une évolution vers d'autres thématiques de certains chercheurs. Les membres de l'équipe sont actuellement O. Bohigas (émérite), E. Bogomolny et P. Leboeuf (1/3). Nous voudrions ici rendre hommage à Charles Schmit, décédé en septembre 2006.

## 1) Fonctions d'onde chaotiques, percolation et SLE

Il y a quelques années, E. Bogomolny et C. Schmit (Phys. Rev. Lett. 92 244102 (2004)) ont effectué une étude originale des propriétés des fonctions d'onde de systèmes chaotiques liées aux lignes nodales. Ces lignes sont des frontières qui séparent des domaines où une fonction d'onde possède un signe positif ou négatif. Pour des systèmes chaotiques, la forme de ces domaines est compliquée. Cependant, un lien inattendu a été trouvé entre ce problème et celui de la percolation critique : les propriétés statistiques des domaines nodaux (le nombre de ces domaines, la distribution de leur surface, etc) sont décrites par la percolation bidimensionnelle critique. Un grand nombre de prédictions non triviales ont ainsi été obtenues et vérifiées par des simulations numériques de fonctions d'ondes chaotiques. Ces résultats ont été généralisés pour des lignes de niveaux, i.e. des courbes où une fonction d'onde a une valeur constante différent de zéro. Dans ce cas, les propriétés statistiques de ces lignes et des domaines correspondants sont liées à la percolation non-critique.

Dans les travaux [ACL162 et ACL225], E. Bogomolny et ses collaborateurs ont continué d'étudier cette thématique. L'article [ACL162] est consacré à la description des lignes nodales des fonctions d'ondes aléatoires et des fonctions propres chaotiques. Dans cet article, E. Bogomolny, C. Schmit et R. Dubertrand ont vérifié une autre prédiction récente du modèle de percolation, selon laquelle les lignes d'interface qui séparent les domaines en percolation sont décrites par les courbes spécifiques de SLE<sub>6</sub>. SLE<sub>6</sub> est une abréviation pour des courbes produites par l'évolution stochastique de Loewner avec le paramètre  $\kappa=6$ . La prédiction implique que les lignes nodales des fonctions d'ondes aléatoires devraient avoir la même propriété. Pour confirmer ce résultat, les auteurs ont calculé numériquement quelques milliers de courbes nodales de fonctions d'onde aléatoires. Ensuite, ils les ont transformées pour trouver les fonctions de forçage en formalisme de Loewner. Finalement, ils ont vérifié que ces fonctions de forçage sont bien décrites par le mouvement Brownien avec la variance prédite par SLE<sub>6</sub>. L'utilisation d'une variante de SLE, dénommée SLE dipolaire, permet de diminuer considérablement les erreurs liées aux effets de taille finie. Ce résultat donne une confirmation indépendante de la conjecture à-propos des liens entre les lignes nodales des fonctions d'ondes aléatoires et la percolation critique. Une des difficultés qu'on rencontre en essayant de prouver rigoureusement cette conjecture est la suivante. En percolation standard, on assume l'absence de corrélations entre les valeurs des concentrations dans des points différents. Mais pour les fonctions d'onde aléatoires cette corrélation existe et décroît assez lentement. Dans l'article [ACL225], Bogomolny et Schmit ont démontré que, malgré cette décroissance lente, l'utilisation attentive du critère de Harris permet de prouver que les lignes nodales des fonctions aléatoires sont dans la même classe d'universalité que la percolation critique non corrélée. Un autre résultat de cet article est une démonstration que les lignes de niveau pour les fonctions aléatoires sont bien décrites par la percolation non critique.

## 2) Chaos quantique et arithmétique

Il s'agit d'une activité déjà bien affirmée dans l'équipe, comme témoigne la participation régulière à des conférences et workshops. Elle trouve sa source dans l'interprétation dynamique donnée aux propriétés de la fonction zêta de Riemann et d'autres fonctions L de Dirichlet. Également, certains problèmes arithmétiques de comptage sur un réseau ("circle problem", problème de diviseurs de Dirichlet) ont une interprétation dynamique. Parfois, les physiciens ne font que réinterpréter des problèmes pour réobtenir des résultats déjà connus des mathématiciens. Dans d'autres cas, ils

obtiennent par des méthodes heuristiques ou non rigoureuses des résultats nouveaux, inconnus des mathématiciens, difficilement acceptés par eux comme établis mais qui ont souvent servi de base à des démonstrations rigoureuses. En tout état de cause, des rencontres et des programmes communs très actifs indiquent qu'il s'agit d'un domaine où les deux communautés trouvent intérêt à collaborer.

### Fluctuations des zéros de la fonction zêta de Riemann

Il s'agit de comprendre les fluctuations des zéros complexes de la fonction zêta de Riemann (situés, d'après la conjecture de Riemann, sur la droite critique  $s = \frac{1}{2} + iE$ ). Les techniques utilisées sont, d'une part, la formule de la densité de zéros écrite comme une somme sur les nombres premiers (analogue (exact) de la formule des traces dans la théorie des systèmes dynamiques) et, d'autre part, la théorie des matrices aléatoires. Ce domaine a été en bonne partie articulé par l'énoncé de conjectures d'universalité (conjecture de Montgomery-Odlyzko). Cette dernière affirme que les propriétés statistiques des zéros complexes tendent, dans la limite  $E \rightarrow \infty$ , vers celles d'un ensemble unitaire de matrices aléatoires de dimension  $N$  infinie.

Quand le paramètre  $E$  est grand mais fini, on observe des écarts par rapport au résultat asymptotique de la théorie des matrices aléatoires. Une question très intéressante qui se pose concerne la nature de ces écarts. Ont-ils, eux aussi, un certain degré d'universalité ? Dans la Réf. [ACL152], Bogomolny, Bohigas, Leboeuf et Monastera ont montré que, à l'ordre dominant, ces écarts étaient les mêmes que ceux observés dans les ensembles unitaires de matrices aléatoires, à condition d'identifier la taille de la matrice  $N$  et la position  $E$  sur la ligne critique à travers la relation  $N = \log(E/2) / c$ , où  $c = 18.87768\dots$  est une constante explicitement calculée. Ce résultat, en partie inespéré, définit un domaine d'application plus vaste de la conjecture d'universalité, qui pourrait être valable pour les systèmes dynamiques.

Un article de revue sur les liens entre le chaos quantique et la fonction zêta de Riemann a été rédigé par Bogomolny [ACL198].

## **3) Extensions et généralisations de la théorie des matrices aléatoires**

### Statistiques d'ensembles incomplets

Les propriétés statistiques d'une séquence de variables aléatoires obtenues en enlevant au hasard une fraction donnée de ses éléments ont été déterminées (Bohigas, Pato [ACL132]). Ce problème apparaît, par exemple, quand on veut estimer la fraction de niveaux non détectés dans une séquence de résonances du noyau composé. Le formalisme a été appliqué à l'étude de la transition i) d'un spectre type matrices aléatoires à un spectre Poissonien, ii) du spectre type peigne de Dirac à un spectre Poissonien. Le formalisme des déterminants de Fredholm de la théorie de matrices aléatoires s'étend naturellement pour décrire la situation considérée.

### Matrices de distance

On se donne  $N$  points tirés au hasard sur un espace métrique et on construit une matrice  $M$  (matrice de distances) dont les éléments sont les distances entre ces points. Dans un travail précédent, Bogomolny, Bohigas et Schmit ont étudié les propriétés statistiques des valeurs propres d'un ensemble de matrices  $M$  généré en tirant les  $N$  points au hasard dans un espace donné (euclidien ou sphérique). Ils ont constaté que toutes les valeurs propres de  $M$  (sauf une, Perron-Frobenius) sont négatives ou nulles. Ils ont examiné ce phénomène en détail [ACL284]. Rassemblant en bonne partie des résultats anciens et inconnus des physiciens, ils ont fait le lien entre cette question et le problème du plongement isométrique: déterminer les conditions nécessaires et suffisantes pour que les points correspondants à une matrice de distances donnée puissent être plongés, en conservant les distances, dans l'espace euclidien. Ceci conduit à l'introduction de la notion de matrices de type négatif, qui ont au plus une valeur propre positive. Il se trouve que les matrices de distance de points dans un espace euclidien ou sphérique sont des matrices de type négatif, ce qui explique le phénomène observé. Ils ont donné aussi quelques extensions des résultats précédents à des situations plus générales.

## Nouveaux ensembles de matrices aléatoires avec des distributions larges

Les ensembles 'classiques' (Wigner Dyson) peuvent être dérivés en utilisant la théorie de l'information (information de Shannon). Dans un travail précédent, des généralisations en utilisant l'information de Tsallis-Renyi ont été faites. Elles conduisent à des ensembles avec des propriétés nouvelles (distribution larges) qui contiennent comme cas particulier les ensembles de matrices de Lévy. Plus récemment Bohigas, de Carvalho et Pato [ACL244] ont montré que ce type d'ensemble, désigné 'ensemble désordonné', peut être obtenu en divisant une matrice aléatoire de l'ensemble gaussien par une variable aléatoire dûment distribuée. L'invariance orthogonale est préservée mais on perd les propriétés d'ergodicité. Un procédé similaire appliqué aux graphes aléatoires permet d'interpoler entre les graphes de Erdős-Renyi et les graphes 'scale free'.

### **4) Distribution de valeurs extrêmes et matrices aléatoires**

La distribution du maximum (minimum) d'une séquence de variables aléatoires i.i.d. est bien connue depuis longtemps et conduit à trois distributions possibles, Gumbel, Fréchet, Weibull selon les caractéristiques de la distribution originale. Par contre, peu de résultats sont connus quand les variables sont corrélées. La situation a en bonne partie changé depuis la découverte vers le milieu des années '90 par Tracy-Widom de la distribution de la plus grande (petite) valeur propre d'une matrice aléatoire de type Wigner-Dyson. On a aussi mis en évidence que cette distribution à un degré d'universalité considérable, seulement partiellement comprise.

La distribution de Tracy-Widom décrit des fluctuations typiques (petites,  $O(N^{-1/6})$ ) autour de la moyenne (le bord du demi-cercle de Wigner). Dean et Majumdar [ACL149] se sont intéressés aux grandes déviations (de l'ordre de l'intervalle du spectre,  $O(N^{1/2})$ ). En utilisant la formulation du gaz Coulombien pour la densité jointe de valeurs propres et des méthodes d'intégration fonctionnelle ils ont résolu complètement ce problème. La connaissance de la solution générale de certains types d'équations intégrales (équation de Tricomi) joue un rôle central. La distribution des grandes déviations à droite rejoint la distribution, à gauche, de Tracy-Widom. Ils obtiennent, par exemple, une expression explicite pour la probabilité pour que toutes les valeurs propres soient négatives (positives). Elle est exponentiellement petite en  $N^2$  ( $N$ , dimension de la matrice), en contraste avec  $N$  qui serait le comportement sans corrélations des valeurs propres.

Vivo, Majumdar et Bohigas [ACL178, ACT18] ont étendu les résultats précédents au cas des matrices définies positives de Wishart en utilisant des méthodes similaires. Dans ce cas l'équivalent du demi-cercle de Wigner est la distribution de Marcenko-Pastur, la plus grande valeur propre suit aussi une distribution de Tracy-Widom, décrivant les petites fluctuations ( $O(N^{1/3})$ ) de la plus grande valeur propre et la distribution des grandes déviations ( $O(N)$ ) est calculée. Encore une fois, les grandes déviations et Tracy-Widom se rejoignent.

Certains des résultats précédents peuvent être utilisés pour étudier quelques problèmes d'intrication quantique (Majumdar, Bohigas, Lakshminarayan [AC245]). Ils considèrent un système bipartite,  $A$  et  $B$  (même dimension de  $A$  et de  $B$ ), la matrice densité réduite du sous-système  $A$  et les propriétés d'intrication d'un état pur aléatoire. Ils déterminent exactement la distribution de la plus petite valeur propre de la matrice densité réduite pour tout  $N$ . Le résultat confirme des conjectures très partielles existant dans la littérature. Il est à signaler que les propriétés de la plus petite valeur propre donne des informations sur la nature de l'intrication ainsi que sur la possible réduction dimensionnelle de l'espace de Hilbert.

Lakshminarayan, Tomsovic, Bohigas, Majumdar [ACL242] se sont intéressés à la détermination de la distribution du maximum (minimum) d'intensité d'un vecteur propre de l'ensemble Gaussien (ou circulaire) de matrices aléatoire pour  $N$  fini. Les variables sont (faiblement) corrélées à cause de la normalisation et l'approche de l'asymptotique (Gumbel pour le maximum, Weibull pour le minimum) est établi. Ils ont comparé les résultats à ceux provenant de vecteurs propres de l'application de Chirikov en régime chaotique, qui est bien décrite par les matrices aléatoires.

### **5) Gaz fermioniques**

L'étude des propriétés de gaz fermioniques finis reste un des axes importants dans cette période. Une motivation expérimentale additionnelle vient des progrès spectaculaires réalisés dans le confinement et refroidissement de gaz atomiques fermioniques dans des pièges magnétiques. Même si certains de ces résultats sont évoqués dans la partie « gaz quantiques », nous incluons ici ceux dont l'approche s'apparente de manière assez naturelle avec les thématiques du groupe chaos et systèmes quantiques.

### Masses nucléaires

Quand on compare les modèles de masses nucléaires les plus performants aux données expérimentales, on remarque un écart de l'ordre de 500 keV, avec une certaine dépendance avec le nombre de nucléons. Le fait que cet écart soit relativement indépendant du modèle suggère la possibilité d'un mécanisme physique sous-jacent assez fondamental. Bohigas et Leboeuf ont suggéré que cet écart pourrait être dû à la présence de chaos dans le mouvement des nucléons. La sensibilité de cette contribution aux détails du Hamiltonien rendrait son calcul très difficile, d'où l'accord avec les erreurs des modèles théoriques. L'estimation obtenue, ainsi que sa dépendance en nombre de nucléons, est en parfait accord avec les écarts observés. Une confirmation plus récente de cette interprétation vient de l'analyse plus détaillée des propriétés statistiques des écarts (Olofsson, Åberg, Bohigas, Leboeuf, [ACL78]). En effet, la théorie prédit que la contribution des zones chaotiques ne se comporte pas comme du bruit blanc, mais qu'ils existent des corrélations entre des noyaux voisins. La fonction de corrélation calculée est en parfait accord avec les données observées. La nécessité de prédictions précises pour les masses des noyaux dans les différentes applications (astrophysique, nucléosynthèse, unitarité matrice CKM, etc) place ce résultat au centre d'un effort actuel dans cette direction. La connexion établie dans ces travaux donne une vue plutôt pessimiste sur le potentiel des prédictions théoriques. Les conséquences de ces travaux ont été discutés, notamment, lors d'une conférence récente sur ce sujet (Mass Olympics, Trento, Mai 2008).

### Densité de niveaux du problème à N-corps

Les formules de traces (Gutzwiller, Balian-Bloch) jouent un rôle central dans la compréhension des fluctuations spectrales et des liens avec la théorie des matrices aléatoires. Or ces formules s'appliquent à la dynamique d'une particule individuelle. Le problème se pose du calcul de la densité de niveaux, et en particulier de leurs fluctuations, dans un système à N-corps. En se basant sur un modèle de gaz de Fermi, Leboeuf, Monastra et Relaño [ACL11] ont pu, d'une part, améliorer les prédictions de type Bethe pour la partie lisse de la densité. D'autre part, pour la première fois, une théorie explicite de la partie fluctuante a été développée, qui décrit leur dépendance en nombre de particules et en énergie d'excitation (dans le régime de gaz dégénéré). Elle est basée sur la transformée de Laplace inverse de la fonction de partition, et un calcul précis de l'approximation de phase stationnaire. Une adaptation de la théorie au cas nucléaire a été faite par Leboeuf et Roccia [ACL125]. Leurs prédictions sont en très bon accord avec les résultats expérimentaux disponibles autour du seuil des neutrons pour les noyaux atomiques, avec une erreur relative de l'ordre de  $10^{-1}$ . Ils expliquent aussi les différences observées entre les variations en nombre de particules et en énergie d'excitation.

*Cas des bosons* : La densité d'état a aussi été étudiée pour le cas d'un gaz de bosons piégés par un potentiel arbitraire. Le problème général consiste à calculer la densité d'états à énergie d'excitation  $E$  pour un gaz de  $N$  particules. Dans le régime de gaz dégénéré, où  $N \rightarrow \infty$  à  $E$  fixé, la densité croît comme l'exponentielle d'une puissance de l'énergie. A l'opposé, dans le régime « classique » (ou de Boltzmann)  $E \rightarrow \infty$  à  $N$  fixé, elle croît comme une loi de puissance. Nous avons étudié le début de la transition entre ces deux régimes, quand on l'approche du côté dégénéré. Ce calcul permet de dériver la distribution du nombre de particules excitées d'un état d'énergie  $E$  (chaque état d'énergie  $E$  est réalisé par un grand nombre de configurations différentes du gaz. Chacune de ces configurations possède un nombre de particules excitées spécifique. Nous étudions la distribution de ce nombre parmi toutes les configurations d'énergie  $E$ ). Comtet, Leboeuf et Majumdar [ACL171] ont montré comment dans la limite  $N$  grand, cette distribution approche une parmi trois distributions limites possibles, Gumbel, Weibull et Fréchet, qui coïncident avec les trois distributions limites de la théorie des fluctuations de valeurs extrêmes. La distribution limite vers laquelle on converge dépend de la manière comment croît en énergie le spectre de particule indépendante.

Pour les deux cas étudiés (fermions ou bosons), le problème du calcul de la densité d'états d'un gaz piégé par un potentiel arbitraire constitue une généralisation du problème de combinatoire classique de partition des nombres entiers en sommes d'entiers. De nombreux contacts et généralisations ont été établis par rapport aux résultats connus en théorie des nombres, notamment autour de la formule de Hardy-Ramanujan et de ses variantes.

### Théorie BCS de la supraconductivité

D'après le critère avancé par P. W. Anderson, on s'attend à ce que la supraconductivité d'une particule métallique disparaisse quand sa taille diminue. Cela arrive quand le gap superconducteur devient comparable à l'espacement moyen entre les niveaux électroniques. La validité de ce critère a été vérifiée qualitativement dans les années '90. Au fur et à mesure que la taille diminue, et avant la disparition du gap, on s'attend à voir un autre phénomène. La taille du gap devrait varier et, en particulier, fluctuer quand la taille ou la forme de la particule varient. Ces fluctuations sont observées, notamment, dans les noyaux atomiques (malheureusement dans le cas des particules métalliques on ne dispose pas de données expérimentales systématiques). Une prédiction basée sur la théorie des matrices aléatoires de la taille typique de ces fluctuations pour les systèmes chaotiques a été faite par Matveev et Larkin. Olofsson, Åberg et Leboeuf [ACL243] ont développé une théorie des fluctuations du gap pour les systèmes intégrables et chaotiques. Elle permet d'estimer la taille typique des fluctuations, mais aussi de calculer leur variation avec les différents paramètres (incidence, le calcul montre que pour les systèmes chaotiques l'approximation par la théorie des matrices aléatoires n'est pas forcément correcte). Un très bon accord avec les données expérimentales disponibles est obtenu. Des prédictions explicites pour différents systèmes (particules métalliques, gaz d'atomes froids, noyaux atomiques) ont été faites.

## **6) Micro lasers diélectriques**

Les publications [ACL199, ACL200 et ACL249] sont consacrées à l'étude d'un sujet nouveau pour notre groupe, l'approximation semi classique pour des cavités diélectriques de forme diverses. L'importance de cette thématique est liée, en grande partie, à la possibilité d'utiliser ces cavités comme les résonateurs de micro lasers et d'observer expérimentalement l'émission de lumière de ces cavités. Dans l'article [ACL199], écrit par E. Bogomolny, C. Schmit et M. Leubenthal en collaboration avec l'équipe des expérimentateurs de l'ENS Cachan, J.-S. Lauret et J. Zyss, les auteurs ont étudié expérimentalement et théoriquement la direction d'émission de micro lasers diélectriques en forme de stade. Le résultat expérimental intéressant est le fait que les cavités chaotiques en forme de stade émettent assez bien et que l'on peut trouver expérimentalement la dépendance de la direction d'émission à partir de la forme géométrique de la cavité. La partie théorique principale de ce travail a été l'interprétation de ces résultats. Les auteurs ont montré que les simulations numériques de propagation de rayons purement classiques reproduisent bien la courbe expérimentale. Ils ont développé un modèle simple de lentille qui a permis d'expliquer pratiquement tous les détails des observations expérimentales. C'est la première fois qu'on réussit à faire des prédictions analytiques pour un modèle chaotique. Le calcul numérique quantique est en bon accord avec les résultats analytiques.

L'article [ACL200] est une prolongation de la collaboration entre les théoriciens de notre laboratoire et les expérimentateurs de l'ENS Cachan. Le résultat central de cet article est la démonstration expérimentale de la possibilité de calculer, à partir du spectre expérimental, les orbites périodiques classiques sous-jacentes qui déterminent le spectre d'émission. Les auteurs de ce travail ont démontré l'importance de tenir en compte les différentes sources de dispersion d'index effectif pour la détermination correcte des longueurs des orbites périodiques. Plusieurs modèles théoriques ont été ensuite étudiés et l'existence des orbites périodiques dominantes a été démontrée. En particulier, la formation de structures, dites super cicatrices, dans les fonctions propres de résonances en cavités diélectriques polygonales a été discutée en détail.

La cavité circulaire est le seul exemple connu d'une cavité diélectrique intégrable. Les cavités d'autres formes demandent des calculs numériques assez difficiles. Les auteurs de l'article [ACL249] ont construit la théorie spécifique de perturbations qui permet d'obtenir le spectre de résonances et leurs fonctions propres pour de petites déformations d'une cavité circulaire. Les résultats ont été vérifiés pour une cavité diélectrique en forme de disque coupé, qui est importante d'un point de vue

expérimental, et un bon accord a été trouvé entre les prédictions théoriques, les calculs numériques et les mesures expérimentales.

# PHYSIQUE STATISTIQUE ET THÉORIE DES CHAMPS : SYSTÈMES EN BASSE DIMENSION

## 1) Statistiques d'extrêmes de variables aléatoires corrélées

L'étude de la distribution du minimum ou du maximum d'un ensemble de variables aléatoires corrélées est un problème important qui intervient dans de nombreux contextes, problèmes d'optimisation, systèmes désordonnés, théorie des nombres etc. Il est intéressant de disposer de modèles solubles d'intérêt physique permettant d'élucider le rôle des corrélations sur la distribution limite.

### Fluctuations d'interfaces

Les interfaces qui apparaissent dans de nombreux systèmes naturels constituent des exemples de systèmes hors d'équilibre d'intérêt physique. Les parois de domaines dans les systèmes magnétiques ou encore les chaînes dipolaires dans les ferrofluides peuvent être modélisées comme des interfaces de type Edwards-Wilkinson. Dans ce contexte une observable pertinente est la fluctuation relative  $H(x,t)$  de l'interface par rapport à sa position moyenne. L'étude de la distribution de probabilité de la fluctuation maximale spatiale a fait dans le passé l'objet de plusieurs travaux numériques. Lorsque l'interface est dans un état stationnaire d'équilibre, Majumdar et Comtet [ACL30] ont montré comment calculer analytiquement la distribution correspondante. Leur résultat fait apparaître des relations intéressantes avec certaines fonctionnelles du mouvement Brownien, notamment celle qui décrit l'aire sous une excursion Brownienne. Le cas des méandres Browniens, discuté pour la première fois dans ce travail a attiré l'attention de certains probabilistes.

Ce travail fournit ainsi un exemple soluble d'une distribution d'extrêmes, appelée distribution d'Airy, qui n'appartient pas à l'une des trois classes d'universalité classiques (Gumbel, Weibul et Fréchet). Cette distribution apparaît dans d'autres contextes, notamment en informatique théorique et aussi en théorie des graphes. Dans le contexte des interfaces, Majumdar et Schehr [ACL98] ont montré qu'elle n'est pas spécifique à la dynamique de type Edwards Wilkinson mais qu'elle apparaît dans une large classe de modèles "solide sur solide". Dans plusieurs modèles sur réseaux, on retrouve la distribution d'Airy dans une certaine limite d'échelle et pour certains types de conditions aux limites. La relation avec des problèmes de premier passage a été étudiée par Kearney et Majumdar [ACL14].

Les fonctionnelles Browniennes qui apparaissent dans le contexte des interfaces peuvent être étudiées par des techniques d'intégrale de chemin. Une extension de ces travaux à d'autres fonctionnelles apparaissant dans un contexte algorithmique, par exemple celui de la recherche du maximum d'une marche aléatoire symétrique, est en cours d'étude (Majumdar, Comtet, Randon-Furling).

L'étude des statistiques d'extrêmes ne se limite pas à celle de la distribution du maximum. En particulier il est intéressant de déterminer si le maximum est isolé ou bien s'il y a d'autres minima locaux voisins. Dans ce but, Majumdar et Sabhapandit [ACL193] ont calculé la densité d'état au voisinage du maximum et montré que, dans le cas de variables aléatoires iid, cette densité d'état converge vers une distribution limite qui ne dépend que de la queue de la distribution de la probabilité initiale. Ce modèle reproduit de façon satisfaisante certaines données sur les fluctuations de température terrestre observées pendant la période paléolithique.

### Statistiques d'extrêmes dans le gaz de Bose et les partitions d'entiers

Un des problèmes centraux de la physique statistique à l'équilibre est de déterminer le nombre de total de configurations d'énergie fixée (ensemble micro canonique). Ce problème a un lien évident avec le problème classique de théorie des nombres qui consiste à dénombrer le nombre total de partitions d'un entier. Cette analogie a été exploitée avec profit par Temperley et d'autres auteurs pour retrouver les asymptotiques des partitions d'entiers découvertes par Hardy et Ramanujan au début du siècle dernier.

Il est intéressant d'aller au-delà en partant d'un modèle de Bosons indépendants décrit par une densité d'état à un corps et en calculant la densité d'état du problème à  $N$  corps. Comtet, Leboeuf et Majumdar [ACL171] ont montré que, pour une certaine énergie d'excitation, la distribution du

nombre de particules excitées est donnée par l'une des trois distributions d'extrêmes : Gumbel, Weibull ou Fréchet. Elle ne dépend que de l'exposant qui décrit le comportement asymptotique de la densité d'état à un corps.

Le cas des partitions avec différence minimale  $p$  a été aussi étudié. Cela revient à considérer des gaz de particules avec statistiques d'exclusion, lesquelles fournissent une interpolation possible entre Bosons et Fermions. Une interprétation combinatoire nouvelle des statistiques d'exclusion en termes de  $p$  partitions a ainsi été proposée par Comtet, Majumdar et Ouvry [ACL215] (ce qui permet entre autres de généraliser [ACL171] au cas des statistiques fermioniques) et la forme limite des tableaux de Young correspondants a été déterminée par deux méthodes différentes (Comtet, Majumdar, Ouvry, Sabhapandit, [ACL216], et Comtet, Majumdar, Sabhapandit, [ACL253]).

### Statistiques d'extrêmes dans le gaz de Jespen

Le gaz de Jespen est un modèle unidimensionnel constitué de  $N$  particules identiques effectuant des collisions binaires élastiques. La dynamique se ramène donc à un échange des vitesses des particules entrant en collision. En partant de conditions initiales dans lesquelles les vitesses sont des variables aléatoires iid, Bena et Majumdar [ACL184] ont analysé la statistique des vitesses de la particule située à l'extrémité droite du système. À grand temps, le système est dans un état stationnaire et la distribution est donnée par l'une des trois lois d'extrêmes. En revanche, dans la phase initiale d'expansion du gaz, le problème est beaucoup plus subtil à cause de l'effet des collisions. Bena et Majumdar ont montré que la distribution des vitesses est alors donnée par des lois d'extrêmes de nature différente. Une extension de ce travail (Majumdar, Sabhapandit et Bena) a permis de calculer la distribution d'autres observables telles que le nombre de collisions et le temps d'équilibration dynamique.

Signalons que ce modèle intervient aussi dans le contexte de la dynamique des populations. Cette dynamique révèle une alternance de périodes actives et inactives dont la statistique a été étudiée par Sire, Majumdar et Dean [ACL134]. La statistique du nombre de changements du génotype dominant a été calculée et comparée à des résultats numériques récents.

### Matrices et polynômes aléatoires

Une des avancées récentes les plus spectaculaires de la théorie des matrices aléatoires a été la découverte par Tracy et Widom de distributions limites pour la plus grande valeur propre de matrices appartenant aux ensembles de Dyson. L'objectif des travaux décrits ci-dessous est d'étudier les fluctuations spectrales en bord de spectre en se plaçant dans une limite d'échelle différente. La distribution de Tracy-Widom décrit en effet de petites fluctuations d'ordre  $[N^{-1/6}]$  autour de la valeur propre maximale. Il est important d'étendre ce résultat à un régime de grandes fluctuations. Dean et Majumdar [ACL149, ACL255] ont résolu cette question dans les trois ensembles gaussiens classiques ( $b=1,2,4$ ). La distribution limite obtenue fait intervenir une fonction de grande déviation qui exhibe plusieurs propriétés remarquables : d'une part elle interpole correctement avec la queue (gauche) de la distribution de Tracy-Widom, mais elle permet aussi de répondre à des questions de nature différente, notamment celle de calculer la probabilité que toutes les valeurs propres soient négatives.

Ces travaux ont été étendus récemment à d'autres ensembles de matrices aléatoires par Vivo, Majumdar et Bohigas [ACL178]. Une méthode analogue leur a permis de calculer exactement la fonction de grande déviation de la plus grande valeur propre dans les ensembles de Wishart. Ces ensembles jouent un rôle important en statistique et interviennent aussi dans des problèmes d'intrication quantique (Majumdar, Bohigas et Lakshminarayan, [ACL245]).

L'étude des propriétés statistiques des zéros de polynômes aléatoires intervient dans le contexte de la théorie des probabilités, de la théorie des nombres et aussi dans celui du chaos quantique. Schehr et Majumdar [ACL219] ont étudié les propriétés statistiques des zéros réels de certaines classes de polynômes aléatoires, notamment les polynômes de Weyl. Ils ont calculé la probabilité qu'il n'y ait pas de zéros dans un certain intervalle et mis en évidence des relations remarquables avec le problème de la persistance pour l'équation de diffusion en dimension  $d$ .

## 2) Modèles de croissance, appariement de séquences biologiques, pavages, matrices et marches aléatoires

### Appariements aléatoires

La distribution de Tracy-Widom, initialement apparue dans le contexte des matrices aléatoires, intervient également dans des problèmes inspirés par la génomique. Pour déterminer si deux séquences biologiques sont proches on utilise souvent des algorithmes d'alignement. Un des algorithmes classiques consiste à rechercher la plus longue séquence biologique commune entre deux paires de séquences. Le cas de séquences complètement aléatoires constituées d'un certain nombre de paires de base n'est toujours pas résolu. Majumdar et Nechaev [ACL46] ont étudié une variante de ce modèle « l'appariement de Bernoulli » et montré que la distribution de la plus longue paire est, dans une certaine limite d'échelle, donnée par la loi de Tracy-Widom associée à l'ensemble GUE. Par la suite, Majumdar, Mallick et Nechaev [ACL241] ont établi une correspondance entre ce modèle et le modèle à 5-vertex, modèle non trivial de mécanique statistique introduit par Baxter qui peut être étudié par des techniques d'Ansatz de Bethe.

### Modèles de déposition balistique : fluctuations de hauteur et minima locaux.

Ces modèles visent à décrire certains processus de croissance qui apparaissent dans certains systèmes physiques tels que la croissance d'une surface par déposition balistique d'objets obéissant à certaines contraintes stériques. Majumdar et Nechaev ont construit un modèle de déposition balistique qui peut être mis en correspondance biunivoque avec un des modèles d'appariement décrit dans le paragraphe précédent. En partant d'une condition initiale aléatoire, ils montrent que les fluctuations de hauteur de la surface font intervenir la distribution de Tracy-Widom.

D'autres aspects de ces modèles de croissance ont été étudiés par Nechaev, Hivert, Oshanin, et Vasilyev [ACL165]. Ces derniers ont réussi à calculer exactement la distribution de probabilité de minima locaux dans le cas d'un modèle unidimensionnel en utilisant une correspondance avec un modèle de permutations aléatoires. Le cas à deux dimensions, plus compliqué, est en relation avec des modèles de permutations avec corrélations de longue portée. Ce travail a permis de calculer la fonction de corrélation entre deux minima locaux consécutifs.

La statistique du nombre de minima locaux dans un environnement aléatoire a également été étudiée par Majumdar et Martin [ACL156] en partant d'une version discrétisée sur réseau ou bien sur un arbre. Le cas d'un arbre de Cayley a pu être étudié de façon entièrement analytique.

### Marches aléatoires, temps de premier passage, temps d'occupation et persistance

L'étude des marches aléatoires continue à susciter de nouvelles questions.

La convergence vers la limite continue est considérée comme bien comprise. En revanche les corrections de taille finie, souvent considérées comme non universelles et donc modèles dépendantes, sont plus difficiles à contrôler. Comtet et Majumdar [ACL26] ont étudié la distribution du maximum de la somme de  $N$  variables aléatoires iid et produit une formule explicite donnant la première correction dans un développement asymptotique en  $N$ . Cette formule qui peut être obtenue à partir des résultats généraux de Spitzer permet de reproduire comme un cas particulier les résultats récents de Flajolet et Coffmann. Par la suite Majumdar, Comtet et Ziff [ACL89, ACL183] ont découvert que ce problème se rattachait à un problème physique intéressant et a priori non relié qui est celui du calcul de la longueur de Milne. Il s'agit de déterminer, en fonction du libre parcours moyen, le flux de particules absorbées par une sphère 2D plongée dans un gaz de particules diffusantes. La solution numérique de ce problème, obtenue par R. Ziff il y a une quinzaine d'années, a pu ainsi être analysée et étendue à d'autres observables par des techniques de Wiener-Hopf.

La distribution jointe du temps de premier passage et du maximum intervient dans des problèmes de file d'attente et de mathématiques financières. Le cas d'une marche aléatoire ou d'un mouvement brownien « avec contrainte » est tout à fait non trivial. Dans le cas de ponts, de méandres, ou d'excursions Browniennes plusieurs expressions nouvelles ont été obtenues récemment par Randon Furling et Majumdar [ACL223] et Majumdar, Kearney, Randon Furling et Yor. Une confrontation de leurs résultats avec ceux de la littérature probabiliste conduit à de nouvelles identités remarquables.

La distribution du temps passé par le mouvement Brownien dans un domaine compact a donné lieu à de nombreux travaux dans la littérature physique et mathématique. Dans le cas non compact, le problème est entièrement ouvert. Le cas du mouvement Brownien planaire dans le premier quadrant est un cas particulier intéressant. Desbois [ACL172] a réussi à calculer de façon systématique les premiers moments de la distribution pour un secteur angulaire d'angle quelconque. Le résultat obtenu pour le troisième moment, qui diffère de celui donné dans la littérature probabiliste, a été corroboré par des simulations numériques. Desbois a également obtenu une formule générale donnant le second moment du temps d'occupation dans un orthant en dimension quelconque.

Les propriétés fractales et les dimensions de Hausdorff de marches aléatoires sur un réseau carré plan ainsi que leurs secteurs d'enroulement ont été étudiés numériquement par Desbois et Ouvry [ACL313]. Il est constaté numériquement que les dimensions fractales de secteurs d'enroulement donnés sont identiques à celles de la marche elle-même, ce qui, avec d'autres propriétés similaires, semblent indiquer qu'un secteur d'enroulement donné se comporte comme une marche complète. Il a aussi été proposé une nouvelle définition du périmètre orienté d'une courbe Brownienne fermée qui prend en compte les excursions à l'intérieur de la courbe autour des secteurs d'enroulement nul connectés à l'extérieur (fjords). Les simulations numériques indiquent que la dimension du périmètre ainsi défini reste égale à  $4/3$ , comme pour le périmètre géométrique usuel. Si on tient compte en outre des secteurs d'enroulement nul à l'intérieur de la marche (les lacs), la dimension devient  $7/4$ . En ce qui concerne la percolation sur réseau carré, une étude similaire donne pour la frontière extérieure de l'amas de percolation  $4/3$ . Si on tient compte des fjords non percolant, elle passe à  $7/4$ , et enfin si on inclue les lacs non percolants, elle passe à une valeur très proche de  $91/48$ , qui est connue comme étant la dimension de l'objet lui-même : on trouve donc que l'amas de percolation est poreux au point que sa dimension est la même que celle de sa frontière.

L'étude de la persistance dans les systèmes hors d'équilibre continue à susciter de l'intérêt tant sur le plan conceptuel qu'expérimental. Citons notamment les travaux de Majumdar et Das [ACL16] sur la persistance dans des problèmes d'interfaces fluctuantes et ceux de Bhattacharya, Das et Majumdar [ACL220] sur la persistance de polymères de Rouse.

Jacobsen [ACL228] a récemment développé un nouvel algorithme pour l'énumération exacte de marches hamiltoniennes en 2D et 3D. Il a ensuite présenté un algorithme de type « Monte-Carlo-Chaîne de Markov » pour l'échantillonnage efficace de marches hamiltoniennes 3D.

#### Pavages aléatoires et modèles avec espace cible non compact

Jacobsen et collaborateurs ont étudié plusieurs problèmes de pavage du plan dans lesquels l'existence d'un modèle de hauteurs permet de déduire les exposants critiques. Dans deux collaborations (Alet, Misguich, Mila, Troyet, [ACL27]) puis (Alet, Ikhlef, Misguich et Pasquier, [ACL136]), il a généralisé le pavage classique des dimères en introduisant une nouvelle interaction qui tend à aligner les dimères autour d'une face. Cette interaction, motivée par un modèle quantique de dimères résonants, mène à une phase critique qui se termine dans une transition de Kosterlitz Thouless. Toujours avec Alet, Misguich et Pasquier [ACL114] il a étudié numériquement le même problème en 3D et trouvé un scénario similaire avec une phase dite de Coulomb qui se termine dans une transition d'un nouveau type.

Jacobsen a également étudié de nouveaux problèmes de pavage, soit par des triominos linéaires (avec Dhar et Ghosh, [ACL164]), soit par des tétraminos en forme de T [ACL163].

Dans les modèles précédents, la théorie des champs qui décrit la limite continue a un espace cible compact (typiquement bosonique), ce qui mène à un spectre discret d'exposants critiques. Il est possible d'obtenir un espace cible non compact, et donc un spectre continu d'exposants, en introduisant soit des supersymétries (modèle sigma) soit de la non-unitarité.

Jacobsen a explicité ces possibilités par des études approfondies de forêts couvrantes sur réseau (avec Saleur, [ACL22]) de la transition antiferromagnétique dans le modèle de Potts (avec Ikhlef et Saleur [ACL238]) et de chemins aléatoires avec auto-intersections (Ikhlef, Saleur [ACL176]).

### **3) Combinatoire et modèles de boucles**

Le travail de Paul Zinn-Justin pendant la période 2005-2008 a tourné autour de l'interaction entre méthodes de physique théorique et combinatoire. Plus spécifiquement la conjecture Razumov-Stroganov l'a amené à étudier toute une faune d'objets combinatoires aux propriétés remarquables : matrices de signe alternant (ASM) et leurs diverses classes de symétrie, Partitions Planes Totalement Symétriques Auto complémentaires (TSSCPP), etc. La conjecture RS elle-même, qui identifie l'état fondamental d'un hamiltonien intégrable (modèle de boucles Temperley-Lieb  $TL(1)$ ) avec l'énumération de certaines classes d'ASM ou, de manière équivalente mais peut-être plus physique, de classes de configurations de boucles compactes (FPL) n'a toujours pas été démontrée. Cependant de nombreux résultats connexes existent (variantes, corollaires, généralisations) et un certain nombre ont été démontrées par Paul Zinn-Justin et ses collaborateurs (P. Di Francesco, A. Knutson, Yu. Stroganov, J.B. Zuber).

La première avancée significative dans ce domaine par P. Di Francesco et P. Zinn-Justin [ACL8] concerne la « règle de somme », conjecturée par B. Nieuhuis et al, que satisfait le modèle statistique à deux dimensions de boucles non-croisantes  $TL(1)$ . Ici, le paramètre 1 est le poids d'une boucle, c'est une valeur très spéciale qui conduit l'état fondamental à avoir toutes sortes de propriétés remarquables. Le résultat prouvé est que la somme des composantes du fondamental, dans une normalisation dans laquelle la plus petite composante vaut 1, est égale au nombre d'ASM de même taille que le système de boucles, ou encore, de manière équivalente, à la fonction de partition du modèle à 6 vertex à température infinie. L'idée proposée dans cet article est d'introduire des paramètres spectraux dans le modèle de manière à pouvoir utiliser son intégrabilité ce qui n'était pas vraiment le cas dans des travaux précédents du domaine (travaux essentiellement combinatoires, y compris ceux de P. Zinn-Justin et al, [ACT3]. Bien que cette idée soit toute simple, elle a des conséquences importantes. Au lieu de manipuler des nombres entiers, on se retrouve avec des polynômes et avec toutes sortes de nouvelles identités, du type des relations de Korepin pour le modèle à 6 vertex.

Ce travail ouvrait la voie à de multiples directions nouvelles de recherche. Tout d'abord le même type d'argument permet de traiter d'autres modèles intégrables qui eux aussi possèdent des valeurs spéciales de leurs paramètres (entrant dans les poids de Boltzmann) pour lesquelles l'état fondamental a une interprétation combinatoire. C'est ainsi qu'ont été étudiés le modèle de boucles croissantes basées sur l'algèbre de Brauer [ACL83] la chaîne de spin XXZ [ACL165] qui lui est très proche (il y a une équivalence des boucles aux spins qui consiste à orienter les boucles), des modèles dits fusionnés (reliés aux chaînes de spin supérieur) [ACL169], une généralisation mathématique à des algèbres de type B/C/D [ACT19].

Une deuxième direction concerne le lien avec la géométrie algébrique. En effet, l'introduction de paramètres spectraux dans ces modèles intégrables amène naturellement à les considérer comme paramétrisant un tore qui apparaît comme la symétrie de certains objets géométriques sous-jacent dont on étudierait la cohomologie équivariante. Cette idée, proposée par P. Zinn-Justin et P. Di Francesco [ACL83], a été démontrée rigoureusement par P. Zinn-Justin et A. Knutson [ACL227].

Dans tous ces travaux, l'équation qui joue un rôle central est l'équation quantique de Knizhnik-Zamolodchikov [ACL165]. Celle-ci était apparue auparavant dans de nombreux contextes : en théorie de la représentation, en relation avec des algèbres quantiques affines, et en physique dans l'étude des facteurs de forme, puis des fonctions de corrélation des modèles intégrables. Les travaux de P. Zinn-Justin et collaborateurs [ACL166, ACL256, ACL234] sur ce sujet fournissent une interprétation supplémentaire de type combinatoire à cette équation.

Finalement, P. Zinn-Justin a tenté de combiner les différentes approches qu'il avait développées (combinatoire, géométrique et intégrable) afin d'aboutir à une preuve de la conjecture RS. Les résultats récents bien que partiels (preuve de RS pour certaines séries infinies de diagrammes de boucles) sont très prometteurs.

#### Combinatoire du modèle de Potts

Jacobsen et Richard ont étudié certaines propriétés combinatoires du modèle de Potts soit sur un anneau [ACL112], soit sur un tore [ACL67, ACL113]. Dans ce dernier cas, ils ont obtenu les amplitudes des valeurs propres dans la représentation de boucles (aussi connues comme la dimension du commutant de l'algèbre de Temperley-Lieb sous-jacente) sous forme de sommes de

Ramanujan généralisées. Ces calculs rigoureux ont été rendus possibles grâce au développement d'une méthode combinatoire qui s'apparente à la théorie des projecteurs de Jones-Wentzel dans le cas Temperley-Lieb mais qui est en fait plus générale.

Jacobsen et Saleur ont ensuite utilisé cette méthode pour les cas de Temperley-Lieb avec un ou deux bords distingués [ACL239]. Ils ont pu ainsi identifier une famille continue de conditions aux bords invariantes conformes et calculer exactement les fonctions de partition dans la limite continue. Comme application, Jacobsen et Saleur ont fait une incursion dans la théorie de l'information quantique en calculant exactement l'entropie de liens de valence pour la chaîne de spins XXZ.

#### **4) Effet Hall, modèles d'impuretés magnétiques et théorie des nombres**

##### Modèle d'impuretés magnétiques

En 1995 a été proposé par Desbois, Furtlehner et Ouvry un modèle quantique d'impuretés magnétiques désordonnées (Nucl. Phys. B453 [FS]) en relation avec la physique de l'effet Hall. Ouvry a montré [ACL57] que le développement perturbatif de ce modèle, où le paramètre perturbatif est la constante de couplage au désordre (problème à deux impuretés, au 4<sup>ème</sup> ordre) conduisait à une famille d'intégrales sur un produit de fonctions de Bessel modifiées de poids 4. Cette famille d'intégrales est reliée à  $\zeta(3)$ . Similairement, une famille d'intégrales analogues se trouve reliée à  $\zeta(2)$ . Dans [ACL285], cette analyse est poursuivie par Mashkevich et Ouvry au 6<sup>ème</sup> ordre de la théorie des perturbations, où apparaissent des intégrales simples et doubles de poids 6. On peut alors isoler, comme constituant de base des diagrammes de Feynman perturbatifs du modèle, une fonction sur les entiers  $n$  (moment d'ordre  $n$  de la fonction de Bessel modifiée  $K_0$ ). Cette fonction apparaît sur le même plan que la fonction zeta de Riemann, mais en est indépendante (i.e. ne peut pas s'exprimer comme une combinaison linéaire à coefficients rationnels de sommes de Euler du poids considéré). On obtient ainsi une nouvelle classe de nombres qui pourrait avoir un rôle à jouer en théorie des nombres.

##### Modèle des Anyons

-Le problème de la réduction dimensionnelle d'un système bidimensionnel sur une sphère à un système unidimensionnel sur un cercle est considérée par Matveenko, Moller et Ouvry dans [ACL138]. On a en vue une relation possible entre le modèle des Anyons sur une sphère et le modèle de Calogero sur un cercle (Calogero-Sutherland), en analogie avec la correspondance Anyon dans un puits harmonique et Calogero dans un puits harmonique. Une généralisation du modèle Aharonov-Bohm sur une sphère est ainsi considérée dans laquelle les vortex entrent et sortent de la sphère à leurs antipodes.

-L'effet de taille finie des vortex statistiques Aharonov-Bohm du modèle des Anyons (on s'intéresse en fait à des Anyons dans le niveau de Landau le plus bas (LLL) d'un champ magnétique extérieur) a été étudié par Mashkevich et Ouvry dans arXiv:0705:2474, ce en relation avec les séries de remplissage fractionnaire de l'effet Hall.

-Une revue sur le modèle des Anyons et des LLL-Anyons, sur les statistiques d'exclusion et leur combinatoire, et leur lien avec le problème des partitions avec différence minimale  $p$  est donnée dans [ACT31].

-De nouveaux états exacts du problème à  $N$  bosons dans le LLL et en interaction delta (la restriction de l'espace de Hilbert au LLL rend le modèle bien défini) sont donnés par Mashkevich, Matveenko et Ouvry dans [ACL170], en relation avec la physique des condensats de Bose en rotation rapide. Le cas fermionique est aussi étudié dans le cas d'une interaction Laplacien delta.

## QUANTUM AND CLASSICAL FLUIDS

A strong advance in the physics of fluids in the recent years is related to revealing new fundamental properties and to developing a large variety of applications. Regarding classical fluids, a large progress has been achieved in the physics of colloids and microelectromechanical systems, in particular in relation to the research on biological systems and materials. The field of quantum fluids, being restricted to liquid helium in the past, underwent a tremendous boost after the discovery of Bose-Einstein condensation (BEC) in dilute ultracold clouds of alkali atoms. The main reason was a possibility to observe and study new macroscopic quantum phenomena. As of now, the field of quantum fluids is highly interdisciplinary, interacting with atomic physics and quantum optics, condensed matter physics, nuclear and high-energy physics, non-linear physics. It deals with a variety of fundamental problems, such as strongly correlated states in dilute systems, or formation kinetics of Bose-condensed states, and is searching for new types of macroscopic quantum systems. Potential applications are related to atom lasers, atom interferometry, atomic clocks, systems for quantum computing. A wide spectrum and extraordinary level of scientific activity are illustrated by observation of Superfluid-Mott Insulator transition for bosonic atoms in an optical lattice (Munich and elsewhere), creation of strongly interacting dilute Fermi gases bringing in analogies with neutron matter (JILA, MIT, ENS and elsewhere), creation and melting of vortex lattices for rapidly rotating bosons introducing analogies with Quantum Hall physics (JILA, ENS), production of spinor condensates representing a gaseous analog of condensed matter magnetic systems (JILA, MIT, Hamburg, Atlanta). Recent developments on creating Bose-Einstein condensates in disordered (optical) potentials (LENS, Orsay) put forward the issues of Anderson localization, percolation, and Bose glasses in these systems.

### Classical fluids

At LPTMS this subject has been put forward by X. Campi and H. Krivine, who obtained remarkable results on multifragmentation and aggregation of dense fluids. This work was completed in 2005 by the research on the Zipf law in nuclear multifragmentation [ACL213] and by the studies of partial energies fluctuations and negative heat capacities [ACL72]. By the end of 2005 and in 2006, X. Campi and H. Krivine retired and this activity at LPTMS is terminated. The research in the direction of soft condensed matter and colloidal systems is conducted by the group of E. Trizac and is contained in a separate report.

### Quantum fluids

The LPTMS theoretical program "Quantum Fluids" is dedicated to reveal and study novel macroscopic quantum states in cold gases, focusing attention on strongly interacting and "exotic" states. The LPTMS team includes 5 senior scientists (G.V. Shlyapnikov, P. Leboeuf, N. Pavloff, T. Jolicoeur, D.S. Petrov), and 14 postdocs/students/long-term visitors. The program presently includes 6 main topics: strongly interacting fermions, low-dimensional systems, rapidly rotating quantum gases, dipolar gases, correlated atomic systems in optical lattices, quantum transport in disordered potentials. The LPTMS unit of Quantum Fluids is on the leading position in the world. In the report period it produced 38 papers on all these topics, and the team members gave 57 invited talks at major international meetings. The studies were performed in collaboration with Laboratoire Charles Fabry (A. Aspect, I. Bouchoule, C. Westbrook, P. Bouyer), Laboratoire Kastler Brossel (J. Dalibard, C. Salomon, M. Leduc), Laboratoire Aime Cotton (P. Pillet). The most important results concern the description of strongly interacting regimes in Fermi-Fermi mixtures, and finding conditions of Anderson localization for expanding Bose-Einstein condensates (BEC) in disordered potentials and revealing the role of interactions for localization of BEC beams. These results create a background and give predictions for experiments at LCF (A. Aspect) and at LKB (C. Salomon).

The LPTMS team of Quantum Fluids has a weekly seminar "Quantum fluids and strongly correlated systems", where active scientists from all over the world are giving their presentations and/or ongoing research projects are discussed by the team members. In the present stage, LPTMS became a central theory unit in France in the field of Quantum Fluids. This is justified by the fact that in the report period the team members obtained 1 ACI research grant, 4 ANR grants, and a grant within the EUROQUAM program of the European Science Foundation. LPTMS is the only theory lab which is a member of

IFRAF (Institut Francilien d'Atoms Froids – a network of 6 CNRS labs on the subject of Quantum Gases), which provides financing for research projects of the LPTMS unit of Quantum Fluids and stimulates their collaboration with other labs in Ile de France and Paris. The unit has an extended visitor program, and leading theorists are regularly visiting the lab. One should mention Lev Pitaevskii, Ignacio Cirac, Mike Gunn, Victor Gurarie. In 2008 three distinguished theorists, Boris Altshuler, Alexei Tsvetik, and Nigel Cooper, got a prestigious award “Chaire d'IFRAF” and they will be based at LPTMS during their visits.

The six topics specified above were at the core of the activity of the team “Quantum Fluids” during the report period and will be such in the near future. The description of research achievements is given below for each topic separately.

### **Strongly interacting Fermi gases**

Strongly interacting quantum gases are peculiar dilute systems in which the amplitude of interaction between particles is very large and common theoretical approaches do not work. The studies in this direction provide links to neutron matter and superconductivity. Experimental developments were mostly related to two-species atomic Fermi gases near a Feshbach resonance, where the interspecies interaction changes from infinitely repulsive to infinitely attractive, and on the repulsive side of the resonance fermions of different species form weakly bound molecules. They represent novel composite bosons which exhibit features of Fermi statistics at short intermolecular distances. In the case of homonuclear molecules, the Pauli principle for identical fermionic atoms provides a strong suppression of collisional relaxation of the molecules into deep bound states. Remarkable experimental studies obtained long-lived Bose-Einstein condensates of (homonuclear) highly excited molecules in 40K and in 6Li gases, and experiments with mixtures of different fermionic atoms are currently being set up.

We analyzed heteronuclear molecules which are expected to be formed in such mixtures [ACL2]. This analysis shows how an increase in the mass ratio of the constituent atoms changes the elastic interaction between the molecules and reduces their collisional stability. We then discussed the issue of BEC of these composite bosons and outlined prospects for future studies. This work has been done in collaboration between LPTMS and LKB ENS.

Then, in collaboration with a group at Eindhoven, we considered collisional properties of weakly bound heteronuclear molecules (dimers) formed in a two-species mixture of atoms with a large mass difference [ACL250]. We focused on dimers containing light fermionic atoms as they manifest collisional stability due to an effective dimer-dimer repulsion originating from the exchange of the light atoms. In order to solve the dimer-dimer scattering problem we developed a new theoretical approach, which provides a physically transparent and quantitative description of this four-atom system in terms of three- and two-body observables. We calculated the elastic scattering amplitude and the rates of inelastic processes such as the trimer formation and the relaxation of dimers into deeply bound molecular states. Irrespective of whether the heavy atoms are bosons or fermions, the inelastic rate can be significantly lower than the rate of elastic collisions. Moreover, the measurement of the inelastic rate which is a four-body observable, can be an efficient and precise tool for determining three-body observables such as the three-body parameter, positions of Efimov states and their lifetimes.

In the next stage, in collaboration with LKB ENS and theory group at the University of Barcelona, we showed that the system of weakly bound molecules of heavy and light fermionic atoms is characterized by a long-range intermolecular repulsion and can undergo a gas-crystal quantum transition if the mass ratio exceeds a critical value [ACL209]. For the critical mass ratio above 100 obtained in our calculations, this crystalline order can be observed as a superlattice in an optical lattice for heavy atoms with a small filling factor. We also found that this novel system is sufficiently stable with respect to molecular relaxation into deep bound states and to the process of trimer formation.

In collaboration with the University of Trento, we then studied a trapped atomic Fermi gases with equal populations of the two components but unequal masses [ACL295]. We derived the conditions of energetic stability of the superfluid configuration with respect to phase separation and found the frequencies of collective modes. This work was completed by a discussion of free expansion after switching off the trap for one of the components and showed that near the Feshbach resonance the released component can still remain trapped due to many-body effects.

Another type of activity was related to compact Fermi systems exhibiting an analogy with nuclear physics. We considered an interacting two-component Fermi gas under a tight confinement by an

external potential and computed the level density as a function of the number of particles, angular momentum, and excitation energy [ACL125]. This has been done in the mean-field approach and assuming that the excitation energy greatly exceeds the single-particle spacing at Fermi energy. Our result includes smooth low-energy corrections to the leading Bethe term plus oscillatory corrections that describe shell effects. These findings provide links between tightly confined quantum gases and nuclear physics systems and can be used in the analysis of experiments with tightly confined interacting Fermi gases.

We then revisited an old problem of the semiclassical approach to finite Fermi systems, where one of the most elusive features of the theory is the systematic overbinding compared to the quantum average for fermions in external potentials. It is shown that this discrepancy is due to the fact that semiclassical methods do not appropriately incorporate the conservation of the number of particles [ACL131]. Generically, there is the so-called shell contribution to the average ground-state energy that comes from the fluctuating part. We derived an explicit expression that takes into account this contribution, and tested it for different types of confining potentials. For confining potentials with a high degree of symmetry, the shell corrections are large and the semiclassical Wigner-Kirkwood energies significantly deviate from exact quantum energies. This is, in particular, the case for an atomic Fermi gas in spherical or cylindrically symmetrical harmonic potentials. For 3D harmonic trapping potentials, we show a rich variety of different behaviors (erratic, regular, supershells) that appear when the number-theoretical properties of the frequency ratios are varied [ACL205]. In the case of self-bound systems, where the shape of the trapping potential is determined by energy minimization, we obtain accurate analytical formulas for the deformation and the shell correction energy as a function of the number of particles.

The next effort was the calculation of the pairing gap for finite-size systems, where it fluctuates as a function of the size or shape. We have found a parameter free theoretical description of pairing fluctuations in mesoscopic systems characterized by regular or chaotic dynamics [ACL243]. The theory accurately describes experimental observations of nuclear superfluidity, and it can provide a description of (tightly) confined ultracold Fermi gases.

## Low-dimensional systems

The creation of two-dimensional (2D) and one-dimensional (1D) quantum Bose gases by tightly confining the motion of particles in one or two directions revived an interest in low-dimensional gases. Theoretical and experimental studies of low-D trapped gases showed that they truly behave differently compared to 3D samples, and large part of new physics is related to finite-size effects.

Our research in this direction was dealing with 1D trapped gases. In collaboration with the University of Brisbane (Australia), we calculated the density profiles and 2-body local correlations of the 1D finite-temperature Bose gas in a harmonic trap, using the exact solutions for the uniform case and relying on the local density approximation [ACL18]. These results allow a direct experimental test of the transition from the weakly interacting to the strong-coupling, "fermionic" Tonks-Girardeau regime by extracting local 2-body correlations from the measurement of the rates of 2-body inelastic processes, such as photoassociation.

Using a scaling transformation we found exactly the dynamics of a harmonically confined Tonks-Girardeau gas under arbitrary time variations of the trap frequency [ACL29]. It is shown that the 1D expansion after switching off the trap leads to the effect of "dynamical fermionization": the momentum distribution rapidly approaches the one of an ideal Fermi gas. Under an abrupt change of the trap frequency the gas undergoes breathing oscillations displaying alternating bosonic and fermionic character of the momentum distribution. Similar studies have been done for the fermionic Tonks-Girardeau gas, that is the single-component Fermi gas with an infinitely strong attractive odd-wave zero-range interactions [ACL86]. Here the 1D expansion leads to "dynamical bosonization", i.e. the momentum distribution approaches the one of an ideal Bose gas.

We then analyzed excitations of the 1D spinor Bose gas with repulsive short-range interaction independent of internal states of the atoms (isospin  $\pm$  bosons) [ACL54]. This was done using an exact solution by the Bethe Ansatz. In addition to phonons the system features spin waves with a quadratic dispersion, and calculating the effective mass we found that the spin transport is greatly suppressed in the Tonks-Girardeau regime. The large isospin-density (or "spin-charge") separation leads to extremely small frequencies of relative oscillations of the two components in a trap.

In our joint work with the University of Trento [ACL133], we calculated correlation functions for the 1D Calogero-Sutherland model and constructed the zero-temperature phase diagram. In this model particles interact with each other via a long-range potential inversely proportional to the square of the

interparticle distance, and this type of interaction can be mediated in between heavy atoms in the presence of light fermionic atoms. The obtained phase diagram contains the regimes of quasi-condensation, quasi-crystallization, and quasi-supersolid. We are presently discussing possibilities for realizing the Calogero-Sutherland model in trapped atomic gases and observing the described regimes.

For the weakly interacting 1D Bose gas with short-range interparticle interactions, we discussed the transition from a fully decoherent to a (quasi)condensate regime in a confining harmonic potential [ACL202]. This was a joint work of LPTMS, Institute d'Optique, and the University of Brisbane (Australia). By using analytical approaches and verifying them against exact numerical solutions, we found a characteristic crossover temperature and crossover particle number that depend on the interaction strength and the trap frequency. This allowed us to identify conditions for observing either an interaction-induced crossover or else a finite-size Bose-Einstein condensation phenomenon characteristic of an ideal 1D gas. Moreover, in the former case we distinguish between a direct crossover and the crossover through an intermediate quantum decoherent regime. Our results draw prospects for observing these various regimes in the 1D gas of bosonic lithium where the interaction strength can be widely tuned using a Feshbach resonance, including extremely small positive values.

We then discussed trapped non-interacting bosons in an arbitrary dimension and established a connection between the level density of such a gas and the theory of extreme value statistics [ACL171]. Depending on the exponent that characterizes the growth of the underlying single-particle spectrum, it is shown that at a given excitation energy the limiting distribution function for the number of excited particles follows the three universal distribution laws of extreme value statistics, namely Gumbel, Weibull, and Frechet. These distributions thus provide a relevant description of the Bose gas in the intermediate regime, in between the highly degenerate limit where one keeps a constant energy and takes the number of particles tending to infinity, and the classical limit where one keeps a constant number of particles and considers large energies.

We calculated excitation modes of a 1D dipolar quantum gas confined in a harmonic trap and predicted how the frequency of the breathing mode characterizes the interaction strength [ACL293]. Our predictions are obtained within the Luttinger Liquid theory using the local density approximation for the density profile, and they can be observed in current experiments, revealing the Luttinger Liquid nature of 1D dipolar Bose gases.

### **Rapidly rotating quantum gases**

Rapidly rotating quantum gases bring in analogies with electrons in a magnetic field and attract a great interest with respect to various vortex structures and strongly correlated Quantum Hall states. Ongoing experiments have achieved the state of a vortex lattice and observed its melting. Compared to traditional Quantum Hall systems, a new physics is expected due to the presence of a harmonic trapping potential and its possible anisotropy. We showed that a Bose-condensed gas, under extreme rotation in a 2D anisotropic trap, forms a novel elongated quantum fluid which has a roton-maxon excitation spectrum, resembling that in superfluid 4He [ACL1]. For a sufficiently large interaction strength, the roton energy reaches zero and the system undergoes a second order quantum transition to the state with a periodic structure – rows of vortices. The number of vortices increases with the interaction, and the vortices eventually form a triangular Abrikosov lattice. This work was done in collaboration with the Max Planck Institute for Complex Systems (Dresden, Germany).

A large part of our research on rapidly rotating quantum gases was dedicated to the studies of strongly correlated Quantum Hall states. We described how the composite fermion theory used in the description of the fractional Hall effect for electrons, can be applied to interacting bosons [ACL60,ACL123]. Numerical evidence supporting the formation of composite fermions, each being a bound state of a boson and one flux quantum, is shown for filling factors  $\nu/(p+1)$ , where  $p$  is an integer. Thus, a rapidly rotating system of two-dimensional bosons constitutes an interesting example of "transmutation", with bosons behaving like composite fermions. We also described the difference between the electronic and bosonic cases for the filling factor approaching unity. In this limit, residual interactions between composite fermions are attractive, resulting in a paired composite-fermion state described by the Moore-Read wavefunction.

In the next stage, we investigated possible parafermionic states in rapidly rotating atomic Bose gases in the lowest Landau level at a half-integer filling factor [ACL233]. It has been shown how the system size and interactions act upon the overlap between the true ground state and a candidate Read-Rezayi state. We also considered the quasihole states which are expected to display the non-Abelian

statistics. Our calculations are completed by the discussion of how the validity of the parafermionic description depends on the filling factor.

We then investigated the case of bosons with dipolar interactions as may be realized with chromium atoms [ACL282]. At filling factor equal to unity the ground state is Moore-Read (Pfaffian) paired state as in the case of bosons with purely s-wave interactions. This Pfaffian state is destabilized when the interaction in the s-wave channel is sufficiently small and the ground state is a stripe phase with unidimensional density modulation. For filling factor  $1/3$  we found that there is a Fermi sea of « composite fermions » made of one boson and three vortices. The formation of such a Fermi sea opens up a new possible route to detection of Quantum Hall correlations by directly imaging the momentum distribution.

Our studies of an exact N-body bosonic model with contact delta-interactions [ACL170] projected onto the Lowest Landau level have been done for a given particle number N and in a given angular momentum sector. They obtained a complete solution of the three-body problem, indicated some general properties of the N-body spectrum and a number of exact analytical eigenstates. The N-fermion problem with was considered along the same lines and we proposed new exact eigenstates, along with the Slater determinant, whose eigenvalues were shown to be related to Catalan numbers.

### **Dipolar quantum gases**

Ultracold gases of dipolar particles (aligned polar molecules or atoms with a large magnetic moment) attract a great deal of interest as such particles interact via long-range anisotropic dipole-dipole forces, which drastically changes the nature of quantum degenerate states. For example, the stability diagram of a trapped dipolar Bose-Einstein condensate strongly depends on the trapping geometry, and one can get peculiar instabilities at large excitation energies. The first dipolar quantum gas, Bose-Einstein condensate of chromium atoms, has been created in Stuttgart, and presently also at the University Paris-Nord. Our work [ACL108] provides a hydrodynamic description of a dipolar Bose-Einstein condensate in time-dependent harmonic potentials. Being used for an expanding condensate, it gives an excellent agreement with the recent chromium experiment at Stuttgart, where the effects of the dipole-dipole interaction have been observed in the asymmetry of an expanding dipolar condensate.

We then analyzed the scattering of bright solitons in dipolar Bose-Einstein condensates -placed in unconnected layers [ACL207]. The long-range character of the dipole-dipole interaction provides an interlayer interaction which leads to an effective molecular potential between disconnected solitons. This induces a complex scattering physics between them, which includes inelastic fusion into soliton molecules and strong inelastic resonances. Also, a new 2D scattering scenario in matter-wave solitons becomes possible, in which inelastic spiraling occurs in resemblance to phenomena in photorefractive materials. The work is concluded by the discussion of how to implement these ideas in ongoing experiments.

A new line of research is no related to vortices and solitons in dipolar condensates. Due to nonlocality of the dipole-dipole interaction, the 3D character of the vortex plays here a more important rôle than in ordinary short-range interacting condensates [M. Kalwunn, R. Nath, P. Pedri, and L. Santos, "Kelvonoron instability of vortex lines in dipolar Bose-Einstein condensates", cond-mat.other/0707.0441]. In particular, the dipolar interaction affects the stability of the transverse mode of the vortex line. In the presence of a periodic potential along the vortex line, the spectrum of transverse modes may develop a roton minimum. We discuss the conditions at which this roton minimum may eventually lead to an instability of the straight vortex line, opening new scenarios for vortices in dipolar gases.

### **Correlated atomic systems in optical lattices**

After celebrated Munich experiments on the observation of the Superfluid – Mott insulator transition for bosonic atoms in a 3D optical lattice, there is a tremendous boost in the studies of correlated atoms in optical lattices. The main goal is the observation of various types of macroscopic quantum states and quantum phase transitions, with prospects for quantum information processing. In most cases one of the key issues is the calculation of correlation functions and extracting them from experiments.

We have found the superfluid transition temperature for a two-component 3D Fermi gas in a 1D optical lattice and analyzed a dimensional crossover from the 3D to quasi-2D regime [ACL69]. For the geometry of finite-size discs in the 1D lattice, we showed that even for a large number of particles per disc, the critical effective tunneling rate for a quantum transition to the Mott state can be large compared to the loss rate caused by three-body recombination. This opens a possibility to observe the Mott transition, in contrast to the case of Bose-condensed gases in the same geometry. The work was done in collaboration with the University of Trento (Italy).

We then considered off-diagonal correlation functions for impenetrable bosons in a 1D lattice [ACL139]. By using the Jordan-Wigner transformation the one-body density matrix (single particle correlation function) was represented as (Toeplitz) determinant of a matrix of fermionic Green. Employing the replica method we calculated exactly the full long-range asymptotic behavior of the one-body density matrix and discussed how the subleading oscillating terms, originating from short-range correlations give rise to interesting features in the momentum distribution.

## **Bose-condensed systems in disordered potentials and quantum transport**

Recent developments in optically creating trapping potentials with disorder, and the progress in producing atom waveguides on a chip, stimulated the studies of quantum transport in Bose-condensed gases in the presence of disorder. From the side of fundamental physics, the key issue is related to revealing Anderson localization, Bose glass phase, percolation effects. The main difficulty arises from the subtle interplay of interference, scattering onto the potential landscape, and interparticle interactions. We have performed a joint work with the experimental group of A. Aspect at the Institute d'Optique, in which we studied experimentally and theoretically the expansion of an elongated (quasi-1D) Bose-Einstein condensate in a random potential after switching off the harmonic confinement [ACL62]. The experiment finds the suppression of the 1D transport, and we proposed a scenario for disorder-induced trapping of the condensate in agreement with the observations and with our numerical solution of the Gross-Pitaevskii equation.

We then started the discussion of localization of particles in evolving interacting Bose-Einstein condensates [ACL201]. It was shown that the expansion of an initially confined interacting 1D Bose-Einstein condensate can exhibit Anderson localization in a weak random potential. For speckle potentials used in experiments with quantum gases, the Fourier transform of the correlation function has a finite support and in 1D there is a mobility edge equal to the inverse correlation length of the disorder. Then, for the initial healing length of the expanding condensate larger than the correlation length of the disorder, the localization is exponential, whereas for the disorder correlation length exceeding the healing length the localization changes to algebraic. This theoretical work had a great success in the sense that presently an advanced experiment is done at the Institut d'Optique along the lines of the developed theory and the Anderson localization of expanding Bose-Einstein condensates is observed.

The next step was to study the localization of Bogoliubov excitations of a quasi-1D interacting Bose-condensed gas [ACL137]. As expected, for large energies where the excitations have a single-particle character, the localization length increases with energy and we recover the result for non-interacting particles. At low energies the excitations are phonons and the localization length grows with decreasing energy. The localization length reaches its minimum value at energies close to the chemical potential (mean interaction energy). In this region the localization effects are the most pronounced and we discuss how they can be observed in experiments with Bragg spectroscopy of a quasi-1D condensate.

Another line of research was the study of a coherent flow of a Bose-Einstein condensate through a magnetic waveguide in the presence of a static disorder potential [ACL71]. Both analytically and numerically, we identified different regimes of transport and discussed to which extent the concept of localization is applicable in the presence of repulsive atom-atom interactions. We then showed that the interaction between particles leads to the appearance of two distinct regions of stationary flow. One of them is subsonic and corresponds to superfluid motion. The other one is supersonic and dissipative, and it shows localization [ACL194].

A new line of research in our unit is related to the ground state properties of a disordered superfluid Fermi gas across the BCS-BEC crossover [ACL229]. For a weak disorder, both the depletion of the condensate fraction of pairs and the normal fluid density exhibit a nonmonotonic behavior as a function of the interaction parameter, reaching their minimum value near unitarity. We found that moving away from the weak coupling BCS regime, the Anderson theorem ceases to apply and the superfluid order parameter is more and more affected by the random potential.

Our studies of the propagation of dark solitons in a quasi-1D Bose-Einstein condensate in the presence of disorder, have found that the soliton decays algebraically over a characteristic length which greatly exceeds the healing length [ACL50]. As found, the soliton radiates energy when it encounters an obstacle, and the soliton propagation is strongly influenced by the repulsion between particles. By itself, the collision of a dark soliton with an obstacle leads to the emission of two counterpropagating wave packets, both moving at the speed of sound [ACL49]. We found the total amount of radiation emitted during the collision and calculated the acceleration of the soliton due to this collisional process. During the subatical stay of Lev Pitaevskii in our lab he produced a very

interesting paper on the stabilization of solitons generated by a supersonic flow of BEC past an obstacle. It was shown that in the reference frame attached to the obstacle there is a critical value of the flow velocity at which one has a transition from an absolute instability of dark solitons to their convective instability. This leads to decay of disturbances of solitons at a fixed distance from the obstacle and to the formation of effectively stable dark solitons, explaining a surprising stability of the flow picture observed in numerical simulations.

### **Un nouvel état colloïdal : le cristal colloïdal moléculaire**

La physique des transitions de phase à deux dimensions diffère à bien des égards de celle qui régit le comportement des systèmes tridimensionnels. En particulier, le scénario brossé par Kosterlitz, Thouless, Halperin, Nelson et Young a stimulé un nombre important d'investigations expérimentales. Parmi les systèmes retenus pour ces études, les particules colloïdales représentent un système idéal, en offrant une visualisation et un suivi de trajectoires aisés. Les interactions entre particules peuvent en outre être modifiées à l'envi, en jouant par exemple sur les conditions de salinité ou l'intensité d'un champ magnétique dans le cas de particules paramagnétiques. Alors que la plupart des travaux expérimentaux et théoriques ont tenté de minimiser les interactions entre les particules et le substrat confinant, nous nous sommes intéressés au cas où le substrat offre un potentiel périodique 2D aux particules, et ce, en lien avec des expériences dites de "light induced freezing" menées dans le groupe de C. Bechinger à Stuttgart. C'est alors l'interaction de plusieurs faisceaux laser qui crée un réseau périodique de pièges, ce qui conduit à la formation de véritables molécules colloïdales dans la mesure où il est possible de contrôler très précisément le rapport (généralement entier, ou demi-entier) entre le nombre de colloïdes et le nombre de pièges dans une région donnée. En collaboration avec J. Dobnikar et S. El Shawish (Ljubljana), E. Trizac a montré l'apparition d'ordres bipartites et tétrapartites dans l'état fondamental du système, qui se révèle pertinent pour comprendre les expériences à fort ancrage. Le travail a surtout porté sur les ordres dimériques et trimériques et montré que ce n'est pas la symétrie du réseau de pièges uniquement qui détermine l'ordre orientationnel à longue portée qui est observé [ACL 257].

### **Glissement hydrodynamique et phénomènes électrocinétiques**

Le comportement hydrodynamique au voisinage d'une paroi confinante est intimement relié aux propriétés de friction de l'interface liquide/solide. Aux petites échelles, les "dogmes" macroscopiques doivent être remis en question, en premier lieu, celui du "no-slip". Cela ouvre la possibilité d'un couplage entre les effets électrocinétiques, et les effets hydrodynamiques, que l'on peut quantifier par le rapport de différentes échelles de longueur pertinentes : longueur de Gouy et longueur de Debye d'une part pour les effets coulombiens, et longueur de glissement d'autre part. Nous avons montré qu'une quantité très communément employée pour caractériser l'amplitude des effets électrocinétiques, le potentiel  $\zeta$ , n'était pas seulement la signature d'effets électrostatiques comme cela est supposé usuellement, mais reflétait les propriétés de friction, via la possibilité d'un glissement hydrodynamique. Cela fournit des pistes prometteuses pour le contrôle de cette quantité, et en particulier montre l'intérêt des surfaces solvophobes pour les applications en micro-fluidique ([ACL 154], collaboration entre E. Trizac et L. Joly, C. Ybert, L. Bocquet du LPMCN à Lyon).

### **Interactions effectives dans les suspensions colloïdales**

L'obtention de potentiels effectifs à densité de macro-ions finie est un des problèmes difficiles de la physique des suspensions colloïdales. S. Pianegonda (doctorante), E. Trizac et Y. Levin (Porto Alegre) ont développé un modèle de jellium homogène pour prendre en compte la contribution des autres macro-ions au champ statique créée par un macro-ion marqué. Point crucial, la charge de ce fond est renormalisée de manière auto-cohérente, ce qui lui confère une dépendance en densité non-triviale, et explique le succès de l'équation d'état ainsi obtenue. Une telle approche semble particulièrement indiquée pour décrire les mélanges, contrairement aux méthodes "concurrentes" comme celle de la cellule de Wigner-Seitz [ACL 161]. Dans un second temps, la pertinence des potentiels effectifs correspondants a été testée avec succès en combinant des approches d'équations intégrales, de Monte Carlo, ainsi que des simulations plus complètes à  $N$  corps traitant les degrés de liberté microscopiques comme un champ continu, tout en gardant une description discrète pour les degrés de liberté colloïdaux [ACL 151]. Dans le prolongement de ce travail, nous avons exploré une facette du danger inhérent à une modélisation à un composant (mésoscopique) dans le calcul de la

pression d'une suspension, et montré que la prise en compte d'effets de surface résolvait le "paradoxe du viriel" [ACL 160]. Collaboration entre E. Trizac, L. Belloni (CEA Saclay), H.H. von Grünberg (Gratz), R. Castaneda-Priego (Guanajuato, Mexique) et J. Dobnikar (Ljubljana).

### **Condensation de contre-ions dans les polymères chargés**

La plupart des polyelectrolytes d'intérêt biologique (ADN, virus, actine...) sont des objets semi-rigides, caractérisés par une longueur de persistance élevée. La conjugaison d'une géométrie localement cylindrique et de la longue portée du potentiel coulombien est responsable du phénomène de condensation de contre-ions, qui se manifeste au delà d'une charge linéique seuil. Il s'ensuit un mécanisme de réduction effective de charge pour le polymère, qui est vu de loin comme "habillé" de son condensat. Ce phénomène a été d'abord prédit par Onsager, et formalisé ensuite par Manning et Oosawa. Toutefois, et même dans le cadre du champ moyen, très peu de résultats exacts sont disponibles. Grâce à un "mapping" sur le problème de Painlevé III, G. Téllez (Bogota) et E. Trizac ont pu clarifier la nature de la transition de condensation, et proposer des résultats exacts, asymptotiques mais en définitive remarquablement précis dans une large gamme de paramètres, en particulier pour les polymères fortement chargés [ACL76]. Ont été exhibées des corrections logarithmiques à la limite sans sel, qui font que même de faibles concentrations d'électrolytes affectent profondément l'effet d'écran dans ces systèmes. Enfin, le cas des électrolytes asymétriques 1:2 et 2:1 a pu être traité, via un isomorphisme avec un système de type Toda [ACL120, ACL179] dont la résolution mathématique a été achevée récemment.

# SYSTÈMES DÉSORDONNÉS

Lors du quadriennal qui se termine, se sont ajoutés à cette équipe Thorsten Emig et Silvio Franz. Il s'y développe une forte activité sur les systèmes désordonnés à l'équilibre et hors équilibre. De plus, des thématiques aux interfaces de l'informatique ou de la biologie se sont amplifiées au cours de ce quadriennal.

Quand des systèmes ayant un fort désordre sont refroidis, les degrés de liberté ont tendance à se maintenir dans un état qui paraît aléatoire, conduisant à des propriétés subtiles à l'équilibre et hors équilibre. Cette thématique offre souvent une ouverture qui sort du cadre traditionnel de la physique, et touche à l'économie, la sociologie, l'informatique, etc. Ceci n'est pas étonnant : les outils (analytiques, phénoménologiques et numériques) développés en physique statistique des systèmes désordonnés sont polyvalents et permettent de traiter des problèmes dans d'autres champs disciplinaires. L'ensemble de ces sujets de recherche regroupe une large communauté à Orsay et au CEA de Saclay qui est réunie en particulier lors du séminaire hebdomadaire "Systèmes Complexes" commun aux laboratoires LPT et LPTMS. L'équipe "systèmes désordonnés" anime également un groupe de travail interne au LPTMS. Cet environnement est particulièrement stimulant pour les étudiants et postdocs et attire de nombreux visiteurs. Nous avons aussi coordonné un réseau Européen (« Stipco ») regroupant 10 laboratoires sur « Statistical Physics of Information Processing and Combinatorial Optimization », et nous avons participé au réseau Européen « Evergrow » regroupant une quarantaine de laboratoires dans le cadre du programme Information Science and Technology.

N.B.: Les membres S. Majumdar et E. Trizac partageant leur temps dans d'autres équipes, seulement une partie de leurs travaux sont mentionnés ici.

## 1) Systèmes à l'équilibre

Depuis de nombreuses années des méthodes ont été développées pour comprendre les effets du désordre "gelé" et les propriétés de systèmes modèles associés. On peut regrouper les différents travaux de l'équipe comme suit :

### Verres de spins

Le modèle champ moyen Sherrington-Kirkpatrick exhibe un paysage d'énergie très complexe mais n'a pas de notion de voisinage spatial. Un premier pas vers des systèmes plus réalistes consiste à considérer des modèles à connectivité finie, avec des méthodes soit analytiques soit numériques. Dans les travaux [ACL96, ACL230], O. Martin et al. ont étudié numériquement comment sont organisés en réseaux les états métastables dans de tels modèles, trouvant en particulier des lois larges pour la connectivité du réseau associé de structures inhérentes. Pour être encore un peu plus réaliste, il est utile d'incorporer des effets de dimensionalité. S. Franz et al. ont ainsi considéré une approche basée sur la limite de Kac [ACL269, ACL279, ACL271] avec une attention particulière sur le rôle des échelles de longueur spatiales ; une structure mosaïque (pour les verres de spins mais aussi pour les verres) se révèle importante dans ce cadre et des travaux sont actuellement en cours sur une limite soluble pour obtenir les propriétés critiques de ces modèles. On peut finalement considérer directement le cas du modèle d'Edwards-Anderson en dimension finie, en utilisant les meilleures méthodes de simulation connues. En collaboration avec le groupe de Rome, O. Martin a pris cette approche et a donné de fortes indications qu'en dimension  $d=2$  le comportement critique tombe dans la même classe d'universalité que les interactions soient discrètes ou continues [ACL104, ACL143]. D'autre part, une étude menée avec des informaticiens spécialistes de fondamentaux dans les verres de spins a montré qu'un champ magnétique agit comme le prédit la théorie des gouttelettes [ACL287].

Avec la découverte que des matériaux magnétiques frustrés sans désordre se comportent comme des verres de spins, de nombreux groupes ont essayé de comprendre la nature de l'ordre à basse température dans ces systèmes. Ici, les effets quantiques jouent un rôle central car classiquement le niveau d'énergie le plus bas a une entropie non nulle. Dans [ACL117] T. Emig a étudié un tel modèle en deux dimensions à base de spins d'Ising. Grâce à un mapping vers un système à 3 dimensions, il a

montré que le fondamental était une superposition d'états formés par des appariements. Les fluctuations quantiques contrôlent une transition de phase et en exploitant le mapping il a pu obtenir des prédictions quantitatives sur cette transition [ACL182].

### Milieux aléatoires

On peut s'intéresser aux paysages d'énergie de différents systèmes à désordre gelé mais aussi on peut chercher à comprendre les spécificités de systèmes particuliers. La situation la plus simple est obtenue en considérant un réseau ou chaque site a une énergie aléatoire ; S. Majumdar et O. Martin [ACL156] ont considéré la statistique du nombre de minima locaux dans un tel paysage, obtenant en particulier les caractéristiques associées aux grandes déviations. Passant aux systèmes plus concrets, les réseaux de vortex sont un exemple de système technologiquement important dans lequel le désordre joue un rôle essentiel : sans désordre, plus de supraconductivité. T. Emig a étudié l'effet de défauts dans un matériau sur la stabilité de la phase verre de Bragg [ACL150] ; cette problématique est très proche de systèmes formés de dimères et permet des correspondances tout comme dans les systèmes quantiques mentionnés plus haut. Une autre thématique couverte par T. Emig est le calcul de forces dues à l'effet Casimir. La difficulté est d'aller au delà des géométries les plus simples ou la force associée à l'état fondamental du champ électromagnétique confiné entre les deux surfaces est non triviale. T. Emig et al. ont réussi à obtenir ces forces dans différentes situations [ACL118, ACL119, ACL226, ACL248], avec un intérêt particulier porté sur le cas de surfaces rugueuses. Une application originale est la conception d'un cliquet [ACL181] exploitant les forces Casimir.

## **2) Systèmes hors équilibre**

De nombreux systèmes sont vitreux à basse température ; la relaxation y devient tellement lente que les questions de dynamique sont souvent plus importantes que les propriétés d'équilibre. Peu de résultats généraux sont connus, et par exemple la question de classes d'universalité reste d'actualité. Les thèmes principaux couverts par l'équipe sont comme suit :

### Dynamique hors équilibre

De nombreux systèmes basés sur des particules ont été utilisés pour étudier différents effets hors-équilibre. Il est très difficile d'obtenir la distribution stationnaire dans ces systèmes, mais Majumdar et al. ont introduit des cas de dynamique pour lesquels la distribution peut être obtenue explicitement [ACL88, ACL102, ACL213, ACL235] sous une forme factorisée. Comme application, des transitions de « condensation » ont été exhibées dans ce cadre [ACL97]. Pour de nombreux systèmes modèles l'approche par factorisation n'est pas possible et il faut utiliser d'autres méthodes. E. Trizac s'est penché sur un problème de la dynamique d'annihilation de particules, le contact de deux particules A les faisant disparaître toutes deux. Ce problème est relativement bien compris dans le cas d'une dynamique diffusive, mais il n'en va pas de même dans le cas balistique. Des progrès récents ont permis de caractériser assez complètement les quantités moyennes comme la densité instantanée de particules, d'énergie cinétique etc, et l'effort a ainsi porté sur les fonctions à deux points (corrélations spatiales et temporelles). Leur étude passe par des techniques de projection et d'analyse spectrale jointes à des simulations numériques de type Monte Carlo pour obtenir les solutions des différentes équations maîtresses rencontrées, et de type Dynamique Moléculaire pour obtenir le comportement « vrai » du système, qui ne soit entaché d'aucune approximation. Un « mapping » inattendu a ainsi été mis en évidence entre le problème de l'annihilation probabiliste, et celui de la statistique collisionnelle d'un fluide élastique de faible densité [ACL297, ACL298].

### Gaz granulaires

Coulomb, Faraday, Huygens ou encore Reynolds figurent parmi les pionniers s'étant intéressés à la matière sous la forme de grains. Ce domaine d'étude a ensuite été l'apanage des sciences de l'ingénieur avant que les physiciens ne se réapproprient progressivement les questions posées, particulièrement ces quinze dernières années. Au-delà des effets de mode et d'enjeux industriels certains, le comportement de la matière granulaire appelle une description statistique qui se révèle délicate et n'est pas encore maîtrisée. Cette classe de systèmes, présentant par ailleurs une

phénoménologie riche, nous a intéressés en ce qu'elle fournit un paradigme pour l'étude d'états stationnaires hors d'équilibre.

Au moyen de méthodes issues de la théorie cinétique et des processus stochastiques, E. Trizac a cherché à déterminer les propriétés statistiques d'observables globales, mimant ainsi la démarche qui prévaut à l'équilibre. Parmi celles-ci, l'énergie qu'il faut fournir au système pour le maintenir dans un état stationnaire joue un rôle central. Elle est d'intérêt expérimental, mais elle est aussi pertinente comme mesure de la distance à l'équilibre, et c'est à ce titre qu'elle est récemment intervenue dans le contexte des relations de fluctuation (à la Gallavotti-Cohen). E. Trizac et ses collaborateurs ont complètement caractérisé la distribution de cette énergie. Ils ont montré qu'elle ne pouvait être invoquée dans les relations de fluctuation, et que la distribution de cette grandeur macroscopique permettait d'obtenir des informations sur la dynamique microscopique [ACL121, ACL145, ACL235]. Plusieurs questions se sont développées autour de ce travail [ACL80], dont la pertinence de la notion d'entropie dans un système dissipatif [ACL126], ou les limitations intrinsèques des relations de fluctuation [ACL122]. Une proximité technique avec un vieux problème ouvert de théorie cinétique --celui de la statistique collisionnelle dans un gaz de sphères dures-- a pu être mise au jour, et exploitée pour obtenir des résultats très précis : contrairement à ce que l'intuition pourrait naïvement suggérer, le nombre de collisions subies par une particule marquée n'est pas une variable poissonnienne, même dans la limite diluée.

Une autre direction de recherche a concerné la généralisation de l'équation de Boltzmann inélastique et le comportement des solutions correspondantes [ACL127, ACL130, ACL174, ACL208]. Cette équation décrit l'évolution de la distribution des vitesses d'un gaz de particules inélastiques. Différentes formes d'interaction entre particules (plus ou moins « molles »), et des mécanismes d'injection d'énergie génériques, ont été condensés en un cadre de travail unique. E. Trizac et ses collaborateurs ont mis en place un formalisme d'analyse asymptotique qui se révèle plus puissant que les méthodes préexistantes pour caractériser les importantes déviations au comportement gaussien pour la distribution des vitesses. En particulier, ils ont montré que des comportements en loi de puissance étaient obtenus dans des cas de stabilité marginale de l'état stationnaire. Un effort particulier a porté sur la situation unidimensionnelle dans la limite quasi-élastique, qui est mathématiquement remarquablement riche [ACL174]. L'ensemble de ces résultats fournit un cadre minimal pour l'interprétation d'une large gamme d'expériences.

### Piégeage d'interfaces élastiques

La dynamique d'une ligne élastique en milieu désordonné décrit bien les mouvements très lents des parois magnétiques ou ferroélectriques, la propagation d'un front de fissure dans un solide ou encore l'avancée d'une ligne de contact d'un liquide sur un substrat désordonné. Ce modèle capture des comportements universels qui ont fait l'objet de nombreuses études, le but étant d'expliquer la phénoménologie commune à ces différentes situations physiques [ACT29]. D'un point de vue plus fondamental, il permet aussi de mieux comprendre la théorie des phénomènes critiques dynamiques en présence d'impuretés.

Le dépiégeage d'une ligne soumise à une force externe a été depuis longtemps interprété comme une transition de phase dynamique, où la vitesse joue le rôle du paramètre d'ordre et le seuil de dépiégeage celui de la température critique. La présence d'une longueur divergente a été invoquée pour expliquer le comportement universel observé à la transition. Cette longueur de corrélation a été mesurée dans le régime stationnaire au-dessus du seuil, mais seulement dans les régimes transitoires pour des forces inférieures au seuil [ACL159]. Jusqu'à récemment, très peu de résultats étaient connus sur la région au-dessous du seuil où le mouvement est possible seulement par activation thermique. Pourtant ce régime est crucial pour la description du mouvement de reptation des parois. Une étude par dynamique moléculaire nous a permis de confirmer la formule phénoménologique proposée pour la vitesse de la ligne en fonction de la force appliquée, mais la comparaison avec les valeurs attendues des exposants critiques n'a pas été possible à cause de l'imprécision numérique [ACL159]. Nous avons alors décidé de procéder autrement. Nous avons démontré que dans la limite où la température s'annule le régime stationnaire est dominé par une unique configuration qui correspond à l'état de plus basse énergie en l'absence de force extérieure. Nous avons développé un algorithme exact qui permet de repérer cette configuration pour différentes valeurs de la force. L'étude des propriétés géométriques de la configuration dominante montre que, à la différence des phénomènes critiques standard, la transition de dépiégeage n'est pas caractérisée par une longueur divergente lorsque l'on approche le seuil par valeur inférieure [ACL158].

La nature vitreuse de ces systèmes ne se manifeste pas seulement dans le régime stationnaire, mais aussi la dynamique non-stationnaire. Par exemple, en l'absence de force, la dynamique relaxationnelle d'une interface initialement plate est déterminée par des barrières énergétiques. Une analyse d'échelle (ou argument des « droplets ») suggère que cette dynamique est gouvernée par une seule longueur qui croît logarithmiquement avec le temps. En résolvant numériquement l'équation de Langevin sur des grandes échelles de temps pour le modèle d'une ligne élastique en milieu aléatoire, nous avons obtenu des résultats compatibles avec une loi de croissance logarithmique [ACL63, ACT9].

Ces systèmes permettent une comparaison directe des différentes méthodes utilisées dans l'étude des systèmes désordonnés. Nous sommes maintenant capables de calculer numériquement et en dimension finie, le corrélateur du désordre au point fixe désordonné. Cela permet de tester directement la fiabilité des calculs perturbatifs autour de la dimension quatre [ACL277].

Dans un cadre proche, l'étude de la rugosité des interfaces désordonnées a attiré l'attention sur le fait que l'on peut interpréter ces interfaces comme les trajectoires d'un marcheur non-brownien. C'est-à-dire une marche aléatoire caractérisée par un déplacement quadratique moyen qui croît en loi de puissance du temps avec un exposant plus grand (superdiffusion) ou plus petit (subdiffusion) qu'un. La différence principale de ces processus généralisés consiste dans la perte du caractère markovien pour les marches aléatoires anormales et de la localité des interactions élastiques pour les interfaces. Ces effets de mémoire se manifestent dans les problèmes de premier passage et de conditions au bord. Notamment les conditions imposées au bord se propagent de façon non-triviale à l'intérieur de l'interface. Nous avons proposé une méthode pour éliminer ces effets dans l'analyse des données expérimentales [ACL38, ACL168]. Dans un deuxième temps nous avons étudié les temps de premiers passages pour un vol de Lévy [ACL278] et pour un mouvement brownien fractionnaire confinés dans un intervalle fini.

### **3) Interfaces avec l'informatique et la biologie**

Les techniques de la physique statistique sont de plus en plus utilisées pour divers problèmes d'informatique, d'optimisation combinatoire, de satisfaction de contraintes, de codes correcteurs d'erreur, de traitement de l'information, etc. Ces outils algorithmiques et de statistique peuvent être aussi appliqués à des problèmes de traitement de données biologiques ou de modélisation dans les biosciences.

#### Interfaces avec l'informatique

La direction de recherche à l'interface entre physique statistique, optimisation combinatoire et théorie de l'information, initiée lors du précédent quadriennal, s'est beaucoup développée durant ces quatre dernières années. Ce développement s'est inscrit dans la ligne des progrès décisifs faits en 2002 avec la méthode de cavité. L'invention d'une méthode de cavité dans des systèmes dilués (où chaque variable interagit, dans la limite thermodynamique, avec un nombre fini d'autres variables) a en effet ouvert la voie à des développements dans de nombreux domaines, et les applications en informatique sont parmi les plus fructueuses.

Cette direction de recherche se concentre sur divers aspects de problèmes de satisfaction de contraintes : un grand nombre de problèmes, dans diverses branches de la science, peuvent être décrits par un ensemble de variables discrètes, liées par des contraintes telles que chacune d'entre elles implique un petit nombre de variables. Ces problèmes sont au cœur de la théorie de la complexité algorithmique (le problème 'SAT', le coloriage de graphes, mais aussi des problèmes d'emploi du temps, de routage, et des applications pratiques importantes en vérification de microprocesseurs par exemple). Ils sont aussi au cœur de la théorie de l'information (le décodage dans les codes de correction d'erreur utilisés pour transmettre l'information, mais aussi la compression de données). Ils sont enfin au cœur de la théorie des systèmes vitreux (verres structurels, verres de spin). Notre approche vise à comprendre la structure de l'espace des solutions, ainsi que le lien entre cette structure et les difficultés algorithmiques rencontrées lorsqu'on cherche à résoudre ces problèmes. On est donc au cœur du problème : pourquoi certains problèmes informatiques sont-ils difficiles, quel est le lien avec le ralentissement de la dynamique observé dans les verres ?

Ces quatre dernières années ont vu le développement de plusieurs thèmes de recherche dans cette direction.

Nous avons tout d'abord poussé nos travaux sur le problème de satisfaisabilité, calculant le diagramme de phase, et le seuil SAT-UNSAT, pour les problèmes K-SAT avec K quelconque [ACL90]. La méthode de résolution numérique des équations de cavité par 'dynamique de population', utilisée initialement, ne permet de calculer le seuil que pour des problèmes de satisfaisabilité avec K assez petit, nous avons donc mis au point une méthode de développement en série de la solution à grand K ; l'ensemble de ces techniques permet maintenant d'avoir les seuils de satisfaisabilité pour tout K.

Nous avons aussi développé un nouvel algorithme basé sur notre méthode de « Survey propagation » : au lieu de décimer le problème, nous utilisons des sortes de champs magnétiques locaux extérieurs que nous faisons évoluer au cours du temps, jusqu'à ce que le système se retrouve naturellement polarisé dans une solution. Cet algorithme de 'renforcement' a le mérite de pouvoir être parallélisé aisément, et c'est à l'heure actuelle le meilleur algorithme au monde (même dans sa version non parallèle) pour trouver des solutions du problème SAT juste en dessous du seuil SAT-UNSAT [ACL68].

Nous avons par ailleurs travaillé sur la consolidation de nos résultats du point de vue mathématique : l'introduction de la notion de 'x-satisfaisabilité' est un pas important dans cette direction [ACL21, ACL140, ACL280]. La notion est très simple : étant donné un problème de satisfaction de contrainte, existe-t-il une paire de configurations des variables qui satisfont toutes deux l'ensemble de toutes les contraintes, et qui diffèrent en  $N \times$  variables ? Clairement, cette notion donne accès à certaines propriétés géométriques de l'espace des solutions, et en particulier permet dans certains cas de détecter le fractionnement de cet espace en amas distants. Ce fractionnement est à l'origine de la phase vitreuse présente juste en dessous du seuil de satisfaisabilité, et c'est donc une propriété qu'il était important de confirmer rigoureusement. C'est ce que nous avons fait dans une série de travaux qui démontrent, par des bornes probabilistes rigoureuses sur la x-satisfaisabilité, l'existence d'une phase avec brisure de symétrie des répliques (et regroupement de solutions en amas disjoints) dans la K-satisfaisabilité avec  $K > 8$ .

Une généralisation non triviale de nos travaux initiaux a consisté à étudier l'entropie des amas de solutions. Nous avons tout d'abord montré comment formuler la théorie de champ moyen avec brisure de symétrie des répliques permettant de calculer la complexité des amas à entropie donnée [ACL64], et nous l'avons ensuite appliquée au problème du coloriage de graphes [ACL203, ACL210, ACL304]. Ce travail a permis de mettre en évidence une nouvelle transition de phase : dans la phase dite 'COL' ou un graphe aléatoire est q-coloriable avec probabilité 1, il existe, on le savait déjà, une phase fractionnée en amas. Ce que nous avons réalisé, c'est que la mesure uniforme sur l'ensemble de tous les coloriages valides a aussi une transition de phase, qui sépare une zone où la mesure est répartie sur un nombre exponentiel d'amas, d'une phase 'condensée' où la mesure se condense sur un petit nombre d'amas. Cette transition est une vraie transition de brisure de symétrie des répliques pour la mesure d'équilibre (à l'inverse de la transition de fractionnement en amas qui correspond à une brisure dynamique de la symétrie des répliques). Un modèle simple de fractionnement [ACL302] permet de comprendre ces différentes transitions.

On peut dès lors se demander ce qui rend un problème difficile : la transition dynamique ? la transition de condensation ? Du point de vue des algorithmes de type Monte Carlo, qui satisfont au bilan détaillé, la réponse est connue grâce à l'étude des verres : c'est la transition dynamique qui est à l'origine du ralentissement brutal de la dynamique. Pour des algorithmes plus subtils, et en particulier nos algorithmes de passage de message, propagation des convictions (« belief propagation ») et propagation des sondages (« survey propagation ») la réponse est beaucoup moins évidente. En fait nos travaux récents indiquent que la difficulté est probablement liée à un autre aspect, l'existence de variables gelées [ACL210]. Une variable est gelée dans un amas de solution si elle prend la même valeur sur toutes les solutions de cet amas. Il ne faut donc pas se tromper quand on fixe une variable gelée, par exemple lors d'une décimation. Et il semble bien que l'apparition d'un grand nombre de telles variables (qui survient lorsqu'on est en présence de petits amas de solutions) soit un facteur limitant décisif pour ces algorithmes : c'est une voie que nous explorons activement.

Une autre direction a été de se rapprocher de la théorie de l'information, avec en particulier l'étude de méthodes de compression de données avec perte d'information, fondée sur l'utilisation des mêmes graphes factoriels aléatoires qui se sont avérés si efficaces dans le codage pour la transmission de données [ACL35, ACL55, ACT27], ainsi que l'étude des exposants d'erreurs dans les codes [ACL129].

Toujours dans cette direction, nous avons initié une série d'études sur le problème des tests de groupes. Il s'agit de problèmes importants et intéressants, dont la formulation est très simple. Etant donné un ensemble d'éléments pouvant être soit dans l'état 'sain', soit dans l'état 'infecté', et des tests portant sur des groupes d'éléments, capables de dire seulement s'il y a un élément infecté au moins dans le groupe, on peut se poser plusieurs problèmes : A) quelle est la répartition optimale en groupes, permettant d'obtenir la liste de tous les éléments infectés en utilisant le minimum de tests ? B) étant donné des groupes formés a priori, et le résultat de leurs tests, comment inférer quels sont les éléments sains ? Ces questions ont évidemment un intérêt direct par exemple pour les tests sanguins où l'on fait des tests sur des échantillons mélangeant le sang de plusieurs individus, mais peuvent peut-être s'appliquer aussi à d'autres problèmes comme la détection de défauts dans des systèmes informatiques. Pour des éléments qui peuvent être infectés aléatoirement indépendamment les uns des autres avec probabilité  $p$ , nous avons apporté une réponse à la première question (la constitution des groupes), sous la forme de groupes aléatoires, conçus de telle sorte que chaque groupe contient un même nombre  $K$  d'éléments, et chaque élément appartient à un même nombre  $L$  de groupes, et nous savons calculer les valeurs optimales de  $K$  et  $L$  en fonction de  $p$ . Pour la deuxième question, nous avons montré que les méthodes de passage de message sont très efficaces, et qu'il est parfois nécessaire d'avoir recours à la propagation des sondages [ACL224, ACL279, ACT28].

Nous avons aussi initié une nouvelle direction de recherche sur la théorie de l'information quantique, où nous avons proposé un nouveau type de code de correction d'erreur, optimisé pour les cas où le bruit est asymétrique (probabilité différente d'une erreur de phase ou d'un retournement de bit): dans ces cas (qui sont les cas réalistes en tous cas pour l'implémentation de qubits en physique du solide), ce code est plus performant que ceux connus jusqu'ici [ACL186].

Du point de vue des concepts, un progrès très important accompli ces dernières années a établi que les équations décrivant la brisure de symétrie des répliques dans les systèmes dilués sont équivalentes aux équations du problème dit d' « émission et reconstruction » de l'information sur un arbre [ACL106]. Prenons une source d'information à la racine d'un réseau en arbre. Elle transfère cette information à ses voisins qui les transfèrent à leurs voisins,... jusqu'aux feuilles. Chaque transfert d'information peut conduire à une erreur (c'est un canal bruité). La question est : étant donné l'ensemble de tous les signaux reçus par les feuilles, peut-on reconstruire l'information émise par la source ? Dans la limite des grands arbres, cette reconstruction est possible si et seulement si le problème correspondant, vu sur un graphe aléatoire dilué (qui a localement la même structure d'arbre) est dans une phase vitreuse. Cette assertion non-triviale relie donc la phase vitreuse avec l'établissement de corrélations de type « point-ensemble », ou en anglais « point-to-set », dont on sait qu'elles sont cruciales dans les verres structuraux. Ce pont a déjà permis des progrès importants, en particulier pour traiter certains problèmes numériques délicats dans l'étude de la phase dite « 1RSB ». Il apporte aussi une nouvelle vision sur l'ensemble de ce domaine, qui pourrait bien permettre à terme d'en avoir une meilleure compréhension, en particulier d'un point de vue probabiliste.

En parallèle avec des ouvertures en biologie, nous avons également mené à bien des travaux sur les systèmes désordonnés en physique [ACL56] et en finance [ACL197, ACL211, ACT27].

### Interfaces avec la biologie

Les problèmes considérés ici vont de formulations abstraites motivées par la biologie à des questions d'interprétation ou d'analyse statistique de données biologiques de nos collaborateurs. L'évolution en biologie offre de nombreux thèmes bien adaptés aux goûts mathématiques ou algorithmiques des théoriciens de la physique statistique, et il en est de même pour la génétique et maintenant la génomique.

La génétique des populations traite des effets de sélection sur des individus avec la possibilité de mutations ou autres changements génétiques de génération en génération. Une analogie très forte avec les systèmes désordonnés vient de la quasi équivalence entre paysage de fitness et paysage d'énergie. Alors que dans un système physique on s'intéressera à la dynamique de relaxation, en génétique des populations on cherchera à décrire l'approche de l'équilibre mutation sélection. Plusieurs travaux de S. Majumdar et de O. Martin se sont focalisés sur ce type de problème [ACL134, ACL189, ACL252, ACL187, ACL192], et cette thématique avait aussi été abordée par S. Franz avant son recrutement à Orsay. Notons que l'opérateur de mutation est un objet assez naturel en physique

statistique ce qui explique que toutes ces études se soient concentrées sur des cas de reproduction asexuée ; par contre pour les organismes supérieurs, la reproduction sexuée fait intervenir la recombinaison génétique, conduisant à un brassage bien plus complexe des génômes. Pour le moment, nous n'avons considéré cette complexité que dans un cadre bien particulier de populations de taille minimale [ACL-103] telle qu'elles apparaissent dans la création de lignées dites recombinantes.

L'autre thématique développée dans l'équipe est celle des réseaux biologiques comme on en rencontre en biologie des systèmes. En particulier, O. Martin et ses collaborateurs ont utilisé un modèle de réseau de gènes pour répondre à plusieurs questions assez génériques du point de vue de l'évolution [ACL188, ACL289] : la sélection pour la fitness conduit-elle nécessairement à une plus grande robustesse mutationnelle et comment se fait le compromis entre robustesse et adaptabilité ? Au moins dans le cadre de modèles peu contraignants, l'analyse mathématique et numérique permet de donner des réponses convaincantes à ces questions.

# THÉORIE DE LA MATIÈRE CONDENSÉE ET PHYSIQUE MÉSCOPIQUE

## 1) Problèmes d'impuretés et fluctuations mésoscopiques

Dans le cadre général de l'étude de l'interrelation entre effets de corrélations à  $N$  corps et fluctuations mésoscopiques dues aux interférences, une prolongation naturelle a été de considérer des "problèmes d'impuretés" dans des boîtes quantiques. Ces "problèmes d'impuretés" désignent de façon générique une situation où un gaz d'électrons, par ailleurs supposé sans interaction, interagit avec une impureté ponctuelle qui induit des corrélations entre les particules dans la bande de conduction. La question qu'on se pose ici est de savoir comment ces phénomènes sont modifiés par des fluctuations de type mésoscopique.

### Mesoscopic x-ray edge problem [ACT15, ACL232]

En particulier, une question que nous avons abordée, concerne l'absorption de rayons X (problème de Mahan-Nozières-de Dominicis) par une boîte quantique. La situation qu'on cherche à décrire est celle où le photon X excite un électron du cœur d'un atome vers la bande de conduction, laissant derrière lui un ion qui provoque une modification très locale du potentiel confinant vu par les électrons de la bande de conduction. La probabilité d'absorption est donc le résultat d'une compétition entre la "catastrophe d'orthogonalité" d'Anderson et l'existence pour chaque état final de plusieurs canaux dans le processus d'absorption, dont les amplitudes s'additionnent de manière cohérente. Notre but est de comprendre comment les fluctuations mésoscopiques, dues à la nature confinée du système, modifient les mécanismes ci-dessus.

Pour ce problème, une simplification importante vient du fait que le potentiel perturbatif dans l'état final peut être supposé local, ce qui implique que la différence entre les Hamiltoniens initiaux et finaux est une matrice de rang un. Ceci a pour conséquence que:

- i) les recouvrements entre les déterminants de Slater initiaux et finaux s'expriment uniquement en fonction des spectres à une particule (i.e.: il n'est pas nécessaire de connaître les fonctions d'onde);
- ii) pour les systèmes chaotiques, où une approche de type matrices aléatoires est possible, les distributions de probabilité jointes des spectres initiaux et finaux sont connues explicitement.

Nous avons obtenu des expressions analytiques pour les distributions de recouvrement des états fondamentaux à  $N$  corps. Pour les spectres d'absorption, et de même que dans la masse, un rôle important est joué par la manière (assez non triviale) dont l'impureté est écrantée par le gaz d'électron. De plus, les propriétés du spectre d'absorption dépendent de façon drastique de la symétrie (s ou p) de la fonction d'onde de l'impureté. Cependant, à cause de la perte de symétrie par rotation, ainsi que de la nature des fluctuations mésoscopiques, ceci s'exprime de façon qualitativement différente pour les propriétés moyennes des spectres d'absorption dans les boîtes quantiques, et donne lieu à des fluctuations évidemment absentes dans le bulk.

### Effet Kondo dans les boîtes quantiques [ACL92]

L'effet Kondo décrit les conséquences du couplage d'un gaz d'électrons avec une impureté portant un spin libre de fluctuer. Il se caractérise par l'importance du rôle joué par la renormalisation de l'interaction entre l'impureté et les électrons de conduction associée aux processus virtuels impliquant tous les électrons de la bande de conduction. On distingue ainsi deux régimes de température: un régime hautes températures où l'interaction renormalisée reste faible, et un régime basses températures, ou de couplage fort, où le spin de l'impureté est complètement écranté par les électrons de conduction. La température à laquelle s'effectue la transition entre ces deux régimes est la température de Kondo  $T_K$ . Le régime de haute température étant par nature perturbatif, on peut raisonnablement espérer y appliquer des techniques de renormalisation "perturbatives" (renormalisation à une boucle, ou de façon équivalente *poor's man scaling* à la Anderson, ou resommation des diagrammes de type "parquet" à la Abrikosov). D'autres techniques, soit numériques soit par exemple basées sur des approches de type bosons esclaves self consistantes ou sur des descriptions en terme de liquide de Fermi sont par contre nécessaire dans le régime de couplage fort (basses températures).

Il y a eu depuis quelques années un renouveau dans l'intérêt pour l'effet Kondo dans le contexte des boîtes quantiques. En effet, si une boîte quantique est suffisamment petite pour que l'espacement moyen entre niveau d'énergie soit très grand devant la température, et si le nombre d'électrons contenus dans la boîte est impair, on peut, dans certain régime de fonctionnement, ignorer les états doublement occupés. La boîte quantique se comporte alors comme une impureté magnétique de spin 1/2 (celui de l'électron de l'état simplement occupé). On peut alors coupler cette impureté à des contacts macroscopiques, mais on peut aussi, comme par exemple dans le contexte de l'effet Kondo à deux canaux, profiter de la grande flexibilité dans la conception des systèmes mésoscopiques pour les coupler par exemple à une autre boîte quantique, plus grande et donc hors du régime Kondo.

Dans ce dernier cas, le gaz d'électrons auquel est couplée l'impureté magnétique est de taille finie, ce qui introduit deux échelles d'énergie dans le problème: l'énergie de Thouless  $E_{Th}$  associée au temps de vol fini pour traverser le système, et l'espacement moyen  $\Delta$ . La question qui se pose alors est de savoir comment la présence de ces nouvelles échelles d'énergie modifie la physique de l'effet Kondo.

Pour ce qui concerne les conséquences de l'existence d'une énergie de Thouless finie, nous avons pu montrer que le comportement du système au dessus de la température de Kondo peut être décrit de façon quantitativement précise avec une approche de groupe de renormalisation perturbative qui inclue les fluctuations mésoscopiques. Ce résultat permet alors d'utiliser les expressions semiclassiques reliant ces fluctuations aux propriétés classiques du système, et de dériver des expressions analytiques reliant les propriétés de fluctuations de la température de Kondo aux trajectoires classiques. En particulier, on peut exprimer ainsi la variance de ces fluctuations à la probabilité classique de retour à l'origine [ACL41].

Nous avons par la suite abordé le régime de température ( $T \ll \Delta$ ) où la physique de l'effet Kondo est affectée par l'existence d'un espacement moyen  $\Delta$  fini [ACL92] (cf aussi [*Ground State and Excitations of Quantum Dots with "Magnetic Impurities"*, Ribhu K. Kaul, Gergely Zarand, Shailesh Chandrasekharan, Denis Ullmo, and Harold Baranger, en préparation.]). Dans ce régime, en échange, les propriétés du système sont dominées par celles de l'état fondamental (à N corps) et des quelques premiers états excités.

Pour l'état fondamental, nous avons pu démontrer un théorème, analogue au théorème de Marshall pour les matériaux antiferromagnétiques, qui spécifie la nature du spin total du système, bien que celui-ci soit en général dans un régime de corrélations fortes. Les propriétés des quelques premiers états excités peuvent être plus facilement calculées dans les deux régimes  $T_K \ll \Delta$  et  $T_K \gg \Delta$  (en utilisant une description de type liquide de Fermi à la Nozières dans le second cas). L'interpolation entre ces deux cas limites donne une bonne description qualitative de ce qui se passe pour toutes les valeurs du paramètre  $T_K/\Delta$ . De ces résultats, on peut déduire certaines propriétés physiques de ce type de systèmes, comme par exemple leur réponse magnétique. On trouve en particulier des comportements très différents entre la susceptibilité locale et la susceptibilité d'impureté, alors que celles-ci sont identiques dans le régime universel.

D'autres signatures expérimentales possibles de ces résultats, basées sur la dépendance en champs magnétique (transverse) de la conduction entre des contacts connectés sur le plus grand des deux dots dans le régime du blocage de Coulomb ont été étudiées en détails.

#### Phase de Berry dans le graphène: un point de vue semiclassique [ACL262]

Le terme "graphène" désigne un matériau constitué par une mono-couche de carbone formant un réseau hexagonal. Les propriétés de symétries de ce réseau font qu'à basse énergie, les électrons se comportent comme des particules de Dirac sans masse, ce qui implique une physique fondamentalement différente de celle des gaz d'électrons bi-dimensionnels traditionnels (comme ceux obtenus par exemple dans les hétérostructures de GaAs/AlGaAs).

Jusqu'à une date récente, le graphène était considéré comme une construction théorique qui, aussi intéressante soit elle, n'avait pas d'espoir d'être réalisée expérimentalement. Durant l'année 2004, deux groupes expérimentaux ont cependant réussi à synthétiser et à caractériser des échantillons de graphène: Novoselov et collaborateurs [Novoselov et al. Science (2004)] par des méthodes

mécaniques (dites du "Scotch tape"), et le groupe de Claire Berger [Berger et al., J. Phys. Chem. (2004)], par une approche plus conventionnelle (épitaxie). Les échantillons de graphène ainsi obtenus ont de plus des propriétés (grande mobilité des électrons, sensibilité au champ électrique) qui font du graphène un candidat idéal pour être intégré dans les composantes électroniques du futur.

La conjonction de ces trois phénomènes (physique nouvelle associée à l'Hamiltonien de Dirac, simplicité de réalisation expérimentale, et possibilité sérieuse d'application pratiques) a provoqué une explosion d'activité dans ce domaine, aussi bien du point de vue expérimental que théorique. On mentionnera en particulier l'observation d'un effet Hall quantique "anormal" la présence d'un minimum de conductivité quand la densité d'état tend vers zéro, ainsi que les prédictions associées au paradoxe de Klein où à la présence d'états de bord qui contrôlent le transport dans le régime de basses énergies.

Une des particularités du graphène est la présence d'une phase de Berry, qui est responsable en particulier de l'existence d'état de Landau d'énergie nulle. Le rôle de cette phase de Berry est relativement bien compris dans les cas simples, comme par exemple celui du graphène pur et non borné (dans "la masse"). Il l'est par contre beaucoup moins lorsque l'on considère des systèmes confinés, en présence d'un potentiel électrostatique et d'un terme de masse [éventuellement] dépendant de la position. Avec Pierre Carmier, nous nous sommes intéressés à clarifier ces questions de phases de Berry dans le graphène, en utilisant plus précisément une approche basée sur les fonctions de Green semiclassiques [ACL262]. Une première partie de ce travail a consisté à construire le formalisme semiclassique (fonction de Green, formule des traces de Gutzwiller) permettant de tenir compte de la structure de pseudo-spin associée à l'existence des deux sous réseaux pour la structure en nid d'abeille du graphène. Ceci nous a permis de discuter certains points non triviaux concernant par exemple le rôle de la phase de Berry pour les niveaux de Landau en présence d'un terme de masse ainsi que de décrire de manière semiclassique les effets sur les niveaux de Landau des corrections non linéaires à l'Hamiltonien de Dirac [ACL262].

#### Propriétés statistiques des fonctions d'onde chaotiques [ACL261]

Considérons une boîte quantique, modélisée par un billard chaotique et qui, si on néglige les interactions résiduelles, est caractérisée par les niveaux d'énergie  $E_i$  et les fonctions propres  $\psi_i(\mathbf{r})$ . Si on utilise une approximation locale  $V_{sr}(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = (J/\epsilon_0) \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$  de l'interaction Coulombienne écranté ( $J$  est une constante d'ordre un), on voit que la variation d'énergie résiduelle lorsqu'une particule est rajoutée dans le système est reliée à la quantité

$$S_i = A \int d\mathbf{r} |\psi_i(\mathbf{r})|^2 N(\mathbf{r}, E)$$

où  $A$  est l'aire de la boîte quantique et  $N(\mathbf{r}, E)$  la densité de particule en  $\mathbf{r}$ . Les fluctuations mésoscopiques des fonctions d'onde  $\psi_i(\mathbf{r})$  impliquent des fluctuations de la quantité  $S_i$ , et il est donc naturel de s'intéresser à ses propriétés statistiques.

La quantité  $S_i$  est entièrement déterminée par les fonctions propres du système, et par conséquent on ne fait ici qu'étudier un aspect particulier des propriétés statistiques des fonctions d'onde chaotiques. Cette statistique se distingue cependant de celles considérées usuellement, comme par exemple la fonction de corrélation  $c(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = \langle \psi_i(\mathbf{r}) \psi_i(\mathbf{r}') \rangle$ . Cette dernière est en effet locale à la fois en position et en énergie, alors que  $S_i$  implique une intégration sur l'espace aussi bien qu'une sommation sur les niveaux d'énergie. Les fluctuations de  $S_i$  se trouvent par ailleurs être dominées par les oscillations de Friedel au voisinage de la frontière du billard.

Avec Steven Tomsovic et Arnd Bäcker [ACL261], nous avons pu montrer que ce caractère "global" de cette statistique a une conséquence inattendue. En effet, les quantités locales, comme  $c(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$ , sont très bien décrites par le modèle d'ondes planes aléatoires introduit par Berry pour décrire les fluctuations des fonctions d'onde. Ce modèle d'ondes planes aléatoires surestime cependant de presque un ordre de grandeur les fluctuations des  $S_i$ . Une approche purement semiclassique permet toutefois de calculer correctement ces fluctuations, ainsi que de comprendre l'origine de l'erreur commise par le modèle d'ondes planes aléatoires.

## 2) Cohérence quantique et interaction électron-électron dans les réseaux métalliques mésoscopiques

Contexte : La physique mésoscopique s'attache à l'étude d'échelles intermédiaires de la matière condensée, lorsque les effets quantiques se manifestent : une réduction de la taille d'un système isolé peut conduire à l'apparition de *fluctuations mésoscopiques* liées à la quantification du spectre. D'autres manifestations quantiques sont visibles dans les propriétés de transport et s'interprètent en termes d'*interférences*. L'étude des réseaux mésoscopiques (anneaux de taille micrométrique, larges réseaux de fils,...) en offre un terrain particulièrement approprié grâce à leur topologie non triviale. Les phénomènes d'interférences quantiques sont extrêmement fragiles et sont détruits par les interactions de l'onde électronique avec d'autres degrés de liberté (interaction avec les phonons, des impuretés magnétiques ou encore avec les autres électrons). Une question importante concerne l'étude des processus qui limitent la cohérence quantique et la détermination de l'échelle caractérisant l'efficacité de ces processus à détruire la cohérence. Cette échelle, qui joue un *rôle central en physique mésoscopique*, est appelée *longueur de cohérence de phase*  $L_j$ . La mesure de sa dépendance en température apporte des renseignements précieux sur les mécanismes microscopiques à son origine. Les effets d'interférences sont maximisés aux plus basses températures (typiquement  $T < 1\text{K}$ ) ; dans ce cas le mécanisme dominant la décohérence en basse dimension est l'interaction électron-électron (e-e), qui requiert donc une attention particulière.

Les réseaux mésoscopiques sont des candidats intéressants pour la mesure de  $L_j$ , qui peut être par exemple extraite de l'analyse des oscillations de la magnétoconductance (MC) : oscillations Aharonov-Bohm (AB) ou oscillations Altshuler-Aronov-Spivak (AAS) (un cas simple : l'oscillation de la conductance d'un anneau mésoscopique en fonction du champ magnétique est une conséquence directe de la nature ondulatoire du transport électronique, et résulte de la différence de phase entre trajectoires passant par les bras de l'anneau). Obtenir la longueur de cohérence de phase à partir de l'amplitude des oscillations quantiques requiert toutefois une compréhension fine de la compétition de divers ingrédients : la nature ondulatoire du transport, la présence de désordre, l'interaction e-e et l'effet de la géométrie non triviale propre aux réseaux.

L'étude de ces questions par C. Texier s'est faite dans le cadre de la collaboration entre deux laboratoires d'Orsay : le LPTMS et le LPS (plus précisément avec G. Montambaux). Ces travaux ont été motivés par un contexte expérimental extrêmement favorable et stimulés par des collaborations étroites avec deux équipes d'expérimentateurs :

\* l'équipe d'Hélène Bouchiat, Meydi Ferrier et Sophie Guéron (LPS, Orsay).

\* l'équipe de Christopher Bäuerle et Laurent Saminadayar (Institut Néel, Grenoble) ; études menées au cours des thèses de Félicien Schopfer et François Mallet.

Ces travaux se sont développés dans trois directions que nous décrivons maintenant.

### Non localité du transport quantique

Les réseaux métalliques avaient déjà été étudiés aussi bien expérimentalement que théoriquement, au milieu des années 80. L'étude théorique (Douçot & Rammal) reposait sur une description locale du transport (la correction de localisation faible à la conductivité locale) qui n'incluait que *partiellement* les effets de nonlocalité. Une description complète de ces effets (basée sur la conductance d'un réseau multiterminal) avait été développée dans C. Texier & G. Montambaux, Phys. Rev. Lett. **92** (2004), et a initié une série de travaux visant à étudier l'effet de la géométrie non triviale du réseau sur les propriétés de transport.

Ces travaux avaient fourni l'occasion d'une collaboration avec l'équipe expérimentale d'Hélène Bouchiat (LPS) à propos de l'étude du transport dans un réseau métallique gravé dans un 2DEG à une interface GaAs/GaAlAs. Ces expériences avaient permis de sonder la théorie dans des régimes de paramètres totalement différents (densité, désordre,...) de celles de Pannetier *et al* (Mg, Au, Cu) et de descendre à plus basse température (25mK). L'analyse de ces expériences, en insistant sur les propriétés de nonlocalité du transport quantique (au niveau de la théorie de Douçot & Rammal), avait permis la mise en œuvre d'une méthode d'extraction directe de  $L_j$  découplant les différents effets du champ magnétique (oscillations AAS et pénétration du champ dans les fils) : [M. Ferrier, L. Angers, A. C. H. Rowe, S. Guéron, H. Bouchiat, C. Texier, G. Montambaux, and D. Mailly, *Direct measurement of the phase coherence length in a GaAs/GaAlAs square network*, Phys. Rev. Lett. **93**, (2004) 246804].

À la suite de ce premier travail, des questions restaient en suspens concernant le rôle particulier de l'interaction e-e pour la décohérence dans ce système.

Un effet de la géométrie sur la forme des oscillations AAS dans un anneau connecté avait fait l'objet d'un premier travail dans [ACL6].

. *Moyennage et crossover dimensionnel dans des grands réseaux* [ACL167].

La conductance d'un unique anneau présente des oscillations de période  $f_0$  (oscillations AB). Considérer un réseau très grand à l'échelle de  $L_j$  réalise un moyennage sur le désordre : les oscillations AB disparaissent pour ne laisser place qu'aux oscillations AAS, de période  $f_0/2$ . Les comportements des amplitudes AB et AAS en fonction de la taille du réseau sont analysés. Un crossover dimensionnel peut conduire à de nouveaux comportements. Ce travail a été motivé par les expériences réalisées dans le cadre de la thèse de Félicien Schopfer : les résultats expérimentaux sont en bon accord avec la théorie.

### Géométrie et interaction entre électrons

Après avoir clarifié une partie des effets de géométrie liés aux propriétés de la diffusion dans les réseaux métalliques et aux problèmes de connexion du réseau aux contacts extérieurs, C. Texier a combiné ces idées avec l'effet de l'interaction entre électrons.

#### Influence de la géométrie sur la décohérence due à l'interaction e-e

Aux très basses températures la décohérence est dominée par l'interaction e-e. Dans ce cas le processus de décohérence fait intervenir la géométrie du système d'une manière tout à fait non triviale. La raison physique est la suivante: l'effet de l'interaction entre électrons sur les propriétés de cohérence peut se comprendre, dans une image à une particule, comme l'effet du champ électromagnétique fluctuant dû aux autres électrons. Or les fluctuations du potentiel électrique dépendent de propriétés géométriques du système (via le théorème de Johnson-Nyquist), ce qui rend le processus de décohérence dépendant de la géométrie.

. *Influence de la géométrie sur la décohérence due à l'interaction e-e.*

T. Ludwig & A. Mirlin (Phys. Rev. B **69**, 2004) avaient récemment suggéré un changement de dépendance en température de la longueur de cohérence de phase extraite des harmoniques AB d'un anneau métallique. Le problème a été réanalysé différemment par C. Texier & G. Montambaux dans [ACL52] qui ont montré qu'il est possible de trouver des résultats exacts pour un anneau isolé. Ce travail a montré que Ludwig & Mirlin s'étaient trompés dans l'évaluation du facteur préexponentiel des harmoniques, ce qui a été clarifié par C. Texier dans [ACL218]. Seul le régime de "haute température" où les harmoniques sont très fortement amorties est accessible à l'approche de Ludwig & Mirlin, ce qui rend l'observation expérimentale délicate. L'approche de C. Texier & G. Montambaux a permis l'analyse du régime de plus basse température. En outre ces développements ont permis de proposer dans [ACT24] des résultats pour d'autres géométries : chaînes d'anneaux éloignés ou collés.

. *Observation expérimentale* [ACL274].

Les premiers travaux expérimentaux réalisés dans l'équipe d'H. Bouchiat [M. Ferrier *et al*, Phys. Rev. Lett. **93**, (2004) 246804], bien que tenant compte de la nonlocalité du transport quantique, n'avaient cependant pas intégré l'effet de la géométrie sur le processus de décohérence lui-même. Ces expériences ont été complétées par de nouvelles mesures. Une analyse plus fine des oscillations de la MC a permis d'observer la prédiction théorique de Ludwig & Mirlin et de C. Texier & G. Montambaux [ACL52].

#### Correction Altshuler-Aronov

. L'étude d'une *correction quantique à la conductivité due à l'interaction entre électrons* a été menée par C. Texier & G. Montambaux dans [ACL217]. Cette contribution non cohérente est gouvernée par la longueur thermique  $LT = \sqrt{D/T}$  (et non la longueur de cohérence de phase comme pour la localisation faible), où  $D$  est la constante de diffusion. Un des intérêts de l'étude de cette contribution à la conductivité est de fournir une mesure directe du paramètre d'interaction électron-électron. La correction Altshuler-Aronov a été étudiée dans un grand réseau carré de fils métalliques. Alors que la dépendance en  $LT$  présente un crossover dimensionnel ( $1d\_2d$ ), C. Texier & G. Montambaux ont

argumenté que la constante d'interaction a toujours la forme  $1d$ . Cette prédiction a été validée expérimentalement au cours de la collaboration avec les expérimentateurs grenoblois dans le cadre de la thèse de F. Mallet.

#### Déterminant spectral des graphes métriques

Le déterminant spectral est un objet compact codant l'information spectrale d'un opérateur (Laplace ou Schrödinger, par exemple). L'intérêt de cet objet, a priori formel, est de pouvoir être calculé explicitement d'une façon systématique dans les graphes métriques. Cet outil est au cœur des différents travaux sus-mentionnés sur les réseaux mésoscopiques. Son intérêt pour l'étude de propriétés de certaines fonctionnelles du mouvement brownien dans les réseaux étudiées par A. Comtet, J. Desbois et S. Majumdar (propriétés d'enroulement, distribution de temps d'occupation, etc), en relation avec les propriétés de transport quantique, avait été souligné par A. Comtet, J. Desbois et C. Texier dans un article de revue [ACL40].

. *Déterminant spectral de graphes attachés* [ACL247].

C. Texier a obtenu une formule reliant les déterminants spectraux de graphes métriques attachés. Cette formule peut se révéler intéressante pour obtenir le déterminant spectral d'un graphe construit par attachement de sous graphes.

### **3) Effet Hall quantique et mesures quantiques**

#### Jonctions tunnel étendues

La conduction dans un gaz bidimensionnel d'électrons sous un fort champ magnétique est très particulière. En effet, le champ magnétique applique perpendiculairement au plan du gaz induit une chiralité dans le système et la conduction peut se décrire uniquement en termes de courant de bord lorsque les électrons n'occupent que quelques niveaux de Landau. Cette chiralité permet entre autres d'observer la propagation balistique des électrons sur des distances de l'ordre du millimètre dans le meilleur des cas. Il est en effet impossible d'avoir de la rétrodiffusion sans passer d'un bord à l'autre de l'échantillon. Si cet échantillon est large, c'est quasiment impossible, ce qui conduit au caractère balistique de la propagation. Pour étudier ces modes de bord il est possible d'induire volontairement une communication par effet tunnel en rapprochant dans l'espace ces courants. Beaucoup d'expériences dans le domaine de la physique mésoscopique utilisent une constriction localisée (induite souvent par une grille électrostatique) qui pince le gaz latéralement. Une nouvelle géométrie a été réalisée par W. Kang et al. (*Nature* 403, p. 59 (2000)) dans laquelle l'effet tunnel a lieu le long d'une barrière étendue macroscopique et non plus en un point. Les caractéristiques courant-tension de cette jonction sont énigmatiques et ne s'expliquent pas par de simples modèles d'électrons indépendants, ce qui a suscité un grand intérêt théorique.

A cause de la chiralité, une telle jonction doit présenter un effet de courants permanents tout à fait nouveau : si un électron se déplace sur bord droit il peut tunneler sur le bord gauche auquel cas il repart en sens inverse sur l'autre bord de la jonction, il peut alors tunneler à nouveau vers le bord droit et il repart alors dans le sens original. Le processus peut se répéter aussi longtemps qu'il y a cohérence et on a donc des oscillations alternatives sans tension alternative appliquée, comme dans l'effet Josephson AC mais ici dans un système non supraconducteur.

Pour étudier la caractéristique courant-tension de ce type de jonction, Th. Jolicoeur a d'abord décrit les courants de bord au moyen du formalisme dit du liquide de Luttinger chiral ce qui est un modèle au moins partiellement correct des états de bord dans le régime de l'effet Hall quantique. Ensuite il a effectué avec M. Aranzana un calcul de perturbation du courant tunnel à travers la jonction, selon les lignes du calcul analogue pour une jonction supraconductrice. Un tel calcul ne permet pas de décrire le phénomène d'oscillations décrit plus haut mais il permet de capturer les effets d'interférence dus à la taille macroscopique de la jonction ainsi que les non-linéarités dues aux interactions des électrons sur les bords. Dans la figure ci-dessous on observe notamment des battements entre deux phénomènes d'interférence : d'une part l'effet analogue de la diffraction par une fente de largeur finie  $L$  (la longueur de la jonction) qui donne une première période et d'autre part il y a une deuxième période gouvernée par le rapport tension sur énergie de Fermi. Ces battements sont renforcés par les interactions électroniques. Expérimentalement on contrôle l'énergie de Fermi facilement via le champ magnétique ce qui doit permettre d'observer ces effets. Il semble après discussions avec W. Kang que

les échantillons actuels soient trop désordonnés selon la longueur de la jonction pour que la cohérence électronique s'étende sur toute la longueur de la barrière. Ces travaux ont donné lieu à une publication Physical Review B 72, 085318-085326 (2005) et à la thèse de M. Aranzana.

#### Nouveaux états de Hall fractionnaires

De récentes expériences (2003) dans le groupe de Horst Stormer menée par Wei Pan (Sandia National Lab, USA) ont montré l'apparition de fractions de Hall pour des remplissages encore jamais observés comme  $4/11$ ,  $6/17$ ,  $3/8$ ,  $3/10$ ,  $5/13$  dans des échantillons de semi-conducteurs de très haute mobilité. Il n'est pas évident que ces fractions puissent apparaître selon les théories standard comme les fermions composites. Th. Jolicoeur a proposé de nouvelles fonctions d'onde pour décrire de manière unifiée toutes ces fractions d'un seul coup. Il se trouve que toutes ces nouveaux états sont non-Abéliens et donc doivent posséder des excitations non conventionnelles. Il a élucidé le diagramme de phase des fractions  $3/7$  et  $3/8$  et montré au moyen de diagonalisations exactes une évidence pour l'existence de ces nouveaux états. Ces fonctions d'onde sont basées sur des théories conformes dites de parafermions. Ces résultats sont dans la publication [ACL281].

#### Détection d'électrons uniques à la limite quantique

Il est désormais possible de fabriquer des circuits électroniques mésoscopiques avec des électrons balistiques circulant un par un le long d'un bord d'un gaz d'électrons bidimensionnel. De telles sources d'électrons ont été réalisées dans le groupe de D. Glattli à l'ENS-Paris. Th. Jolicoeur a réalisé un modèle détaillé du détecteur qui doit être utilisé pour enregistrer le passage des électrons uniques. Il a clarifié la notion de limite quantique de la détection qui est ici assez différente des détecteurs usuels. L'originalité de ce travail tient dans la modélisation d'un câble coaxial comme une chaîne d'oscillateurs, inspiré de l'optique quantique ("quantum network theory") ce qui donne un modèle à la Caldeira-Leggett pour décrire l'influence de l'environnement.

(collaboration avec G. Fève du Laboratoire Pierre Aigrain à Paris et P. DeGiovanni de l'ENS Lyon, [ACL251]).

### **4) Propriétés électroniques des systèmes fortement corrélés et de basse dimensionnalité**

Motivation et Contexte : Les études sont consacrées à la théorie des phénomènes physiques dans les systèmes électroniques, surtout de basse dimensionnalité. En général, ce sont des systèmes dans lesquels se forment des superstructures, telles que des ondes de densité de charge et de spin, des cristaux électroniques (cristaux de Wigner), des "stripes" (rubans) ou des réseaux de vortex dans l'état supraconducteur. Les défis principaux sont liés au rôle des défauts topologiques (solitons, ou instantons dans les processus transitoires) de nature mixte venant des degrés de liberté de charge et de spin. Les solitons sont ultimement associés aux symétries brisées, ce qui est communément observé dans les systèmes fortement corrélés.

#### Observation des solitons microscopiques topologiques par effet tunnel dans des jonctions nanométriques

Des symétries brisées sont communément observées dans les systèmes fortement corrélés pour lesquels leurs états fondamentaux peuvent se réorganiser suite aux changements de concentration locale d'électrons ainsi qu'à l'ajout de particules individuelles, voyez de courts articles de revue [ACT33, ACT34]. Dans les Cristaux Electroniques, comme ondes de densité de charge (ODC), cet effet donne naissance à des défauts topologiques, à savoir, discommensurations, dislocations, solitons. Les résultats rapportés dans des publications [ACL85, ACL296, ACT33, ACT34, OV4] montrent que tous ces objets apparaissent et interfèrent dans des expériences. Elles apportent les toutes premières observations de la physique des solitons dans les processus dynamiques

électroniques; elles décrivent aussi la reconstruction de l'état de base qui résulte de ces solitons dans un système électronique fortement corrélé mis en évidence dans un dispositif nanométrique.

La physique à «haute énergie» est liée aux processus de brisure de paires électron-trou, associé à la création de solitons microscopiques. Ces «solitons d'amplitude» correspondent aux quasi particules recherchées depuis longtemps – les spinons. La physique de «basse énergie», donne accès à la reconstruction de l'état fondamental par l'intermédiaire d'un réseau de vortex des ODC, ou dislocations dans le langage des cristaux électroniques. Très surprenante est l'observation de la structure en escalier des spectres tunnels correspondant à l'entrée de lignes de dislocations chargées – agrégats de solitons de phase. De plus, l'analyse des spectres de basse énergie donne la preuve que le courant tunnel résulte de solitons de phase doublement chargés. Ceci est la première observation de cette sorte au delà des supraconducteurs, montrant que l'onde de densité de charge est essentiellement un cristal quantique (le «supersolide »).

Ces sujets sont à la base des nouveaux contrats ANR et INTAS.

#### Théorie des transitions dans la zone spectral sous-gap.

Les études sur les mécanismes instantoniques des excitations électroniques sont poursuivies en raison d'intérêts importants portés sur la question du pseudo gap, des transitions spectrales interdites. Elles fournissent également une base méthodologique pour des problèmes de transitions électroniques qui apparaissent dans le projet INTAS 2007-2009 « Interlayer tunneling spectroscopy of condensed electronic states with charge, spin and magnetic ordering in layered nano-materials ». La moyenne de l'intégration fonctionnelle avec l'approche d'instanton a permis [ACL296] de calculer le courant tunnel entre chaînes dans des canaux d'électron seul (porté par le soliton d'amplitude – le spinon) et de bi-électron (porté par le soliton de phase). Profondément dans le pseudogap, le seuil absolu est approché par une loi de puissance ; il est apparu à cause de l'émission de photons au cours d'une formation du soliton (le régime de «la dissipation quantique »).

#### Ferroélectricité et ordre de charge dans des conducteurs organiques.

Des études des états électroniques spontanément polarisés sont poursuivies dans le domaine des conducteurs organiques: à la fois en raison des efforts expérimentaux réalisés préalablement à Grenoble, Orsay et ailleurs dans le monde (Japon, Etats-Unis) et aussi en raison du lien avec des problèmes théoriques plus généraux de l'état de Mott-Hubbard. Nous continuons à explorer la découverte du précédent quadriennal (*P. Monceau, F.Ya. Nad and S. Brazovskii "The ferroelectric Mott-Hubbard phase of organic (TMTTF)<sub>2</sub>X conductors.", Phys. Rev. Lett., 86, 4080 (2001)*). L'article de revue [OS9] fournit une ample analyse en ce qui concerne les applications des théories du système quasi-unidimensionnel d'électrons en interaction pour l'Ordre de Charge spontané. L'accent particulier est mis sur la physique des solitons, avec des résultats neufs pour l'interprétation des spectres optiques et pour l'extraction des paramètres microscopiques qui donnent naissance à l'effet. Maintenant, nous sommes en cours de transférer l'idée de polarisation électrique spontanée de cristaux organiques vers les polymères conjugués, ce qui promet des applications excitantes.

#### Accrochage fort dans ODC

De plus vieille branche des études est liées à des défis amenés par l'exploitation des sources modernes de rayonnement synchrotron (l'ESRF et Soleil). Nous étudions la forme de ligne pour la diffusion de rayons X par les supra réseaux imparfaits [ACL141]. La méthode de reconstruction du profil de la densité électronique près d'un défaut fournit la possibilité de déterminer les phases de la diffusion des électrons par un défaut (phases des oscillations de Friedel).

#### Physique des jonctions de matériaux fortement corrélés.

Dans les années 80's nous avons consacré des études théoriques sur la possibilité de la commutation, par l'effet de champ, entre les états normaux et conducteurs (supraconducteurs) sur les surfaces de matériaux organiques ou d'oxyde. Récemment nous avons actualisé et prolongé cette étude en raison de nouvelles demandes des expériences et en relation avec la réussite du projet INTAS 2007-2009.

